

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

81. Band, Heft 1

30. September 1959

S. 1-240

Allgemeines. Didaktik. Bibliographisches.

● **Van Nostrand's scientific encyclopedia.** Third ed. Princeton and London: D. van Nostrand Company 1958. VII, 1839 p. 220 s.

Erdős, Paul: Some unsolved problems. Michigan math. J. 4, 291—300 (1958).
On November 16, 1957, Assumption University of Windsor sponsored a symposium for mathematicians from Ontario, Michigan, and Indiana. The symposium gave occasion for an informal lecture in which I discussed various old and new questions on number theory, geometry and analysis. In the following list, I record these problems, with the addition of references and of a few further questions.

Zusammenfassung des Autors.

Miranda, Rafael: Zwei elementare Bemerkungen. Gac. mat., Madrid 9, 121—125 (1957) [Spanisch].

Stuchlik, Franz: Kolloquium über Probleme der Ausbildung in Mathematik und Mechanik. Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg 2, 107—110 (1958).

Voraussetzungen für die mathematische Ausbildung an Technischen Hochschulen schaffen? Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg 2, 117—119 (1958).

Manteuffel, Karl: Über die Forderungen der Hochschule an die Ausbildung der Abiturienten. Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg 2, 121—123 (1958).

Langford, W. J.: Secondary school mathematics. An international survey. Math. Gaz. 42, 177—193 (1958).

● **The teaching of mathematics.** (Issued by the Incorporated Association of Assistant Masters in Secondary Schools.) Cambridge: At the University Press 1957. IX, 231 p. 15 s.

Im vorliegenden Band soll der Mathematikunterricht für die secondary schools in England, besonders für die secondary grammar schools, behandelt werden durch die Angabe von Zielen, Methoden und der Stoffauswahl für dieses Fach. Dazu wurden die Erkenntnisse der letzten Zeit für den Unterricht gegenüber dem entsprechenden Bericht aus dem Jahre 1928 verwertet und die heutige Form der Mathematik berücksichtigt. So wird z. B. bei den Zielen des Mathematikunterrichts angegeben, daß er nicht mehr nur als Übung des Denkens betrachtet werden könne. Vielmehr soll der Schüler neben einem Einblick in die logische Ordnung der Mathematik auch die Erkenntnis vom Wert und der Wichtigkeit der Mathematik für die verschiedensten anderen Gebiete erhalten. Das wirkt sich auf die Stoffauswahl und die Methoden aus. Für die Methode wird keine allgemeine pädagogische Theorie an den Beginn gestellt und daraus alles gefolgert. Neben kurzen allgemeinen Hinweisen (wie z. B. Weckung des Interesses, Wert der Motivierung und anderen psychologischen Erkenntnissen, aus denen Folgerungen für die Behandlung gezogen werden) finden sich umfangreiche praktische methodische Hinweise zu den einzelnen Gebieten an Hand entsprechender Beispiele und viele Bemerkungen zur Praxis des mathematischen Unterrichts. Die Stoffauswahl (die nicht verbindlich ist, sondern mehr als Vorschlag gedacht ist) wird einmal in der bisherigen Unterteilung dargestellt und daneben wird auf eine Stoffaufteilung hingewiesen, die sich aus einheitlichen mathematischen Gesichtspunkten ergeben kann. Gegenüber den deutschen Verhältnissen fällt im letzten Jahr eine stärkere Betonung der Mechanik als Anwendungsgebiet und der Hinweis auf die Statistik auf.

A. Bergmann.

Straszewicz, St. (redigiert von): *Der geometrische Anfangsunterricht in Polen. Bericht der polnischen Subkommission der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission.* Euclides, Groningen 34, 33—47 (1958).

Timman, R.: *Das Mathematikstudium an der Technischen Hochschule zu Delft.* Euclides, Groningen 34, 48—59 (1958) [Holländisch].

Villa, Mario: *A proposito dei corsi di geometria nelle nostre Università.* Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 13, 426—429 (1958).

Tricomi, Francesco: *Prospettive professionali e preparazione dei diplomati in matematica.* Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 13, 253—260 (1958).

Vredenduin, P. G. J.: *Die akademische Ausbildung des Lehrers der exakten Fächer.* Euclides, Groningen 34, 2—5 (1958) [Holländisch].

Gerretsen, J. C. H.: *Die akademische Ausbildung des Mathematiklehrers.* Ibid. 34, 5—15 (1958) [Holländisch].

Brinkman, H.: *Die akademische Ausbildung des Physiklehrers.* Ibid. 34, 15—25 (1958) [Holländisch].

Diskussion. Ibid. 34, 24—25 (1958) [Holländisch].

Cives, Giacomo: *La didattica della matematica. Studio bibliografico. I: La storia della matematica. II: La divulgazione divertente della matematica. III: I fini dell'insegnamento della matematica.* Periodico Mat., IV. Ser. 36, 129—155; 209—220 (1958); 37, 1—7 (1959).

● Fladt, Kuno: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Teil 1: Elementare Arithmetik.* Stuttgart: Ernst Klett Verlag 1957. 80 S., DM 6,20.

Diese Reihe der Hefte über Elementarmathematik ist für Lehrer an höheren Schulen gedacht, um die wissenschaftlichen Grundlagen für die Schulmathematik darzustellen. In diesem Band werden die Grundlagen der Analysis behandelt. Zuerst werden dabei die natürlichen Zahlen mit ihren Eigenschaften als bekannt vorausgesetzt (wie man es auf der Schule auch annehmen muß). Ihre axiomatische Behandlung erfolgt am Schluß. Von den natürlichen Zahlen ausgehend, werden rationaler, reeller und komplexer Zahlkörper konstruiert. Dabei werden zuerst die Körperaxiome angegeben und dann die natürlichen Zahlen (als multiplikative bzw. additive Halbgruppe) durch Paarbildung in Gruppen eingebettet und so der rationale Zahlkörper konstruiert (d. h. nachgewiesen, daß die Äquivalenzklassen von Paaren die Körperaxiome erfüllen). Der Übergang zu den reellen Zahlen geschieht durch Intervallschachtelung. Die komplexen Zahlen werden zuerst als Zahlenpaare konstruiert, dann wird der komplexe Zahlkörper auch als Divisionsalgebra vom Rang zwei über dem reellen Zahlkörper hergeleitet und der Satz von Frobenius bewiesen. Im letzten Abschnitt werden die natürlichen Zahlen mit den Peanoschen Axiomen eingeführt. Kurze Bemerkungen zu den Fragen der Grundlagen der Mathematik beschließen das Heft. — Einige Bemerkungen des Ref., wie an manchen Stellen der Zweck des Buches für den gedachten Leserkreis besser zur Geltung gebracht werden könnte: Die Gleichheit wird z. B. als Äquivalenzrelation axiomatisch festgelegt, ohne daß gleichzeitig die Substitutionsregel bezüglich aller später auftretenden Relationen allgemein mit angegeben wird. Die Substitutionsregel wird dann jeweils bei den Körperaxiomen als Axiom der Gleichheit in der Form der hinreichenden und notwendigen Bedingung dafür, daß die Äquivalenzrelation mit der Addition bzw. Multiplikation verträglich ist, in die Axiome aufgenommen. Leider fehlt dann der Hinweis darauf, warum man das Axiom der Gleichheit an dieser Stelle wirklich noch benötigt, vor allem deshalb, weil auf diese Weise aus konkretem Anlaß auf die verschiedenen Dinge aufmerksam gemacht werden könnte, die bei der axiomatischen Methode eine Rolle spielen (hier z. B. auf logische Prinzipien und Axiome, die die mathematische Struktur betreffen). Weiter wird im voraus gesagt, daß die Konstruktion der verschiedenen Zahlen (negative, rationale) nach einem einheitlichen Verfahren durch-

geführt werden soll. Das wird dann nicht ganz folgerichtig eingehalten. Die jeweils verwendeten Halbgruppen (bezüglich der Addition bzw. Multiplikation) werden nicht einheitlich als reguläre Halbgruppen betrachtet und als solche in bekannter Weise in Gruppen eingebettet. Bei der Einbettung der additiven Halbgruppe wird implizit die Anordnung verwendet und die Einbettung so konstruiert, daß die schon vorhandenen Elemente später als Positivbereich bez. der Anordnung auftreten. Gerade als wissenschaftliche Betrachtung der Fragen, die im Schulunterricht auftreten, hätte man gewünscht, daß die verschiedenen Möglichkeiten bei der Konstruktion der Einbettung klarer auseinandergehalten werden, da diese Dinge dem gedachten Leserkreis nicht so bewußt sein werden [vgl. z. B. A. Kirsch, Einführung der negativen und gebrochenen Zahlen, Math.-phys. Semesterber. 5, 281—284 (1957)].

A. Bergmann.

● **Fladt, Kuno: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Teil 2: Elementargeometrie I.** Stuttgart: Ernst Klett Verlag 1957. 154 S. DM 13,20.

In diesem ersten Heft über die Elementargeometrie wird vor allem die Grundlegung der elementaren euklidischen Geometrie, wie sie von Hilbert dargestellt wurde, behandelt. Nach kurzen Vorbemerkungen über die axiomatische Methode folgt im II. Abschnitt eine kurze Inhaltsangabe von Euklids Elementen. Die Proportionalenlehre und ihre Beziehung zur heutigen Mathematik wird im Anschluß an Hasse-Scholz, Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik (Berlin 1928), referiert. Im III. Abschnitt werden die Axiome der euklidischen Geometrie nach Hilbert angegeben und ihre ersten Folgerungen behandelt. Die Einführung einer geometrischen Streckenrechnung in der Ebene erfolgt im IV. Abschnitt. Dabei werden die Sätze von Desargues und Pappus-Pascal, ihre Bedeutung für die Streckenrechnung und für die Einbettbarkeit einer ebenen Geometrie in eine räumliche behandelt. Die gegenseitige Abhängigkeit dieser Sätze und ihre Beweisbarkeit, je nachdem, welche Axiome man vorausgesetzt, werden diskutiert. Da an manchen Stellen dieses Abschnitts analytische Modelle verwendet werden, wäre es für die Absicht des Buches gut gewesen, die analytischen Modelle allgemein einzuführen. Ohne großen Mehraufwand hätte dann besser als in VII, 3b auf die allgemeine affine Geometrie (über anderen Körpern als dem reellen Zahlkörper) hingewiesen werden können, und manche Zusammenhänge wären klarer hervorgetreten. Die Lehre vom Flächeninhalt wird im V. Abschnitt mit und ohne Stetigkeitsaxiome behandelt. Der VI. Abschnitt handelt von den Punkttransformationen der euklidischen Ebene. Die Formulierungen und Beweise sind geometrisch ausgeführt und schließen mit der Angabe der Automorphismengruppe der euklidischen Ebene. Im Verlaufe der Entwicklungen werden Axiome für die Achsenspiegelungen nach Willers, Z. math. natur. Unterricht 53, 68—77, 109—119 (1922) eingeführt und darauf hingewiesen, daß man die euklidische Geometrie auch mit Achsenspiegelungen axiomatisch behandeln kann. Hier vermißt man vor der Angabe dieser Spiegelungsaxiome die Angabe der außerdem vorausgesetzten Axiome. Gerade weil in der heutigen Schulbuchliteratur versucht wird, die Geometrie von dieser Seite her aufzubauen, wäre es wünschenswert gewesen, diese Dinge mit aller Klarheit zu beschreiben, um dem Durcheinander und der Unklarheit über ein exaktes Vorgehen auf diesem Wege in den Schulbüchern zu begegnen. Leider sind in der Behandlung der Transformationen die Kleinschen Ideen der Kennzeichnung von Geometrien durch gruppentheoretische Prinzipien (die nach dem Vorwort mit im Mittelpunkt stehen sollten) nicht mit der wünschenswerten Klarheit zum Ausdruck gekommen, was zum Teil wohl auf den völligen Verzicht auf analytische Modelle zurückzuführen ist. Im VII. Abschnitt wird noch einmal allgemein über Hilberts Axiomatik gesprochen und dabei auf den Beweis der Widerspruchslösigkeit der Geometrie durch Zurückführung auf analytische Modelle und deren Widerspruchslösigkeitsbeweis verwiesen. Hier wird ein analytisches Modell über einem archimedisch geordneten, pythagoräischen Körper an-

gegeben und mit ihm z. B. die Unabhängigkeit der beiden Stetigkeitsaxiome gezeigt. Die geometrischen Konstruktionen mit Lineal und Eichmaß bzw. Lineal und Zirkel werden im VII. Abschnitt behandelt. Die Dehnschen Ergebnisse über den Rauminhalt bilden den IX. Abschnitt. Der Rauminhalt wird mit dem Begriff der Grenzgleichheit behandelt. Mit Hilfe der Dehnschen Ergebnisse wird z. B. gezeigt, daß inhaltsgleiche Polyeder nicht zerlegungsgleich zu sein brauchen. Im letzten Abschnitt werden die Sätze über Bewegungen im Raum hergeleitet. Die Automorphismengruppe des dreidimensionalen euklidischen Raumes wird nicht angegeben. Sie soll mit analytischen Hilfsmitteln in einem anderen Heft behandelt werden. Zum Schluß sei bemerkt, daß Ref. ein solches Buch gerade wegen der schon erwähnten Unklarheiten in der Schulbuchliteratur für sehr nötig hält. Der Wert des Buches für diesen Zweck und die Übersichtlichkeit könnten vergrößert werden, wenn bei Zusammenfassungen bzw. Einführungen an manchen Stellen die Voraussetzungen immer genau angegeben würden.

A. Bergmann.

● Messel, H. (edited by): *Selected lectures in modern physics for school science teachers*. Sydney: Nuclear Research Foundation within the University of Sydney 1958. 30 s.

Cuesta, N.: Über Begriff, Methoden, Unterricht und Quellen der Analysis. *Revista mat. Hisp.-Amer.* 18, 87—98; 201—213 (1958) [Spanisch].

Bakos, Tibor: The notion of number in the high-schools and the university-teaching. *Mat. Lapok* 9, 115—135 (1958) [Ungarisch].

Vernout, H. C.: Vereinfachung der Goniometrie. *Euclides*, Groningen 34, 28—31 (1958) [Holländisch].

Quade, Wilhelm: Das Problem der Interpolation auf der Schule und auf der Hochschule. *Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg* 2, 111—115 (1958).

Lohmann, Hans: Methodologie und Methodik der Grundlagen der Mechanik des starren und des elastischen Körpers. *Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden* 7 (1957/58), 743—765 (1958).

Newman, M. H. A.: The teaching of algebra in sixth forms. *Math. Gaz.* 42, 205—209 (1958).

● Estève, Madeleine: État des périodiques figurant à la bibliothèque de l'Institut Henri Poincaré (Cabinet du Département des Sciences mathématiques), rangés, dans chaque pays, par ordre alphabétique des titres. (Documentation Mathématique. Fasc. 30 = 38.) Paris: Secrétariat Mathématique 1957. 40 p.

● Estève, Madeleine: Répertoire des vedettes-matières utilisées à la Bibliothèque de l'Institut Henri Poincaré. (Documentation Mathématique. Fasc. 39.) Paris: Secrétariat Mathématique 1958. 35 p.

● Burks, Arthur W. (edited by): *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. Vol. 7: Science and philosophy. Vol. 8: Reviews, correspondence and bibliography. Cambridge, Mass.: Harvard University Press; London: Oxford University Press 1958. XIV, 415; XII, 352 p. Each 63 s. net.

Geschichte.

● Smith, David Eugene: *History of mathematics*. Vol. 1. General survey of the history of elementary mathematics. Vol. 2. Special topics of elementary mathematics. Unaltered and unabridged republication of the last edition (1951/53). New York: Dover Publications, Inc. 1958. XII, 596 p. \$ 2,75 and XII, 725 p. \$ 2,75.

Nachdruck der seinerzeit sehr verdienstvollen, jedoch heute veralteten Erstausgabe von 1923/25 unter Übernahme der Druckfehlerberichtigungen im Nachdruck von 1951/53.

J. E. Hofmann.

● **Vogel, Kurt:** *Vorgriechische Mathematik. I.* (Mathematische Studienhefte, Heft 1.) Hannover: Hermann Schroedel Verlag KG; Paderborn: Verlag Ferdinand Schöningh 1958. 80 S. 44 Abb.

In diesem schönen Büchlein gibt Verf. einen Überblick über die Vorgeschichte der Mathematik, dabei eine Erläuterung der verschiedenen geometrischen Ornamente und der in verschiedenen Perioden verwendeten Zahlsymbole [Zahlkerben, protoelamitische Symbole, knossische Schrift] und behandelt dann in dem zweiten Teil die ägyptische Mathematik ausführlich. Die Entwicklung der Hieroglyphen und der Zahlsymbole der hieratischen Schreibweise wird kurz skizziert. Dann folgt eine Darstellung von den Ägyptern behandelte Probleme der Geometrie und Arithmetik. Von fast jedem Problemtypus werden Beispiele gegeben und mit Dokumenten illustriert. Da das Büchlein dazu dienen soll, beim Unterricht auf geschichtlicher Grundlage den Schülern zu zeigen, wie die Originale aussehen und welche Vorsicht bei Schlüssen beobachtet werden sollte, hat Verf. viele Übungen zugefügt. Jedem Kapitel sind, in zwei Abteilungen „für die Jugend“ und „für weitere Studien“, ausführliche Literaturangaben beigelegt. *E. M. Bruins.*

Sambursky, S.: *On some references to experience in stoic physics.* *Isis* 49, 331—335 (1958).

Mahalanobis, P. C.: *The foundations of statistics.* *Sankhyā* 18, 183—194 (1957).

The author discusses certain ideas in Indian-Jaina logic concerning the Syadvada system of predication due to Bhadrabahu (4th century B. C.). Syadvada or "assertion of possibilities" lists the following seven types of predication: (1) May be, it is; (2) may be, it is not; (3) may be, it is and it is not; (4) may be, it is indescribable; (5) may be, it is and yet is indescribable; (6) may be, it is not and it is also indescribable; (7) may be, it is and it is not and it is also indescribable. An illustration is given by considering the toss of a coin and the relevance of this system to concepts of probability discussed. Quotations from books on Jaina philosophy are included and the author concludes: "The syadvada seems to have given the logical background of statistical theory in a qualitative form . . . the difference between Jaina "avaktavya" (indeterminate) and "probability" lies in the fact that the latter has quantitative implications, namely, the explicit recognition of the concept of numerical frequency ratios". *T. V. Narayana.*

Kennedy, E. S.: *Comets in Islamic astronomy and astrology.* *J. near eastern Studies* 16, 44—51 (1957).

Es sind bis jetzt 11 islamische Quellen aus dem 9. bis 15. Jahrhundert bekannt, die Hinweise auf Kometen enthalten. Die meisten erwähnen einen Kometen „al-Kaid“, der die Ekliptik in 144 Jahren im rückläufigen Sinne durchlaufen soll. Auch Tafeln hierfür sind verschiedentlich berechnet worden, jedoch handelt es sich offensichtlich um vorislamisches Traditionsgut, das auch von Astrologen nur noch am Rande mitgeschleppt wurde. Gelegentlich werden auch sechs weitere Schwanzsterne mit ihren Namen erwähnt. Tatsächliche Beobachtungen von Kometen sind nur in einer Glosse aus dem 15. Jahrhundert bezeugt. — Der Aufsatz enthält ferner einige Ergänzungen zu dem Werk des Verf. „A survey of Islamic astronomical tables“ (Trans. Amer. philos. Soc., n. Ser. 46, part 2, 123—177 (1956)). *H. Hermelink.*

Thorndike, Lynn: *Notes upon some medieval latin astronomical, astrological and mathematical manuscripts at the Vatican. II.* *Isis* 49, 34—49 (1958).

(Teil I s. dies. Zbl. 72, 245). — Beschreibung weiterer fünf Handschriften vorwiegend astronomischen und astrologischen Inhalts. Der in der Mitte des 15. Jahrhunderts wohl in St. Emmeram in Regensburg geschriebene Codex Palatinus 1354 (Verfasser Friedrich Gerhard?) enthält u. a. eine deutsch geschriebene „Visierkunst“ (Ausmessung von Fässern) auf 31 Blättern. *H. Hermelink.*

Schirmer, O.: Die muslimische Lehre von der Vermessung ('ilm al-misāha) und ihre Spuren in der mittelalterlichen Fachliteratur des Abendlandes. J.-Ber. Oberrealschule mit Knabenmittelschule Bayreuth 1956/57, 17—50 (1957).

Die im wesentlichen in der Heronischen Tradition stehenden arabischen Schriften zur „Vermessung“ (besser wohl Ausmessung) von Flächen und Körpern haben außer einem Artikel des Verf. in der „Enzyklopädie des Islams“ unter dem Stichwort „Misāha“ bisher keine zusammenhängende Darstellung gefunden. Nun konnte Verf. endlich die wichtigsten Ergebnisse einer mehr als 20 Jahre zurückliegenden Arbeit umfassender Art veröffentlichen, die sich neben den wenigen in Übersetzung oder Auszügen zugänglichen Rechenbüchern auf drei bisher unveröffentlichte, von Gerhard von Cremona im 12. Jahrhundert ins Lateinische übersetzte arabische Originalarbeiten und auf 10 von E. Wiedemann und J. Ruska aus dem Arabischen übersetzte Abhandlungen bzw. Teile von solchen stützt. Leider verboten es Raumgründe, die Texte bzw. ihre Übersetzungen selbst wiederzugeben und zu kommentieren. Außerdem war es dem Verf. nicht möglich, die neuere Forschung in größerem Umfang zu berücksichtigen. So mußte er sich darauf beschränken, neben einer allgemeinen Übersicht über Inhalt und Gliederung dieser meist für den Praktiker bestimmten Handbücher die wichtigsten Besonderheiten und gegenseitigen Beziehungen aufzuzeigen. Interessant sind z. B. die verbesserten Näherungsformeln von al-Umawī (um 1490) für Kreissegmente:

$$F = (s + p) \frac{p}{2} + \frac{1}{14} \left(\frac{s}{2} \right)^2 \left(1 + \frac{3}{28} \right) \quad \left(p < \frac{s}{2} \right)$$

bzw.
$$F = (s + p) \frac{p}{2} + \frac{1}{14} \left(\frac{s}{2} \right)^2 \left(1 - \frac{2}{21} \right) \quad \left(p > \frac{s}{2} \right)$$

(mit s = Sehne und p = Segmenthöhe), oder die näherungsweise Integration von Figuren durch Einzeichnung in ein Quadratnetz durch Ibn al-Ġiyāb (um 1150). Wichtiger als solche Einzelheiten der im allgemeinen nicht über elementarste Rezepte hinausgehenden Schriften ist jedoch der Nachweis des langen Nachlebens derselben im Abendland. So sind 43 Aufgaben des von Gerhard von Cremona übersetzten „liber mensurationis“ von Abū Bekr (um 1050 ?), meist mit denselben Zahlenwerten, in das mathematisch weit höherstehende „liber embadorum“ des Abraham bar Hiyya Savasorda (um 1136) übergegangen, das bekanntlich als Vorlage für die einflußreiche „Practica geometriae“ des Leonardo von Pisa gedient hat. Und eine stereometrische Aufgabe desselben sonst unbekannten arabischen Autors taucht 1488 in der „Practica Geometriae“ des Leonardo Maynardi wieder auf! — Auch die „Practica Geometriae“ des Dominicus de Clavasio (um 1350) gehört noch in diese Tradition, wenn sie auch durch Aufnahme von Höhen- und Längenmessungen schon mehr den praktischen Bedürfnissen des Feldmessers Rechnung trägt. Verf. gibt die Kapitelüberschriften dieser bisher ungedruckten Schrift, die besonders auch durch ihre Beziehungen zu der bekannten „Geometria Culmensis“ (um 1400) von Interesse sein dürfte.

H. Hermelink.

Schirmer, O.: Über die Ausmessung von kugelartigen Polyedern. Ein Beitrag zur Geschichte und unterrichtlichen Behandlung der regelmäßigen und halbbregelmäßigen Vielfläche. J.-Ber. Oberrealschule mit Knabenmittelschule Bayreuth 1957/58, 61—80 (1958).

Abdruck einer von J. Ruska stammenden, bisher unveröffentlichten Übersetzung des Abschnitts über die Polyeder aus dem „Schlüssel der Rechner“ von al-Kāšī (1426/27), unter kritischem Vergleich mit der kürzlich erschienenen russischen Übersetzung von Rozenfel'd und Juškevič (Moskau 1956). Es handelt sich um die Berechnung von Körperkante, Radius der Inkugel und Volumen der fünf regelmäßigen Vielfläche und zweier halbbregelmäßiger Körper (ein 14-Flach und ein 32-Flach) aus dem Radius der Umkugel. Die einzelnen Zahlen-

werte sind auf 5 Sexagesimalen genau angegeben. — Verf. fügt eine Betrachtung über die Behandlung der regelmäßigen und halbregelmäßigen Körper im Schulunterricht an. Er hält sie für besonders geeignet zu einer anschaulichen Einführung in das Wesen der Topologie.

H. Hermelink.

Dilgan, H.: Sur un problème indéterminé d'Ibni Hamza. Bull. techn. Univ. Istanbul 10, Nr. 3, 31—35 (1957).

Aus einem 1591 verfaßten türkischen Rechenbuch von 'Alī b. Walī Ibn Hamza, das im Manuskript 500 Seiten umfaßt, teilt Verf. eine unbestimmte Aufgabe mit. Es handelt sich um die gleichmäßige Verteilung von 81 Dattelpalmen unter 9 Erben, wobei der erste Baum 1 Pfund, der zweite 2 Pfund, der dritte 3 Pfund usw. trägt. Die Lösung geschieht mittels eines halbmagischen Quadrats von 81 Zellen, indem in jede Zeile 9 aufeinanderfolgende Zahlen eingetragen werden, deren Anfang jeweils um eine Zelle nach rechts versetzt ist. Dann liefern die Spalten ein partikuläres Lösungssystem. (Dieselbe Lösungsmethode einer äquivalenten Aufgabe im 15. Jahrhundert auf deutschem Boden bei Friedr. Gerhard, Algorismus Ratisbonensis, ed. K. Vogel, Nr. 351, s. dies. Zbl. 57, 2; die Bildungsweise des dort benutzten Neunzellen-Quadrats ist jedoch eine andere.)

H. Hermelink.

Dilgan, H.: Nasireddin Toussi grande scienziato matematico. Atti VIII Congr. internaz. Storia Sci., Firenze 3—9 Settembre 1956, 183—191 (1957).

Kurze Darstellung des Lebens und der wichtigsten astronomischen und mathematischen Leistungen des bekannten Gelehrten aus dem 13. Jahrhundert, der das erste selbständige Lehrbuch der Trigonometrie schrieb.

H. Hermelink.

● **Baranowski, Henryk:** Kopernikus-Bibliographie. 1509—1955. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1958. 448 S. zl. 35.—. [Polnisch].

Bibliographie der gedruckten Schriften von und über Kopernikus. Nachdem W. Bruchnalski (Mikolaj Kopernik, Lwow, 1924) 588 Nummern für die Periode 1509—1923, L. Brozek [Przegląd Zachodni (Supplement zu Nr. 7/8) (1949)] für die Periode 1923—1948 308 neue Nummern und schließlich F. Kubach 1943 in seinem Kopernikusbuch (München, 1943) 222 Nummern zusammengebracht haben, bringt der Verf. vorliegender Bibliographie durch Zurückgreifen auf den Katalog von A. Wołyński der Jagellonischen Bibliothek (Ms. Nr. 5858) und ältere Werke von Lalande, Houzeau-Lancaster, Zinner u. a. die Anzahl der gedruckten Kopernikana auf 3750 Nummern.

J. Fleckenstein.

● **Santillana, Giorgio de:** The crime of Galileo. London: William Heinemann, Ltd. 1958. XVI. 339 p., 8 plates. 30 s. net.

Drake, Stillman: Galileo gleanings. IV: Bibliographical notes. Isis 49, 409—413 (1958).

Steck, Max: Theoretische Beiträge zu Albrecht Dürers Kupferstich „Melencolia I“ von 1514. Forsch. Fortschr. 32, 246—251 (1958).

Unter Wiedergabe einer Originalstelle berichtet Verf. über die wohlgelungene Rekonstruktion des Kristallographen P. Grodzinski für den Körper auf Dürers Melencolia von 1514: Es handelt sich um ein Rauten-Achtflach in Übereckstellung, dessen höchste und tiefste Ecke durch kantenhalbierende Dreiecksschnitte abgestumpft sind. Der eine Rautenwinkel mißt 72° (Beziehung zur stetigen Teilung). Die kunsttheoretische Kompositionsanalyse und die symbolische Deutung des Körpers führen zu interessanter Gegenüberstellung zu dem beinahe gleichzeitigen Kupferstich: Hieronymus im Gehäus.

J. E. Hofmann.

Montagnana, Massimo: Nicolò Tartaglia quattro secoli dopo la sua morte. Archimede 10, 135—139 (1958).

Gedränzte Skizze des Lebens und Wirkens.

J. E. Hofmann.

Truesdell, C.: Neuere Anschauungen über die Geschichte der allgemeinen Mechanik. Z. angew. Math. Mech. 38, 148—157 (1958).

Während Galilei und Newton im XVII. Jahrh. „nur“ die Punktmechanik

begründeten, ist erst im XVIII. Jahrh. die Mechanik der Kontinua entstanden (Clairaut, d'Alembert, Daniel I. und Johann I. Bernoulli, Euler). Verf. polemisiert gegen die landläufige Unterschätzung der Leistungen dieses Jahrhunderts in der Hydromechanik und Elastizitätstheorie, das er merkwürdigerweise mit „Barockzeit“ bezeichnet. Den Höhepunkt dieser „rationalen Mechanik“, die weder analytischen Formalismus noch bloße Näherungen für experimentelle Befunde, sondern ein „Feldmodell“ erstrebt, bildet Euler. 1752 verallgemeinert er mit

$$(1) \quad dF_x = a_x dM, \quad dF_y = a_y dM, \quad dF_z = a_z dM$$

(dF die auf das Massenelement (im Stieltjesschen Sinne!) dM wirkende Kraft, a die Beschleunigung) das Newtonsche Impulsgesetz von 1687, welches nur für Massenpunkte formuliert war. Erst 1775 fand Euler das Drehimpulsgesetz

$$(2) \quad dL_x = (y a_z - z a_y) dM, \quad dL_y = (z a_x - x a_z) dM, \quad dL_z = (x a_y - y a_x) dM$$

als zweites Fundamentalgesetz der Mechanik. In der Zwischenzeit mußten Euler, d'Alembert und Lagrange mittels besonderer Kunstgriffe aus (1) allein die allgemeinen Gleichungen (Kreisgleichungen) für den starren Körper gewinnen. Nachdem in Clairauts „Figure de la Terre“ (1743) erstmals ein allgemeines Vektorfeld mit Potentialbegriff und Theorie der Niveaulächen aufgetreten war, von Daniel Bernoulli (Hydrodynamica, 1738) als Erstem erkannt wurde, daß Kräfte und Geschwindigkeiten einer bewegten Flüssigkeit gleichzeitig bestimmt werden müssen — was ihm in einem Spezialfall auszuführen gelang — und Johann Bernoulli erstmals explizit (zwischen 1738 und 1740) die Gleichung für den „inneren Druck“ (ρ =Dichte)

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{const.}$$

geliefert hatte, während d'Alembert in seinem Traktat (1752) über die Flüssigkeiten die erste mathematische Darstellung eines Geschwindigkeitsfeldes gab, konnte Euler von 1752 bis 1755 den Begriff des Flüssigkeitsdruckes endgültig entwickeln und mit seinem „Schnittprinzip“ (Äquivalenz des Normaldruckes p auf eine geschlossene Fläche S innerhalb der Flüssigkeit mit der Kraftwirkung der Flüssigkeit im Außenraum von S auf S) die Grundgleichungen der idealen Hydromechanik (f = Volumkraft) (3) $\rho a_k = -p_{,k} + \rho f_k$ gewinnen. Cauchy verallgemeinerte dieses „Schnittprinzip“ 1822, indem er den hydrostatischen Druck p durch einen allgemeinen Spannungsvektor $t_{(n)}^k$, dessen Richtung willkürlich ist, ersetzte. Dann gibt es (nach den Eulerschen Kraftgesetzen) einen Spannungstensor t^{km} derart, daß $t_{(n)}^k = t^{km} n_m$ ist (n_m = Einheitsnormale der Schnittfläche). Damit gewinnt Cauchy aus (3) die allgemeinen Feldgleichungen der kontinuierlichen Medien (4) $t_{,m}^{km} + \rho f^k = \rho a^k$, womit die Elastizitätstheorie des XIX. Jahrhunderts begründet ist.

J. Fleckenstein.

Woodbury, Robert S.: The first epicycloidal gear teeth. *Isis* 49, 375—377 (1958).

Simonart, Fernand: Sophie Germain (1776—1831). *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. 43, 942—957 (1957).

Rychlík, Karel: Cauchy's Schrift „Mémoire sur la dispersion de la lumière“ herausgegeben während seines Aufenthaltes in Prag durch die Königliche böhmische Gesellschaft der Wissenschaften. *Czechosl. math. J.* 8 (83), 619—631, russ. Zusammenfassg. 631—632 (1958).

Brun, Viggo and Børge Jessen: A letter by Niels Henrik Abel from his youth. *Nordisk mat. Tidskrift* 6, 21—24, engl. Zusammenfassg. S. 56 (1958) [Norwegisch].

The letter, hitherto unpublished, was discovered in Copenhagen 1955. It was written in Christiania on Aug. (or probably Sept.) 12, 1823, to Abel's friend Frederik Christian Olsen in Copenhagen. The letter contains nothing of mathematical interest.

Aus der engl. Zusammenfassg.

Pioniere der Flugwissenschaften. *Z. Flugwiss.* 6, 364—372 (1958).

Picone, M.: Commemorazione del Socio Guido Ascoli. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 24, 614—625 (1958).

Mit Schriftenverzeichnis.

Kármán, Theodore von: William Frederick Durand, 1859—1958: A tribute. J. Aero-Space Sci. 25, 665—666 (1958).

Géhéniau, Jules: Einstein: L'homme et son oeuvre vue dans l'actualité scientifique. Mém. Publ. Soc. Sci. Arts Lettr. Hainaut 72, 13—22 (1958).

The list of works of P. Erdős, winner of the Kossuth-prize in 1958. Mat. Lapok 9, 136—147 (1957) [Ungarisch].

Fichera, Gaetano: La vita matematica di Luigi Fantappiè. Conferenze Sem. Mat. Univ. Bari 32, 24 p. (1957).

Mit Schriftenverzeichnis.

The list of the papers of the late M. Fekete. Mat. Lapok 9, 1—15 (1958) [Ungarisch].

Boyer, Carl B.: Jekuthiel Ginsburg (1889—1957). Isis 49, 335—336 (1958).

Gran, M. F.: Miguel Angel Maseda y Méndez. Revista Soc. Cubana Ci. fis. mat. 4, 45—48 (1957) [Spanisch].

Tarján, Rezső: The work of J. von Neumann concerning electronic computing machines. Mat. Lapok 9, 6—18 (1958) [Ungarisch].

Alan Robson. Math. Gaz. 42, 203—204 (1958).

Ayuso, Arturo: Bertrand Russell. Gac. mat., Madrid 10, 71—75 (1958) [Spanisch].

Published mathematical works up to date of the editor Hiroshi Sasayama. J. spatial Math. Sasayama Res. Room 1, 188—190 (1958).

Brun, Viggo: Carl Störmer in memoriam. Acta math. 100, I—VII (1958).

Mit Schriftenverzeichnis.

● **Gaňšin, V. N. und N. N. Bol'sakov:** Fedor Alekseevič Studskij, Gelehrter und Geodät. [Fedor Alekseevič Studskij, učenyj geodezist.] Verlag für geodätische Literatur 1957. 156 S. R. 3,80 [Russisch].

Bompiani, Enrico: Wilhelm Süss. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 13, 464 (1958).

Babuška, Ivo, Karel Havlíček und František Nožička: Prof. Dr. František Vycichlo in memoriam. Časopis Mat. 83, 374—387 (1958) [Tschechisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Murata, Tamotsu: French empiricism. I: One of the studies of the foundations of mathematics. Commentarii math. Univ. Sancti Pauli 6, 93—114 (1958).

The author introduces his paper as an historical and critical outline of french empiricism. He observes that „french empiricism is not playing so important a part in present-day mathematics as was seen in its early days. In such a situation there must be an appropriate reason which might serve to aid us in considering the foundations of mathematics ourselves — the very aim of our present treatment“. (Recently M. Kondô has taken up the study of namable sets.) The author has the intention to find out „What sorts of science, what areas of science, did the french empiricists consider to be „mathematics““. This first paper discusses accurately (as far as it goes) Borel's Leçons sur la théorie des fonctions. Apparently the author is unaware of P. Bockstaele's discussion of the intuitionism of the french mathematicians (Verhndl. Vlaamse Acad. Wet., Lett. Kunsten, Kl. Wet. 11, 5—123 (1949)) which may be useful to him and which — though itself not quite satisfying — is not surpassed by this first paper.

B. van Rootselaar.

● **Wright, Georg Henrik von: Logical studies.** (International Library of Psychology, Philosophy, and Scientific Method.) London: Routledge and Kegan Paul, Ltd. 1957. IX, 195 p. 28 s. net.

Dieser Band enthält schon früher veröffentlichte (aber jetzt revidierte und teilweise wesentlich erweiterte) Abhandlungen über „logical truth“ und modale Logik sowie zwei neue Arbeiten über Konditionalaussagen und über den Begriff der logischen Folge („entailment“). Wer an diese letzteren Betrachtungen vom Standpunkt der modernen Metalogik herangeht, wird dem Verf. wohl kaum gerecht werden können. Denn offensichtlich ist es nicht seine Absicht, seine Ausführungen auf eine definitorische oder axiomatische Festlegung zu fundieren. Und es könnte ja als Grundlage z. B. auch der Sprachgebrauch oder die „intuitive“ Auffassung der einschlägigen Begriffe gewählt werden; es ist jedoch zu bedauern daß eine deutliche Angabe der methodischen Grundlage fehlt. Trotzdem möchte ich das Studium des Buches, das in vielen Einzelheiten den Scharfsinn des Verf. beweist, empfehlen. — Zu bescheiden ist der Verf. wohl, wo er (S. 45, N. 2) angibt, der von ihm gelöste Spezialfall des Entscheidungsproblems sei ein Spezialfall eines schon früher von anderen gelösten allgemeineren Problems; denn die von Ackermann angegebene Reduktion des von Wrightschen auf ein von Gödel, Kalmár und Schütte behandeltes Problem ist keineswegs trivial.

E. W. Beth.

Cuzzler, Otto: Appunti sulla logica e la logistica. Periodico Mat., IV. Ser. 36, 221—238 (1958).

Behmann, Heinrich: Ein logischer Abakus. Arch. math. Logik Grundlagenforsch. 4, 42—52 (1958).

Es wird ein Abakus beschrieben, mit Hilfe dessen man für Aussageformen, die nicht zu viel Aussagenvariable enthalten (etwa bis zu vier) und in der konjunktiven Normalform gegeben sind, die einfachste konjunktive Normalform finden kann. Ebenso kann er dazu dienen, die gleiche Aufgabe für die disjunktive Normalform zu lösen, und kann auch für entsprechende einfache Aufgaben des Klassenkalküls verwendet werden.

W. Ackermann.

Schröter, Karl: Eine Umformung des Heytingschen Axiomensystems für den intuitionistischen Aussagenkalkül. Z. math. Logik Grundl. Math. 3, 18—29 (1957).

This article concerns the set of axioms of the Münster school for the intuitionistic propositional calculus; the set is arranged into four groups, of which the first contains only the connective implication, the second only implication and conjunction, the third only implication and alternation, and the fourth implication and negation. It is essentially the set for which Wajsberg (this Zbl. 19, 385) gave a decision procedure and a proof that a derivable formula is derivable from the groups referring to just those connectives occurring in the formula. The author presents in detail a proof of the interdeducibility of this set with that of Heyting. In addition to some initial historical remarks, there are many helpful discussions of a heuristic nature throughout the long chains of theorems.

T. Hailperin.

Iséki, Kiyoshi: On the cut operation in Gentzen calculi. II. Proc. Japan Acad. 33, 98—99 (1957).

Verf. zeigt, daß die Schnittregel in den Systemen *LK* und *LJ* von Gentzen mit zwei Schlußregeln äquivalent ist, nämlich mit (1) einer verallgemeinerten Abtrennungsregel für die \supset -Verknüpfung und (2) dem Spezialfall der Schnittregel mit der leeren Sequenz als Konklusion. Hiermit wird eine frühere Note des Verf. (s. dies. Zbl. 73, 7) korrigiert, in der nur die Regel (1) als äquivalent zur Schnittregel angegeben war. — Bemerkung des Ref.: Die frühere Note enthält zwar einen lückenhaften Beweis, aber doch richtige Sätze. Die Schlußregel (2) ist nämlich entbehrlich, weil ihre Prämissen niemals zugleich herleitbar sind.

Kurt Schütte.

Beth, E. W.: Remarks on elementary predicate logic. *Nieuw Arch. Wiskunde*, III. Ser. 5, 58—62 (1957).

Bemerkungen des Verf. zur Vereinfachung prädikatenlogischer Untersuchungen, die in verschiedenen Arbeiten veröffentlicht sind, werden hier zusammenfassend wiedergegeben und durch einige neue Punkte ergänzt. U. a. wird auf Systeme hingewiesen, in denen sich der Vollständigkeitssatz und geeignete Fassungen des „Hauptsatzes“, des „erweiterten Hauptsatzes“ und des „Teilformelsatzes“ von Gentzen leicht beweisen lassen. Eine wichtige Rolle spielt dabei die vom Verf. aufgezeigte Beziehung zwischen semantischen Tafeln und formalen Ableitungen. Die Methoden lassen sich teilweise auch auf die intuitionistische Logik übertragen. So zeigt die Konstruktion eines Baumes, wie sich eine klassische Schlußregel als intuitionistisch unableitbar nachweisen läßt.

Kurt Schütte.

Schmidt, Arnold: Die Gesamtheit der idempotenten implikativen Modalitätenstrukturen. *Arch. math. Logik Grundlagenforsch.* 3, 29—49 (1957).

Die Arbeit stellt die Fortführung und den Abschluß einer früheren dar (s. dies. Zbl. 71. 6), die der Untersuchung der Iteration der Modalitäten gewidmet war, wobei der begriffliche Rahmen außer den Modalitäten selbst nur noch Implikation und Gleichheit umspannt. Wie bei seinen früheren Arbeiten beschränkt sich Verf. auf die Modalitäteniterationen, die der Idempotenz der Möglichkeit und Notwendigkeit genügen. Die bereits in der oben zitierten Arbeit aufgestellte Behauptung „Es gibt nur endlich viele solcher implikativen Modalitätenstrukturen und jede ist (in einem bestimmten Sinne) implikativ vollständig“ wird hier bewiesen. Die Vorhandenen Modalitätenstrukturen werden konkret angegeben, ferner werden Regeln genannt, mit denen sich das Rechnen mit den Modalitäten auf ein Mindestmaß reduziert; weiter wird dafür gesorgt, daß der Zusammenhang zwischen den einzelnen Modalitätenstrukturen deutlich erkennbar wird.

W. Ackermann.

Anderson, Alan Ross: Independent axiom schemata for von Wright's *M*. *J. symbolic Logic* 22, 241—244 (1957).

Durch eine Modifizierung der Axiomatisierung, die Simons (dies. Zbl. 52, 11) für modalitätenlogische Systeme durchgeführt hat, wird ein Axiomensystem M^* gebildet, das mit von Wright's System M (An essay in modal logic, s. dies. Zbl. 43, 7) äquivalent ist. Das System M^* besteht aus 6 unabhängigen Axiomenschemata und einer Abtrennungsregel als einziger Schlußregel. Die Äquivalenz von M mit M^* und die gegenseitige Unabhängigkeit der Axiomenschemata von M^* werden bewiesen.

Kurt Schütte.

Kanger, Stig: The morning star paradox. *Theoria* 23, 1—11 (1957).

Die betrachtete Paradoxie der Modalitätenlogik ergibt sich aus den beiden Prämissen: 1. Der Morgenstern ist gleich dem Abendstern. 2. Diese Sterne sind nicht notwendig gleich. Das Negat der 1. Prämisse folgt aus der 2. Prämisse mit der Gleichheitsregel, nach der gleiche Gegenstände in allen Eigenschaften übereinstimmen. Zur Auflösung dieser Paradoxie benutzt Verf. eine formale Sprache mit einer bestimmten Wertung. Dabei zeigt sich, daß die Gleichheitsregel nicht uneingeschränkt auf modale Aussagen angewandt werden darf. — Außerdem werden die Behandlungen der Morgenstern-Paradoxie von Quine und von Carnap, denen andere Interpretationen der Modalitäten zugrunde liegen, diskutiert und einige weitere Modalitäten-Paradoxien besprochen.

Kurt Schütte.

Thomas, Ivo: Eulerian syllogistic. *J. symbolic Logic* 22, 15—16 (1957).

Verf. bezieht sich auf das Faris-System der Eulerschen Syllogistik (dies. Zbl. 66, 255) und zeigt: 1. Die vier Grundfunktoren lassen sich auf drei reduzieren. 2. Mit den 10 Gültigkeitsaxiomen von Faris ist ein einfacheres System von 9 Axiomen und auch ein anderes System von nur 6 Axiomen äquivalent. Beide Systeme bestehen aus unabhängigen Axiomen. 3. Mit geeigneten Definitionen lassen sich die Aristotelische und die Eulersche Syllogistik ineinander überführen. Hiermit wird

das tabellarische Entscheidungsverfahren, das Thomas für die Aristotelische Syllogistik angegeben hat, auch auf die Eulersche Syllogistik anwendbar.

Kurt Schütte.

Henkin, Leon: A generalization of the concept of ω -completeness. J. symbolic Logic 22, 1—14 (1957).

Γ sei eine nicht-leere Menge von Individuenkonstanten eines formalen Systems F im Rahmen der Prädikatenlogik 1. Ordnung. Das System F heiße „ Γ -vollständig“, wenn zu jeder Formel $B(x)$, die x als einzige freie Individuenvariable enthält, die Allformel $(x) B(x)$ immer dann in F hergeleitet werden kann, wenn $B(\lambda)$ für jedes λ aus Γ in F herleitbar ist. Diesem syntaktischen Vollständigkeitsbegriff wird folgender semantische Begriff gegenübergestellt: F heiße „ Γ -gesättigt“, wenn jede Formel von F , die keine freien Variablen enthält und in allen Γ -Modellen von F gültig ist, in F hergeleitet werden kann. (Von einem Γ -Modell des Systems F wird verlangt, daß es nur Konstante aus Γ als Elemente enthält und allen Axiomen von F genügt.) Für diese Begriffe wird bewiesen: 1. Jedes Γ -gesättigte System ist Γ -vollständig. 2. Ein Γ -vollständiges System F ist zugleich Γ -gesättigt, wenn entweder Γ endlich ist oder F nur abzählbar viele Grundsymbole enthält. 3. Es gibt Γ -vollständige Systeme, die nicht Γ -gesättigt sind. Die Γ -Vollständigkeit ist also für Systeme mit überabzählbar vielen Grundsymbolen schwächer als die Γ -Sättigung. Um einen syntaktischen Begriff zu erhalten, der den semantischen Begriff der Γ -Sättigung allgemein erfaßt, wird definiert: Ein System F heiße „stark Γ -vollständig“, wenn es zu jeder Formel A , die keine freien Variablen enthält, und zu jeder Formel $B(x)$, die nur x als freie Variable enthält, ein Element $x_{A,B}$ aus Γ gibt, so daß für jedes A die Menge aller Formeln $(A \wedge (\exists x) B(x)) \subset B(x_{A,B})$ widerspruchsfrei in F ist. Hierzu wird bewiesen: Ein System F ist genau dann stark Γ -vollständig, wenn es widerspruchsfrei und Γ -gesättigt ist. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Γ -Vollständigkeit und die Γ -Widerspruchsfreiheit, die Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 56, 11) eingeführt und untersucht hat, nur teilweise in einer gewissen dualen Beziehung zueinander stehen.

Kurt Schütte.

Mostowski, A.: On recursive models of formalised arithmetic. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 705—710 (1957).

Die formalen arithmetischen Systeme, die hier untersucht werden, entstehen aus dem Prädikatenkalkül 1. Ordnung durch Hinzunahme des Gleichheitssymbols und einer abzählbaren Folge von Zeichen q_0, q_1, q_2, \dots für primitiv-rekursive Funktionen. Dabei sollen q_0, \dots, q_3 die einstelligen Funktionen 0 und 1 und die zweistelligen Funktionen $+$ und $-$ bezeichnen. Die betrachtete Funktionenfolge soll „abgeschlossen“ sein, d. h. sie soll alle Funktionen enthalten, die für ihre Definitionsgleichungen gebraucht werden. Das formale arithmetische System heißt „adäquat“ zu den betreffenden Funktionen, wenn alle prädikatenlogisch-wahren Formeln und die grundlegenden mathematischen Formeln für die betrachteten Funktionen in dem System herleitbar sind. — Ein abzählbares Pseudomodell für das arithmetische System besteht aus einer Folge $Z = (z_0, z_1, \dots)$ von verschiedenen Elementen mit einer binären Relation \approx auf Z , die dem Gleichheitssymbol zugeordnet wird, und mit Funktionen M_0, M_1, \dots auf Z mit Werten in Z . Die Funktionen M_i sollen entsprechende Argumentstellen wie die q_i haben und diesen Symbolen zugeordnet werden. Das Pseudomodell heißt ein „Modell“, wenn bei dieser Zuordnung jeder herleitbaren Formel des Systems ein richtiger Satz entspricht. Aus jedem Modell M eines adäquaten Systems erhält man durch Übergang zu den Äquivalenzklassen von \approx ein Modell M/\approx des betreffenden Systems. Ein Pseudomodell heißt „rekursiv für q_0, \dots, q_n “, wenn die Mengen aller (k, l) und (k, l, \dots, u) , für die $z_k \approx z_l$ bzw. $z_k \approx M_i(z_l, \dots, z_u)$ mit $0 \leq i \leq n$ gilt, rekursiv sind. — Der grundlegende Satz, der hier bewiesen wird, lautet: Es gibt primitiv-rekursive Funktionen f_1, \dots, f_9 mit der Eigenschaft: Ist S ein arithmetisches System, das

adäquat zu einer abgeschlossenen Funktionenfolge ist, zu denen diese Funktionen gehören, und M ein abzählbares Modell von S , das für die zugehörigen Funktionssymbole q_0, \dots, q_9 rekursiv ist, so ist M/\approx isomorph zu dem klassischen Modell der Arithmetik. — Dieser Satz wurde, wie Verf. erklärt, unabhängig auch zugleich von Kreisel bewiesen. Zum Beweis werden hier die von Kleene angegebenen disjunkten rekursiv-aufzählbaren Mengen benutzt, die nicht durch rekursive Mengen trennbar sind (dies. Zbl. 38, 31). — Geht man nun von Funktionen zu entsprechenden Relationen über, so erhält man mit Hilfe des bewiesenen Satzes eine Formel A^* ohne Funktionszeichen mit der Eigenschaft: Ist M^* ein rekursiv-aufzählbares Modell von A^* , so ist M^*/\approx isomorph zum klassischen Modell. Eine bemerkenswerte Folgerung aus diesem Satz besagt: Sind V' bzw. V'' die Mengen der Gödel-Nummern aller prädikatenlogischen Formeln 1. Ordnung, die in allen rekursiv-aufzählbaren bzw. primitiv-rekursiven Modellen gelten, und ist $V' \subseteq Z \subseteq V''$, so ist Z nicht arithmetisch definierbar. Hiermit wird eine von R. L. Vaught aufgeworfene Frage beantwortet. Verf. schließt mit der offenen Frage, ob es nicht-klassische rekursive Modelle für das System S_0 gibt, das nur die Grundbegriffe $0, 1, +, \times, =$ enthält und alle wahren arithmetischen Sätze als Axiome hat. *Kurt Schütte.*

Friedberg, Richard: Un contre-exemple relatif aux fonctionnelles récurrentes. *C. r. Acad. Sci., Paris* 247, 852—854 (1958).

Verf. konstruiert eine rekursiv-aufzählbare Menge R mit den beiden Eigenschaften: 1. Wenn eine Gödelnummer einer rekursiven Funktion q zu R gehört, so gehören alle Gödelnummern von q zu R ; 2. Es gibt kein partiell-rekursives Funktional Ψ , so daß der Definitionsbereich von Ψ von den rekursiven Funktionen genau diejenigen enthält, deren Gödelnummern zu R gehören. — Mittels dieser Menge R gelingt Verf. dann in einfacher Weise die Konstruktion einer effektiven Operation im Sinne von Myhill-Shepherdson [*Z. math. Logik Grundl. Math.* 1, 310—317 (1955)], die auf der Menge aller rekursiven Funktionen erklärt ist und welche kein partiell-rekursives Funktional ist. Damit ist eine Frage von Myhill-Shepherdson (l. c.) negativ beantwortet. *E. Burger.*

Friedman, Joyce: Some results in Church's restricted recursive arithmetic. *J. symbolic Logic* 22, 337—342 (1958).

Church hat in einem Referat [*J. symbolic Logic* 20, 286 (1955)] über eine Arbeit von E. C. Berkeley [*The Scientific Monthly* 78, 232—242 (1954)] ein formales System einer „restricted recursive arithmetic“ für die Analyse von elektrischen Netzwerken mit Zeit-Lags vorgeschlagen. Es handelt sich um einen quantifikatorfreien Funktionenkalkül mit Individuenvariablen (deren Werte als Zeitmomente $0, 1, 2, \dots$ aufgefaßt werden können) und einstelligen Funktionssymbolen (von denen jedes sich auf eine bestimmte Komponente des Netzwerkes bezieht und von ihr aussagt, ob sie offen oder geschlossen, in Betrieb oder nicht in Betrieb usw. ist). Weiter können neue Funktionssymbole durch simultane Rekursionen aus den alten eingeführt werden. — Verf. betrachtet den Fall der Formeln, die nur eine Individuenvariable t enthalten, und entwickelt für diese ein Entscheidungsverfahren für Allgemeingültigkeit. Ferner zeigt er unter Benutzung dieses Entscheidungsverfahrens, daß die von Church angegebenen Ableitungsregeln zur Herleitung aller allgemeingültigen Formeln genügen. *E. Burger.*

Algebra und Zahlentheorie.

● **Derwidié, L.:** Introduction à l'algèbre supérieure et au calcul numérique algébrique. Paris: Masson et Cie.; Liège: Sciences et Lettres 1957. 431 p. fr. 6000.

Dieses Buch, das sehr klar geschrieben ist, möchte sowohl in die Theorie als auch in die Anwendungen der Algebra, insbesondere die numerischen Lösungsmethoden, einführen. Es nimmt also eine Stelle ein zwischen elementarer Algebra und den

rein theoretisch geschriebenen Büchern über höhere Algebra und numerische Analysis. Man findet hier die allgemeine Theorie der Gleichungen und der Systeme von Gleichungen, Eliminationstheorie, Matrizenrechnung und die allgemeine Theorie der quadratischen Matrizen, die wichtigsten Stabilitätskriterien, die Grundbegriffe der Gruppentheorie und eine Einführung in die moderne Algebra. Sehr viele Beispiele sind vollständig ausgearbeitet und viele Aufgaben sind jedem Kapitel beigefügt. Da das Buch sich an Anfänger richtet, ist es verständlich, daß manchmal nicht die „beste Methode“ gegeben wird. So z. B. bei der Berechnung der Quadratwurzel, die nur angibt, wie man mit $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ eine einfache Methode erhalten kann, während andere Methoden, die schon eine gewisse Übung des Rechners voraussetzen würden, nicht behandelt werden. Andererseits werden verschiedene goniometrische Lösungen der kubischen Gleichung ausführlich dargestellt, obwohl man diese wohl nie für eine einzige Gleichung verwenden würde, so daß diese Methoden nur für den Rechner, der viele kubischen Gleichungen nacheinander zu lösen hat, von Wert sein könnten. Ebenso findet man hier wieder die „unvollkommenen Methoden“ [Rolle, Descartes, Budan, Fourier] zur Berechnung der Wurzelzahl, die seit dem Sturmschen exakten Satze aus den „theoretischen Büchern“ fast verschwunden sind. Wie jeder Erstdruck enthält das Buch ziemlich viele Druckfehler, die man meist beim Nachrechnen leicht verbessert, und nur an wenigen Stellen ist dadurch der Text ganz verstümmelt. Man kann in diesem Buch eine wesentliche Bereicherung und Ergänzung der französischen Literatur auf diesem Gebiete sehen.

E. M. Bruins.

Kombinatorik:

Miksa, F. L., L. Moser and M. Wyman: *Restricted partitions of finite sets.* Canadian math. Bull. 1, 87—96 (1958).

Les AA. traitent le problème général: de combien de manières n objets distincts peuvent-ils être répartis dans un nombre indéfini de tiroirs indistincts, lorsque peuvent entrer par tiroir au plus r objets? Des cas particuliers de ce problème ont déjà été traités: les AA. donnent des références pour ces cas. Ils établissent plusieurs formules de récurrence pour le nombre en question $G_{n,r}$ et une fonction génératrice, certaines congruences utiles pour le contrôle des tables et une formule asymptotique pour $G_{n,r}$ valable pour r fixé et n tendant à l'infini.

S. Bays.

Puig Adam, P.: *Mathematische Strukturen bei einem Solitärspiel.* Gac. mat., Madrid 9, 14—19 (1957) [Spanisch].

L'A. examine un jeu consistant à déplacer des jetons parallèlement aux axes de symétrie sur un damier de 33 cases en forme de croix. Il décrit plusieurs solutions et montre comment les préoccupations de symétrie (de l'échiquier) et de réversibilité de la stratégie suivie peuvent guider le joueur dans la construction de sa solution.

A. Sade.

Holladay, John C.: *Matrix nim.* Amer. math. Monthly 65, 107—109 (1958).

Analyse folgender Verallgemeinerung des Spieles Nim: Bei einer rechteckigen Anordnung von nichtnegativen ganzen Zahlen zu genau n Spalten und einer endlichen Anzahl von Zeilen gilt als Zug eine beliebige Verringerung entweder von Zahlen aus ein und derselben Zeile oder von Zahlen aus irgendwelchen $n - 1$ Spalten: wer zuletzt zieht, hat gewonnen.

R. Sprague.

Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

Varini, Bruno: *Aspetto tensoriale della teoria dei determinanti.* Archimede 10, 71—80 (1958).

Eine frühere Arbeit (s. dies. Zbl. 79, 13) fortsetzend gibt Verf. hier eine vereinfachte Darstellung und Beweise der elementaren Sätze über n -reihige Determinanten

(Det.), wobei die Symbole $e^{s_1 s_2 \dots s_n} = e_{s_1 s_2 \dots s_n} = 0$ bei mindestens einem Paar gleicher Indizes bzw. ± 1 , je nachdem s_1, s_2, \dots, s_n eine gerade oder ungerade Permutation von $1, 2, \dots, n$ ist, sowie die Kroneckerschen Symbole $\delta_{r_1 r_2 \dots r_n}^{s_1 s_2 \dots s_n} = e^{s_1 s_2 \dots s_n} e_{r_1 r_2 \dots r_n}$ Verwendung finden. Es werden behandelt: Multiplikationssatz, orthogonale Det., Darstellung des algebraischen Komplements eines Elementes, Entwicklung der Det. nach den Elementen einer Reihe; reziproke und adjungierte Det.; symmetrische Det. und ihre reziproke; schiefssymmetrische Det. und ihre adjungierte; Cramersche Regel.

E. Schönhardt.

Stojaković, Mirko: Quelques remarques sur les hypermatrices. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **11**, 33—42 (1958).

Es werden einige grundlegende bekannte Sätze über Determinante und Adjungierte von Hypermatrizen über kommutativen Matrizen neu auf rein algebraischem Wege bewiesen.

R. Zurmühl.

Stojaković, Mirko: Solution du problème d'inversion d'une classe importante de matrices. C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 1133—1135 (1958).

Für die Kehrmatrix der Vandermondeschen Matrix $V_n = (v_{ij}) = (x_{i-1}^{j-1})$ ($i, j = 1, 2, \dots, n+1$) wird mit Hilfe der elementarsymmetrischen Funktionen sowohl eine einfache explizite Formel als auch eine solche zur rekursiven Berechnung von V_{n+1}^{-1} aus bekanntem V_n^{-1} angegeben.

R. Zurmühl.

Macon, N. and A. Spitzbart: Inverses of Vandermonde matrices. Amer. math. Monthly **65**, 95—100 (1958).

In a recent paper (cf. this Zbl. **78**, 304) one finds explicit formulas for the derivatives of a polynomial $y = f(x)$ of degree n in terms of its values $y_i = f(x_i)$ at $n+1$ points defined by $x_i = x_0 + i h$, ($i = 0, \dots, n$). These results are used here to invert Vandermonde matrices where the x_i are distinct and different from zero.

E. J. Nyström.

Fine, N. J. and I. N. Herstein: The probability that a matrix be nilpotent. Illinois J. Math. **2**, 499—504 (1958).

Folgende Sätze werden bewiesen: (1) Von den p^{kn^2} n -reihigen Matrizen über $GF(p^k)$ sind genau $p^{kn(n-1)}$ nilpotent. (2) Ist $m = \prod_{i=1}^r p_i^{k_i}$ ($k_i > 0$), so sind von den m^{n^2} n -reihigen Matrizen über dem Restklassenring mod m genau $\prod_{i=1}^r p_i^{n(k_i-1)}$ nilpotent.

P. Dembowski.

Takeno, Hyōitirō: Contributions to the theory of sedenions. I, II. Tensor, n. Ser. **7**, 143—159, 160—172 (1957).

Als eine Basis im linearen Raum der (4,4)-Matrizen („Sedenionen“) lassen sich 16 unabhängige der folgenden Matrizen wählen: I , die fünf weiteren Dirac-Matrizen γ_λ ($\lambda = 1, \dots, 5$) mit den Relationen $\gamma_\lambda \gamma_\mu = \delta_{\lambda\mu} I$ und $\prod \gamma_\lambda = I$, und die Matrizen $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{[\lambda} \gamma_{\beta]}$. Jede (4,4)-Matrix ist darstellbar in der Form

$$(*) \quad S = \frac{1}{2} s^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} + s^\alpha \gamma_\alpha + s I \quad \text{mit} \quad s^{\alpha\beta} + s^{\beta\alpha} = 0.$$

Der Verf. untersucht eine Anzahl von elementar-algebraischen Eigenschaften, insbesondere von solchen S , in deren Darstellung (*) spezielle Koeffizienten verschwinden. Er diskutiert dann die Lösungen von $S^2 = \lambda I$ und von $S^2 = \lambda \gamma_5$ ($\gamma_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$), wobei die Elemente hier für die entsprechenden (2,2)-Matrizen stehen.

D. Laugwitz.

Cherubino, Salvatore: Sulla teoria delle matrici. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **13**, 7—10 (1958).

Aus einem Brief an Picone: Bemerkungen über 1. Die notwendige Vereinheitlichung der Schreibweise im Matrizenkalkül. 2. Körper und Ringe, in denen nur ein schwächerer Satz gilt als der Eigenwertsatz von Sylvester. 3. Holomorphe

(Verf., 1937) und totalderivierbare (oder monogene; Spampinato) Matrixfunktionen bei Vorhandensein auch der transponiert-konjugierten Matrizen und der Einheitsmatrix in der betrachteten Matrizenmenge mit komplexen Elementen.

I. Paasche.

Picone, Mauro: Sulla teoria delle matrici nel corpo complesso. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 13, 1—6 (1958).

Die zur Matrix $a = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,m}$ gehörige nichtnegative Größe $|a| = \left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right|^{1/2}$ (also $\neq \det a$) wird euklidischer Modul von a genannt. Für ein Matrizenprodukt gilt $|ab| \leq |a| |b|$, für eine Matrizensumme $||a| + |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$. Im Falle $m = n$ nebst $ax = \mu x$ gilt für alle Eigenwerte μ von a die Abschätzung $|\mu| \leq |a|$ (s. u.). All dies gilt auch für $|a|_d = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ und $|a|_s = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ statt $|a|$, wie z. T. schon Frobenius bemerkte. Die Besselsche Ungleichung für Vektoren wird auf Matrizen ausgedehnt. Für die Vielfachheit r eines Eigenwertes μ wird eine obere Schranke angegeben: $r \leq |a|^2 |\mu|^{-2}$ (s. o.). Schließlich wird der Gültigkeitsbereich des Satzes von Sylvester erweitert. (Aus einem Brief an Cherubino).

I. Paasche.

Marcus, M., B. N. Moys and R. Westwick: Some extreme value results for indefinite Hermitian matrices. II. Illinois J. Math. 2, 408—414 (1958).

Fortsetzung der gleichnamigen Arbeit der Verf. (dies. Zbl. 79, 20). Es sei H eine indefinite Hermiteische Transformation des unitären n -dimensionalen Raumes U_n in sich mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Weiter sei $E_r(a_1, \dots, a_k)$ die r -te elementarsymmetrische Funktion der Zahlen a_1, \dots, a_k ($1 \leq r \leq k \leq n$) und $f(x_1, \dots, x_k) = E_r((H x_1, x_1), \dots, (H x_k, x_k))$. Die bekannten Resultate über die Extremwerte von f bei beliebigem k und $r = 1, 2$ werden verallgemeinert auf den Fall, daß r beliebig ist: Auf der Menge aller Orthonormalsysteme (x_1, \dots, x_k) des U_n besitzen das Maximum und das Minimum von f die Form $E_r(b_1, \dots, b_k)$ mit $b_{k_j+1} = \dots = b_{k_{j+1}} = (k_{j+1} - k_j)^{-1} \cdot (\mu_{k_j+1} + \dots + \mu_{k_{j+1}})$ für $j = 0, \dots, q-1$; dabei sind die k_j ganze Zahlen mit $0 = k_0 < \dots < k_q = k$, und μ_1, \dots, μ_k sind die ersten s und letzten $k-s$ Eigenwerte λ für ein s mit $0 \leq s \leq k$. Es folgen Sätze über die Lösbarkeit des Gleichungssystems $(H y_j, y_j) = b_j$ ($j = 1, \dots, k$) bei gegebenem H und geeigneten b_j .

H.-J. Kowalsky.

Kulik, Stephen: On the Laguerre method for separating the roots of algebraic equations. Proc. Amer. math. Soc. 8, 841—843 (1957).

Let $f = f(x) = 0$ be an algebraic equation of degree N with real roots and x an arbitrary real number. Laguerre [Oeuvres I (1898), pp. 101, 461] gave the proposition that there is at least one root of $f(x) = 0$ between u and v , which are any two numbers satisfying the relation $(u-x)(v-x)(f^2 - ff') + (u+v-2x)ff'' + Nf^2 = 0$. The following generalization of this relation is given here. Let D_n be evaluated by

$$D_n = f' D_{n-1} - f'' f D_{n-2}/2! + \dots + (-f)^{n-2} f^{(n-1)} D_1/(n-1)! + (-f)^{n-1} f^{(n)} D_0/(n-1)!,$$

$D_0 = 1$, where the second term will be $-f'' f$ when $n = 2$. If one fixes $x = a_i$, the solutions of the equations (A) $(u-x)(v-x) D_n + (u+v-2x) f D_{n-1} + f^2 D_{n-2} = 0$ coincide with the solutions of the equation (B) $\sum (u-a_i)(v-a_i)(x-a_i)^{-n} = 0$. If n is even and x an arbitrary real number, at least one root of $f(x) = 0$ lies between u and v which satisfy equation (B). Furthermore, if $|x-a_1| < |x-a_i|$, $i = 2, \dots, N$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = a$, where $u(n) \equiv u, v$ is any fixed real number, and $a = a_i$

represents any root of the equation $f(x) = 0$. Solving equation (A) for u , one obtains $u = x - f[(v-x) D_{n-1} + f D_{n-2}]/[(v-x) D_n + f D_{n-1}]$, $n = 4, 6, \dots$ and $a = x - \lim_{n \rightarrow \infty} f[(v-x) D_{n-1} + f D_{n-2}]/[(v-x) D_n + f D_{n-1}]$.

E. Frank.

Derwidué, L.: Sur le nombre des racines à partie réelle positive des équations algébriques. *Mathesis* 66, 144—151 (1957).

The author continues his study (this Zbl. 77, 246) on the roots of an algebraic equation with real coefficients. The author establishes a theorem on the number of roots with positive real parts [cf., for example, the theorems of E. Frank (this Zbl. 60, 53; 46, 425), and the work of E. J. Routh, *A treatise on the stability of a given state of motion*, London (1878), p. 74—81].

E. Frank.

Arista, Agostino: Risoluzione algebrica di $x^3 + p x + q = 0$ più vantaggiosa di quella di Tartaglia. *Giorn. Mat. Battaglini* 86 (V. Ser. 6), 122—126 (1958).

Nota didattica.

Erdős, P.: On the growth of the cyclotomic polynomial in the interval $(0, 1)$. *Proc. Glasgow math. Assoc.* 3, 102—104 (1957).

Suppose n is a positive integer greater than unity and $F_n(x)$ is the n -th cyclotomic polynomial. Let A_n be the largest absolute value of any coefficient of $F_n(x)$, let B_n be the maximum value taken on by $F_n(x)$ on the interval $[0, 1]$, and let C_n be the maximum value taken on by $F_n(x)$ on the disc $|x| \leq 1$. In a previous paper (this Zbl. 38, 10) the author has shown that there is a positive constant c such that

$$C_n > \exp \exp \{c \log n / \log \log n\}$$

for infinitely many values of n . Since $A_n < C_n \leq n A_n$, this is equivalent to the corresponding assertion for A_n . In the present paper the author gives a simpler proof of the more specific assertion that

$$(*) \quad B_n > \exp \exp \{c \log n / \log \log n\}$$

for infinitely many values of n , where c is a suitably chosen positive number. The values of n considered are products of a large number of very nearly equal primes and for these values of n the author investigates $F_n(x)$ at a carefully chosen value of x slightly less than $1 - n^{-1/2}$. (Since $F_n(0) = F_n(1) = 1$ if n has more than one prime factor, the maximum value of $F_n(x)$ on $[0, 1]$ occurs at an interior point of the interval.) The argument requires only elementary results on the distribution of prime numbers. Although the author does not calculate c explicitly, his proof will give $(*)$ for any c less than $\frac{1}{2} \log 2$, and a slight modification of the argument will give $(*)$ for any c less than $\frac{2}{7} \log 2$. The author believes that perhaps $(*)$ holds for any c less than $\log 2$, but that the present method of proof is not strong enough to give such a result. On the other hand, this would be as far as one could go, since, as the reviewer has remarked (cf. this Zbl. 35, 311), it is almost immediate that if $\varepsilon > 0$, then

$$B_n \leq C_n \leq n A_n < \exp \exp \{(1 + \varepsilon) (\log 2) \log n / \log \log n\}$$

for all large n .

P. T. Bateman.

Gruppentheorie:

●Bruck, Richard Hubert: A survey of binary systems. (*Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge. Heft 20.*) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1958. VII, 185 p. Steif geh. DM 36,—.

Le but de cet ouvrage est d'exposer les propriétés particulières aux ensembles sur lesquels une loi binaire a été définie. Un sujet aussi vaste ne pouvait pas être traité sans des sacrifices. Comme le dit l'A. dans son introduction, la théorie des groupes et celle des treillis peuvent être regardées comme étant en dehors du champ de cet aperçu. Mais pour chaque question (comme par exemple pour les quasi-groupes et les semi-groupes) ce sont toujours, semble-t-il, les concepts et les théorèmes les plus significatifs qui ont été choisis: pour le surplus, des références presque complètement exhaustives renvoient aux auteurs originaux. Si le propre d'une mauvaise définition est d'obliger le lecteur, après l'avoir lue, à chercher dans le

lexique, non plus un mot, mais dix nouveaux mots dont il ne comprend pas le sens. de sorte que, de mots en mots, il finit par être obligé de lire le livre tout entier, un mérite de cet ouvrage est de fournir au lecteur, sans recherches et du premier coup, grâce à l'index dressé par Artzy, la définition d'un concept quelconque ou le sens d'un symbole usuel en termes toujours directs, clairs et précis. Quant aux théorèmes, l'A. a adopté à leur sujet une attitude très franche et dont on ne peut que se féliciter: repoussant la cote mal taillée des démonstrations sténographiques incompréhensibles, ou bien il développe la preuve en détail et en toute clarté, ou bien il la supprime totalement, avec renvoi aux sources. Dans un travail embrassant un ensemble de notions aussi étendu il n'y avait malheureusement pas place pour des exemples et exercices nombreux, propres à donner au lecteur une vision plus claire et à lui permettre de se rendre compte qu'il a bien entendu la pensée de l'A. Mais, tel qu'il est, l'ouvrage constitue une somme très attrayante, d'une haute tenue et rendra d'appréciables services aussi bien à l'étudiant qu'au spécialiste averti. La bibliographie (16 + 15 + 424 titres), établie avec renvoi aux comptes rendus de Math. Rev., est aussi complète que possible; on peut seulement regretter que la référence aux analyses de Zbl. n'ait pas été indiquée. — I. Les généralités sur les ensembles munis d'une loi de composition n'occupent que les 23 premières pages, mais l'exposé fixe un vocabulaire et les vues les plus modernes sur les demi-groupoïdes libres, les quasigroupes, leur génération, leurs homomorphismes, les problèmes d'immersion et le concept de commutator-associator (engendré par tous les commutateurs et tous les associateurs) sont présentés. Le chapitre se termine par l'exposé de la théorie des plans projectifs libres, introduite par Marshall Hall, des problèmes non résolus qu'elle pose, et un aperçu sur les algèbres, les équivalences commutables et le problème des mots. Le chapitre II est consacré à la loi associative. Après avoir fait sommairement le point des connaissances actuelles sur les semi-groupes et les groupes, il ouvre des aperçus sur des systèmes plus particuliers: groupoïdes de Brandt (non partout définis), groupes polyadiques (Post), multi-groupes (où ab est un sous-ensemble), et se termine par l'étude des idéaux et par celle du semi-groupe des translations d'un groupoïde. Le chapitre III concerne l'isotopie ou transformation définie par trois applications $1 - 1. \xi, \eta, \zeta$, telles que $x y = z \Leftrightarrow (x \xi) \times (y \eta) = z \zeta$. L'A. résume ses travaux [Trans. Amer. math. Soc. 60, 245—354 (1946)] et ceux de quelques autres, il énumère les propriétés préservées par l'isotopie et celles qui ne sont pas conservées; il expose la connexion du concept d'isotopie avec la théorie des Gewebe (Blaschke). IV. La théorie, aujourd'hui classique, de l'homomorphisme dans les loops est largement développée, sur plus de 30 pages: diviseurs normaux, lemme de Zassenhaus, Th. de Jordan-Hölder-Schreier, travaux de R. Baer, de B. H. Neumann, endomorphismes, décomposition directe, loops hamiltoniens, loops avec automorphe transitif, cas des quasigroupes. Après une étude de la décomposition en cosets (V) et de la nilpotence dans les loops (VI) (sous-loop de Frattini, théorie de Hall, loops ordonnés), l'ouvrage se termine par deux chapitres très détaillés sur les loops de Moufang, ou loops satisfaisant à $(x y) (z x) = [x(y z)] x$, et les loops de Moufang commutatifs, constituant un vaste ensemble de résultats, qui prolonge et perfectionne le travail déjà très important publié par l'A. dans le tome 60 des Transactions. Page 58 (vii). lire: „tout quasigroupe, idempotent, totalement symétrique . . .”. Un très beau livre, que tout algébriste voudra avoir dans sa bibliothèque. A. Sade.

Munn, W. D.: Semigroups satisfying minimal conditions. Proc. Glasgow math. Assoc. 3, 145—152 (1957).

Es werden Halbgruppen S mit Minimalbedingung für Hauptlinksideale, Hauptrechtsideale bzw. Hauptideale untersucht (diese Bedingungen sind als M_l , M_r bzw. M , bezeichnet). Die drei Bedingungen sind i. a. voneinander unabhängig, aber jede von ihnen sichert die Existenz des Suschkewitsch-Kerns (= Durchschnitt aller Ideale)

von S . S zerfällt in elementfremde, sog. \bar{f} -Klassen, falls man zwei Elemente genau dann zu derselben Klasse zählt, wenn sie dasselbe Ideal erzeugen. Ist die Quotientenhalbgruppe eines jeden Hauptideals nach dem Unterideal der Nichterzeugenden (vollständig) einfach, so heißt S (vollständig) halbeinfach. In einer halbeinfachen Halbgruppe folgt M_r aus M_l , und in einer vollständig einfachen Halbgruppe sind M_l , M_r und M_f untereinander äquivalent. S ist genau dann vollständig halbeinfach, wenn sie halbeinfach ist und unter den Rechts- bzw. Linkshauptidealen, die durch die einzelnen Elemente einer beliebigen \bar{f} -Klasse erzeugt sind, stets ein minimales existiert. Eine damit äquivalente Bedingung ist, daß dies nur für die erwähnten Linkshauptideale vorausgesetzt, zugleich aber auch die Existenz eines idempotenten Elements in jeder \bar{f} -Klasse angenommen wird. Für vollständig halbeinfache Halbgruppen sind Beispiele die Halbgruppen, die im von Neumannschen Sinne regulär sind. Zum Schluß werden zwei Arten von Radikalen untersucht.

L. Fuchs.

Ajzenštat, A. Ja.: Definierende Relationen endlicher symmetrischer Halbgruppen. Mat. Sbornik, n. Ser. 45 (87), 261—280 (1958) [Russisch].

Let S_n be the semi-group of transformations of the set $M_n = \{1, 2, \dots, n\}$ into itself which is called finite symmetric semi-group of M_n and let G_n denote the symmetric group (of degree n). The author introduces a similar definition of the notion of the defining relations of a semi-group as it was done by E. S. Ljapin [Päd. Inst. A. J. Herzen 89, 45—54 (1953)] and T. Evans (cf. this Zbl. 55, 250). Obviously S_n is generated by the set $M = \{G_n, t\}$ where $t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. [See N. N. Vorob'ev, Päd. Inst. A. J. Herzen 89, 161—166 (1953)]. Denote (Q) the set of the following relations in S_n ($n \geq 4$) with respect to M : 1. all the relations in G_n ; 2. $(12)t = (34)t(34) = (34 \cdots n)t(n \cdots 43) = [t(1n)]^2 = t$; 3. $[(23)t]^2 = t(23)t = [t(23)]^2$; 4. $[t(1n)(23)]^2 = [(1n)(23)t]^2$. The author shows that any word of S_n with respect to M can be written by the relations (Q) in a canonical product of the following form $(1 i_1)(2 i_2)t(1 i_3)(2 i_4)t \cdots t(1 i_{2p-1})(2 i_{2p})tg$, where $i_1 < i_2 < i_4 < \cdots < i_{2p}$; $i_{2k-1} < i_{2k}$; $i_{2k-1}, i_{2k} \neq 2$; $i_{2l-1} \neq i_{2k}$; $2 \leq k, l \leq p$. $p \geq 0$ and $g \in G_n$. Then it can be proved that (Q) is a system of the defining relations of S_n with respect to M (i. e. any relation in S_n is a consequence of (Q)). Using this theorem the author gives a system of the defining relations of S_n with respect to an arbitrary minimal generating subset.

J. Szendrei.

Parizek, Bohumír and Štefan Schwarz: On the multiplicative semigroup of residue classes (mod n). Mat.-fyz. Časopis slovensk. Akad. Vied 8, 136—148, russ. und engl. Zusammenfassg. 149—150 (1958) [Slowakisch].

Es sei m eine natürliche Zahl, $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, $\alpha_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, r$, ihre Primzahlfaktorenzerlegung und S_m die multiplikative Halbgruppe des Restklassenringes modulo m . Ein Element in S_m , das eine Zahl a enthält, bezeichnen wir mit $[a]$. Die Teilmenge $G_1 \subseteq S_m$ aller Elemente $[a]$, für die $(a, m) = 1$ gilt, ist eine Gruppe. Die Halbgruppe S_m kann man in der Form einer Vereinigung von elementfremden Mengen $(1) S_m = \bigcup_i [x_i] G_1$ ausdrücken, wo $[x_i]$ passend ausgewählte Elemente der Halbgruppe S_m bedeuten. Die Zerlegung (1) bezeichnen wir mit S_m/G_1 . Jede Klasse in S_m/G_1 läßt sich in der Form $(2) [p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}] G_1$ schreiben, wo $0 \leq k_i \leq \alpha_i$, $i = 1, \dots, r$. Alle solche Klassen sind untereinander verschieden. Eine Klasse (2) enthält ein Idempotent dann und nur dann, wenn für jedes $i = 1, \dots, r$ $k_i = 0$ oder $k_i = \alpha_i$ gilt. Jede solche Klasse enthält genau ein Idempotent. S_m besitzt 2^r Idempotenten. Jedes Idempotent $e \neq [1]$ hat die Form $e = [p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} a]$, wo $1 \leq s \leq r$, $[a] \in G_1$ gilt. Die Menge aller Idempotenten in S_m ist eine Boolesche Algebra in bezug auf eine teilweise Anordnung \leq , die folgendermaßen definiert ist: $e_i \leq e_k \Leftrightarrow e_i e_k = e_i$. Diese Boolesche Algebra hat genau r Atome (Dualatome); das sind alle Idempotenten von der Form $[m p_i^{-\alpha_i} a_i]$, $[a_i] \in G_1$ ($[p_i^{\alpha_i} a_i]$, $[a_i] \in G_1$). Man sagt, daß ein Element $[x] \in S_m$ zu einem Idempotent $e \in S_m$ gehört, wenn eine

natürliche Zahl n existiert, so daß $[x]^n = e$ gilt. Die Menge P_e aller Elemente aus S_m , die zu dem Idempotent e gehören, heißt die maximale Halbgruppe, die zu dem Idempotent e gehört. P_e ist die Vereinigung aller Klassen von der Form $[p_1^{h_1} \cdots p_s^{h_s}] G_1$, wo $1 \leq h_i \leq \alpha_i$, $1 \leq i \leq s \leq r$ gilt. Die Menge G_e aller Elemente $[x] \in P_e$, für die $[x]e = [x]$ gilt, nennen wir die maximale Gruppe, die zu dem Idempotent e gehört. Es gilt $G_e = eG_1$. Die Halbgruppe S_m ist eine Vereinigung von elementfremden Gruppen dann und nur dann, wenn m durch das Quadrat keiner Primzahl teilbar ist. In der Arbeit sind weiter die Anzahlen der Elemente der Menge S_m/G_1 , jeder Klasse der Zerlegung S_m/G_1 und der Mengen P_e und G_e bestimmt.

F. Šik.

Kolibiarová, Blanka: Über kommutative periodische Halbgruppen. Mat.-fys. Časopis slovensk. Akad. Vied 8, 127—133, russ. und dtsh. Zusammenfassg. 134—135 (1958) [Slowakisch].

Eine Halbgruppe S heißt periodisch, wenn für jedes $x \in S$ eine natürliche Zahl n existiert, so daß x^n ein Idempotent ist. Die Menge $I(S)$ aller Idempotenten in S läßt sich auf folgende Weise teilweise ordnen: für $e_i, e_k \in I(S)$ gilt $e_i \leq e_k$, wenn $e_i = e_i e_k$ ist. In bezug auf \leq ist $I(S)$ ein Halbverband. Es sei $e \in S$ ein Idempotent. Die Menge $K(e) = \{x \in S \mid x^n = e \text{ für ein natürliches } n\}$ heißt die K -Klasse, die zu dem Idempotent e gehört. Die K -Klassen in S bilden eine Zerlegung auf S ; die zugehörige Äquivalenzrelation ist eine Kongruenz. Die Menge aller K -Klassen mit der zugehörigen Operation ist eine Halbgruppe; bezeichnen wir sie mit \mathfrak{K} . In der Menge \mathfrak{K} führen wir eine teilweise Anordnung ein: Es ist $K(e_1) \leq K(e_2)$, wenn $e_1 \leq e_2$ gilt. Die teilweise geordnete Halbgruppe \mathfrak{K} ist der teilweise geordneten Halbgruppe $I(S)$ isomorph. Ein Hauptideal in S , das durch ein Element $x \in S$ erzeugt ist, bezeichnen wir mit (x) . Die Relation $\sim: x \sim y \Leftrightarrow (x) = (y)$, ist eine Äquivalenzrelation und zugleich eine Kongruenz auf S . Jede Klasse von äquivalenten Elementen nennen wir eine F -Klasse. Die Menge \mathfrak{F} von F -Klassen läßt sich folgendermaßen teilweise ordnen: Ist $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$, $x \in F_1$, $y \in F_2$, $(x) \subseteq (y)$, dann gilt $F_1 \leq F_2$. Jede F -Klasse ist eine Teilmenge von einer K -Klasse. Wir bezeichnen mit F_x eine solche F -Klasse, die das Element $x \in S$ einschließt. Wenn $x, y \in S$ zu derselben K -Klasse gehören und $F_x \leq F_y$ gilt, so ist F_y eine Gruppe dann und nur dann, wenn $F_{xy} = F_y$ gilt. Die teilweise geordnete Menge ist von unten orientiert (d. h. zu den beliebigen $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$ existiert ein $F_3 \in \mathfrak{F}$, so daß $F_3 \leq F_1$, $F_3 \leq F_2$). S enthält ein minimales Hauptideal dann und nur dann, wenn ein solches Idempotent $e \in S$ existiert, daß $e \leq e_i$ für alle $e_i \in I(S)$ gilt. Im letzten Teil der Arbeit werden Sätze über Homomorphismen der K - und F -Klassen bewiesen. Endlich wird gezeigt, wie aus gegebenen kommutativen periodischen Halbgruppen eine neue Halbgruppe S , deren K -Klassen die gegebenen Halbgruppen sind, konstruiert werden kann. Bemerkung des Ref.: Das Diagramm der teilweise geordneten Menge aus Beispiel 2 (Abbildung 2) ist nicht richtig.

F. Šik.

Murata, Kentaro: A theorem on residuated lattices. Proc. Japan. Acad. 33, 639—641 (1957).

Let L be a complete lattice-ordered semigroup with a maximally integral identity e , namely $e^2 \leq e$ and there exists no element c such that $e < c$ and $c^2 \leq c$. Suppose that L has a unique mapping into itself $a \rightarrow a^{-1}$ with the properties 1. $a \cdot a^{-1} a \leq a$ and 2. $a \cdot x a \leq a$ implies $x \leq a^{-1}$. In a previous paper of K. Asano and K. Murata [J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 4, 9—33 (1953)] it was proved that L is a direct product of infinite cyclic groups generated by prime elements, if L satisfies the conditions: (1) The ascending chain condition holds for integral elements of L , (2) Any prime element is divisor-free (maximal), (3) Any prime element contains an element c satisfying $(c^{-1})^{-1} = c$. In this paper the author proves that the condition (1) can be replaced by the restricted descending

chain condition for integral elements of L , which is, moreover, equivalent to (1) under other conditions.

Y. Kawada.

Marchionna Tibiletti, Cesarina: Sui prodotti ordinati di gruppi finiti. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **13**, 46—57 (1958).

Diese Arbeit ist dem Wesen nach eine Fortsetzung früherer Untersuchungen der Verf. [dies. Zbl. **77**, 249; Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **44**, 233—244 (1957)]. Verf. nennt eine Gruppe G geordnetes Produkt der Gruppen A_1, \dots, A_s : $G = A_1 \cdots A_s$, wenn für diese die folgenden Bedingungen erfüllt sind: 1. die Gruppen A_i sind Untergruppen von G . Die Produkte $G_i = A_i A_{i+1} \cdots A_s$ ($1 < i < s$) sind Untergruppen von G und sind vertauschbar mit A_{i-1} und mit G_{i-1} ($G_s = A_s$; $G_1 = G$). 2. $G_i \cap A_{i-1} = 1$ ($i = 2, \dots, s$). Das geordnete Produkt ist eine Gruppe mit Normalkette, wenn G_i normal in G_{i-1} ist, und ist eine Gruppe mit Hauptkette, wenn G_i normal in G ist. Verf. untersucht die Eigenschaften der obigen Gruppen (geordnete Produkte), wenn die A_i endlich sind. Die Hauptergebnisse sind: 1. Es sei $G = A_1 \cdots A_s$ das geordnete Produkt der A_i mit Normalkette: die Ordnung von G sei n , die der A_i sei n_i ($i = 1, \dots, s$), die paarweise teilerfremd seien. Dann ist a) die Normalkette von G eine Hauptkette, b) jede Untergruppe H von G mit Ordnung $m = m_1 \cdots m_s$, $m_i = (m, n_i)$ ist ein geordnetes Produkt $H = B_1 \cdots B_s$ mit Hauptkette ($o(B_i) = m_i$) und die B_i sind Untergruppen in gewissen zu A_i konjugierten Untergruppen von G . c) jede Untergruppe H von G mit Ordnung $m = p_1^{\beta_1} \cdots p_{s-1}^{\beta_{s-1}} r_s$ (p_i Primzahlen, $p_i^{\beta_i} | n_i$; $r_s | n_s$) ist ein geordnetes Produkt $H = B_1 \cdots B_s$ ($o(B_i) = p_i^{\beta_i}$; $o(B_s) = r_s$) mit Hauptkette, außerdem gelten $B_s \subseteq A_s$ und $B_i \subseteq A'_i$ ($1 \leq i \leq s-1$), wo die A'_i zu A_i konjugierte Untergruppen von G sind und G ist ein geordnetes Produkt $G = A'_1 \cdots A'_{s-1} A_s$ mit Normalkette. 2. Ist $G = A_1 \cdots A_s$ ein geordnetes Produkt der A_i , deren Ordnung paarweise teilerfremd sind, dann ist a) jeder Normalteiler N von G ein geordnetes Produkt $N = B_1 \cdots B_s$, wo die B_i Normalteiler in A_i sind, b) hat $G = A_1 \cdots A_s$ außerdem eine Normalkette (die in diesem Fall notwendigerweise eine Hauptkette ist), so hat auch N diese Eigenschaft. 3. Es seien H und M in einer endlichen Gruppe G Hallsche Untergruppen (d. h. Untergruppen, deren Ordnung zu ihrem Index teilerfremd ist) mit Ordnungen $p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ bzw. $p_1^{\alpha'_1} \cdots p_s^{\alpha'_s}$ ($p_i^{\alpha_i} | p_i^{\alpha'_i}$, die Primzahlen p_i sind verschieden). Hat H bzw. M eine Sylowsche Kompositionsreihe (p_1, \dots, p_r) bzw. (p_1, \dots, p_s) , so ist M eine Untergruppe von einer zu H konjugierten Untergruppe von G . Dieser letzte Satz enthält als Spezialfall einen Satz von G. Zappa und P. Hall.

J. Szép.

Curzio, Mario: Sugli elementi \cap - e \cup -quasi distributivi nel reticolo dei sottogruppi d'un gruppo finito. Convegno internaz. Reticoli Geom. proiettive, Palermo-Messina 1957, 79—80 (1958).

Il contenuto di questa comunicazione è stato pubblicato per esteso in Ricerche Mat. (v. questo Zbl. **79**, 254) sotto il titolo: Alcune osservazioni sul reticolo dei sottogruppi d'un gruppo finito.

Fuchs, Ladislaus: Ein kombinatorisches Problem bezüglich abelscher Gruppen. Math. Nachr. **18**, H. L. Schmid-Gedächtnisband 292—297 (1958).

L'A. étend au groupe abélien infini un résultat établi par M. Hall jr. (ce Zbl. **47**, 27) pour le groupe abélien fini. Pour chaque substitution a_i, b_i du groupe abélien G additif fini d'ordre n , l'ensemble des différences $c_i = a_i - b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, a évidemment une somme nulle. Hall prouve que inversement à chaque ensemble de différences c_i avec somme nulle, correspond dans G une substitution a_i, b_i telle que $c_i = a_i - b_i$. L'A. établit que dans le cas du groupe infini le même fait est encore valable, à l'exception de quelques cas dans lesquels interviennent seulement un nombre fini de différences c_i différentes.

S. Bays.

Wallace, D. A. R.: Note on the radical of a group algebra. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **54**, 128—130 (1958).

Let G be a finite group of order $p^a m$, $(p, m) = 1$. Then the group algebra over an algebraically closed field of characteristic p possesses a radical. Let $N(G)$ be the dimension of the radical. An upper bound of $N(G)$ is given by R. Brauer and C. Nesbitt (this *Zbl.* **27**, 152). In this paper the author proves that $N(G) \geq p^a - 1$ holds in general, and $N(G) = p^a - 1$ holds if and only if (1) any Sylow p -subgroup is its own normalizer and (2) the intersection of any two distinct Sylow p -subgroups is the unit element. The proof depends highly on the results contained in the above mentioned paper of Brauer and Nesbitt.

Y. Kawada.
Kostant, Bertram: A formula for the multiplicity of a weight. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **44**, 588—589 (1958).

Highly interesting formula for the multiplicities of representation weights, using partition functions. No proofs. *H. Freudenthal.*

Mibu, Yoshimichi: Decomposition-equivalence and the existence of non-measurable sets in a locally compact group. *Proc. Japan Acad.* **34**, 185—188 (1958).

Let G be a locally compact and σ -compact group with left invariant outer measure m^* . Two subsets A, B of G are called decomposition equivalent if there exist decompositions

$$(1) \quad A = M \cup A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \dots; \quad B = N \cup B_1 \cup \dots \cup B_n \cup \dots$$

of A and B with relations (2) $m^*(M) = m^*(N) = 0$; for each $i = 1, 2, \dots$ there is a $g_i \in G$ such that $g_i A_i = B_i$; and (3) each A_i is m^* -measurable. It is well known in the case of Haar measure, if A and B are measurable, then a necessary and sufficient condition that they be decomposition equivalent is that they have the same measure. The author changes the above definition by omitting property (3). If A and B satisfy (1) and (2) above he writes $A \sim B$. If, in addition, $M = N = O$, then write $A \approx B$. Under the additional hypothesis that G is not discrete, the main result is (1) if A contains a subset of positive measure, then $A \sim G$, (2) if the interior of A is not empty, then $A \approx G$. Since \sim is a transitive relation, we have as a corollary that any two subsets containing sets of positive measure are related. Using the fact that every set of positive measure contains subsets of smaller positive measure (G not discrete), it follows that every subset of positive measure contains non-measurable subsets. Finally it is established that if G is also separable, then there is a subset A of G such that $A \sim G$ but not $A \approx G$.

A. B. Simon.
Lashof, Richard K.: Lie algebras of locally compact groups. *Pacific J. Math.* **7**, 1145—1162 (1957).

Lie algebras can be defined for locally compact groups by a natural limit procedure. For connected groups with the same Lie algebra a common universal covering group can be defined; it is a direct product of Lie groups, but not necessarily compact: its projection may not map onto. Special attention is paid to subgroups generated by closed subalgebras.

H. Freudenthal.
Goto, Morikuni and Naoki Kimura: Semigroup of endomorphisms of a locally compact group. *Trans. Amer. math. Soc.* **87**, 359—371 (1958).

If G is a locally compact group, $\tilde{\mathfrak{G}}(G)$ will be the semigroup of the continuous endomorphisms of \mathfrak{G} with the compact support topology. $\mathfrak{G}(G)$ is the component of identity of $\tilde{\mathfrak{G}}(G)$. $\mathfrak{A}(G)$ is the subgroup of $\tilde{\mathfrak{G}}(G)$ consisting of the topological automorphisms. $\mathfrak{A}(G)$ its identity component. If G is compact, then $\mathfrak{G}(G) = \mathfrak{A}(G)$. If G has a generating nucleus that is the direct product of a Lie nucleus and a compact normal subgroup, then $\mathfrak{A}(G)$ is a topological group (i. e. the function $\sigma \rightarrow \sigma^{-1}$ is continuous on $\mathfrak{A}(G)$). If G is connected and $L \times K$ is a local decomposition of G into a Lie nucleus L and a compact subgroup, then $\mathfrak{G}(G) = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, where \mathfrak{A} is the group K^0 of inner automorphisms induced by the identity component of K and \mathfrak{B}

is the semigroup of endomorphisms out of $\mathfrak{G}(G)$ that leave the points of K^0 invariant: the structure of B can be completely analyzed. L is mapped into itself by $\mathfrak{G}(G)$ if the center of K is totally disconnected, and also if L is its own commutator group.

H. Freudenthal.

Ehresmann, Charles: Sur les pseudogroupes de Lie de type fini. *C. r. Acad. Sci., Paris* **246**, 360—362 (1958).

Théorème: Le plus grand groupe de transformations contenu dans un pseudogroupe de Lie de type fini est un groupe de Lie. Il est indiqué que la démonstration utilise la théorie des espaces feuilletés et une caractérisation des recouvrements. Le théorème peut être étendu au cas du groupe d'automorphismes d'une connexion affine covariante.

H. Guggenheimer.

Verbände. Ringe. Körper:

Ohkuma, Tadashi: Duality in mathematical structure. *Proc. Japan Acad.* **34**, 6—10 (1958).

The author states (without any proofs) certain results regarding abstract "systems" and distinguished "homomorphisms" or mappings between them based on certain axioms that these satisfy. The proofs and applications are to be published elsewhere. A family of sets, \mathfrak{S} , called "systems" and for each pair of systems X, Y a distinguished family $\text{Hom}(X, Y)$ of mappings of X in Y , called "homomorphisms" of X in Y are given subject to the axioms (X, Y, Z etc. denote systems from \mathfrak{S} below): A 1. If Z is contained in X then the identity map of Z is in $\text{Hom}(Z, X)$. A 2. The succession of consecutive homomorphisms gives a homomorphism. A 3. (B 1) If Φ is in $\text{Hom}(X, Y)$, it is in $\text{Hom}(X, \Phi(X))$ (and $\Phi(X)$ is in \mathfrak{S}). B 2. If Φ is in $\text{Hom}(X, Y)$ and Z meets $\Phi(X)$ then $\Phi^{-1}(Z)$ (as a set) is in \mathfrak{S} . B 3. There is a one element system (e) such that the constant mapping, of any system X on e , is in $\text{Hom}(X, (e))$. C. For any family of systems there is a direct product system (defined suitably). D. $\text{Hom}(X, Y)$ is a subsystem of Y^X ; (the main point of this axiom seems to be to enable us to treat $\text{Hom}(X, Y)$ as a system from \mathfrak{S}). E. For any subfamily \mathfrak{F} of \mathfrak{S} such that each system in \mathfrak{F} has a power less than some cardinal number, a family \mathfrak{B} of systems can be selected in such a way that this family \mathfrak{B} makes itself a set with some power, and any system in \mathfrak{F} is isomorphic to one of the systems in \mathfrak{B} . Some of the consequences stated are: Th. 1. $\text{Hom}(X)$, the family of homomorphisms of X , is a complete lattice. Keeping a system L fixed, the set $\text{Hom}(X, L)$ is denoted by X^* . The theorems 2 and 3 define the usual sort of mapping of X in X^{**} and the isomorphism between X^* and X^{***} . The theorem 4 deals with the consequences of transitivity of homomorphisms (A 2), and as a corollary a homomorphism is established of $\text{Hom}(X, Z)$ in $\text{Hom}(Z', X')$. Theorem 5 gives an isomorphism between $\text{Hom}(X, \text{Hom}(Z, Y))$ and $\text{Hom}(Z, \text{Hom}(X, Y))$. While the intuitive content of the results seem natural, the referee feels that some of the results may not be deducible from the given axioms (for instance, to show that \dot{x} is in X^{**} when $\dot{x}(\Phi)$ is defined as $\Phi(x)$, for any Φ from X^*).

V. S. Krishnan.

Hilton, P. J. and W. Ledermann: Homology and ringoids. I. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **54**, 152—167 (1958).

There is proposed a method for avoiding unnecessary mention of the objects of a category in proving fundamental homological algebraic results in that category. In detail, let \mathcal{P} denote the category whose objects are 'presentations' of abelian groups, i. e. quartets $(F, f; R, r)$, of finitely generated abelian groups F, R (with $R \subseteq F$), together with chosen bases f of F and r of R . The maps of \mathcal{P} will be homomorphisms of pairs $\alpha: (F_1, R_1) \rightarrow (F_2, R_2)$: so that there is clearly a functor $\Phi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{A}$, where \mathcal{A} denotes the category of finitely generated abelian groups. Now the choice

of bases r, f associates with each object in \mathcal{D} the left regular integral matrix A such that $r = A f$, and moreover $\alpha: (F_1, R_1) \rightarrow (F_2, R_2)$ is described by the equation $A_1 T = S A_2$ for some integral matrices S, T , where A_1, A_2 are, respectively, associated with $(F_1, f_1; R_1, r_1), (F_2, f_2; R_2, r_2)$. Consider therefore the category \mathcal{M}_L^0 of all left regular integral matrices and maps which are quartets (A, T, S, B) of matrices with $AT = SB$, with composition $(A, T, S, B)(B, V, U, C) = (A, TV, SU, C)$. Let \mathcal{M} denote the quotient of \mathcal{M}_L^0 by the equivalence relation $(A, T, S, B) = (A, T + XB, S + AX, B)$, which factors out maps inducing the same maps in \mathcal{A} . Clearly there is a functor $\Psi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}$. The maps of \mathcal{M}, \mathcal{D} and \mathcal{A} form ringoids $\mathfrak{M}, \mathfrak{P}, \mathfrak{A}$, and Φ and Ψ induce homomorphisms of these ringoids. Theorem: \mathfrak{M} is a homological ringoid, i. e. the fundamental concepts of homology theory, viz. chains, boundaries, cycles, homology groups, chain mappings etc., can all be formulated in \mathfrak{M} . Indeed, by means of the homomorphisms induced by Φ and Ψ , it is shown that the homology groups of finitely generated chain complexes, and the homomorphisms induced by chain mappings, can be computed in \mathfrak{M} .

W. H. Cockcroft.

Isbell, J. R.: On a theorem of Richardson. Proc. Amer. math. Soc. 8, 928—929 (1957).

Let S be a set with an irreflexive relation $>$. For a subset $T \subset S$, $\text{dom } T$ is the set of all $x \in S$ such that $t > x$ for some $t \in T$, and $\max T = T \cap \text{dom } T$. A solution of $(S, >)$ is a subset T for which $T = S \cap \text{dom } T$. A one to one correspondence is established between solutions of $(S, >)$ and solutions of $(R, >)$, where R is a certain subset of S with $\max R$ empty. This correspondence is used to simplify the proof of a theorem of Richardson (this Zbl. 60, 65), giving criteria for solutions.

J. E. L. Peck.

Szász, G.: Semi-complements and complements in semi-modular lattices. Publ. math. Debrecen 5, 217—221 (1958).

Verf. verschärft Sätze seiner früheren Arbeiten (dies. Zbl. 47, 262; 50, 259): In einem Verband L mit Null 0 heißt x echtes Semikomplement von a , wenn $x \neq 0$, $a \wedge x = 0$; L heißt semikomplementär, wenn jedes von Null und (einer eventuell vorhandenen) Eins verschiedene a wenigstens ein echtes Semikomplement besitzt. Wegen des Struktursatzes für modulare Verbände ist in modularem L ein Komplement eines Elementes notwendig maximales Semikomplement; ist umgekehrt L semimodular (im Sinne von Croisot, dies. Zbl. 51, 260) und besitzt a ein maximales Semikomplement x , so L auch eine Eins, und x ist Komplement von a . Ist L semikomplementär, semimodular, von unendlicher Länge, und hat jedes von (einer eventuell vorhandenen) Eins verschiedene Element a endliche Höhe ($= \max$. Länge aller Ketten zwischen $0, a$), so gibt es zu jedem natürlichen n ein Semikomplement von a der Höhe n .

W. Felscher.

Stellekij, I. V.: Über vollständige Verbände, die durch Mengen dargestellt werden können. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 6 (78), 177—180 (1957) [Russisch].

Es werden vollständige Verbände betrachtet, deren Elemente Mengen sind und in denen das Infimum jeder Teilmenge gleich der Durchschnittsmenge, das Supremum jeder totalgeordneten Teilmenge gleich der Vereinigungsmenge ihrer Elemente ist. Diese Verbände werden verbandstheoretisch charakterisiert, ein weiterer Satz wird bewiesen, zwei andere werden ohne Beweis angegeben; dabei Hinweis auf analoge ringtheoretische Untersuchungen von Blair (dies. Zbl. 50, 259). — Ref. bemerkt, daß ein derartiger Verband von Mengen genau ein algebraisches Hüllensystem ist, nach J. Schmidt (dies. Zbl. 49, 166) also gerade ein Verband, welcher sich darstellen läßt als Verband der Subalgebren einer abstrakten Algebra mit finitären Operationen. Daher ist Satz 1 vorliegender Arbeit identisch mit der Birkhoff-Frinkschen Kennzeichnung solcher Verbände (dies. Zbl. 32, 5; dazu noch K. H. Diener, dies. Zbl.

71, 256, sowie J. R. Büchi, dies. Zbl. 48, 22) und Satz 2 identisch mit Satz 6 der erwähnten Arbeit von J. Schmidt. Zwar wird in der vorliegenden Arbeit bei der Stetigkeitsdefinition mit totalgeordneten Mengen operiert, während die genannten Autoren gerichtete Mengen verwenden; nach einem zuerst wohl von Iwamura bewiesenen Satz (vgl. Schluß des Referates von Maeda, Kontinuierliche Geometrie, dies. Zbl. 81, 26) liefern aber beide Methoden dasselbe. *W. Felscher.*

Ginsburg, Seymour: On the existence of complete Boolean algebras whose principal ideals are isomorphic to each other. Proc. Amer. math. Soc. 9, 130—132 (1958).

The measure algebra of the unit interval modulo sets of measure zero is a complete Boolean algebra with the following property (*): any two principal ideals are isomorphic. B. Jónson raised the question whether there exist other complete Boolean algebras with the *-property. The author proves that for every transfinite cardinal \aleph_s there exists a complete Boolean algebra B_s of cardinality 2^{\aleph_s} and having the *-property. B_s is defined in this way: Let P be the set of all finite sequences of ordinals $< \omega_s$; P is ordered in such a manner that $(x_0, \dots, x_r) \leq (y_0, \dots, y_s)$ means $s \leq r$, $x_i = y_i$ for $i \leq s$; then B_s consists of all maximal residual subsets of P and of a zero element, ordered by \subseteq . A residual of an order $(0; \leq)$ is any terminal portion of this order; a maximal residual of $(0; \leq)$ is any residual which is cofinally contained in no greater residual of P ; A is cofinally contained in B if for every $b \in B$ there exists an $a \in A$ such that $b \geq a$. Moreover it is proved that for any ordinal δ there are two non-isomorphic Boolean algebras of a same cardinality $\geq \aleph_\delta$ and both having the *-property. *G. Kurepa.*

Wallace, Alexander Doniphan: The center of a compact lattice is totally disconnected. Pacific J. Math. 7, 1237—1238 (1957).

In a topological lattice, that is a Hausdorff space whose points form a lattice with the lattice operations continuous functions of the pairs on which they operate, the centre is shown to be totally disconnected when the lattice is also compact. The centre is shown to be a Boolean algebra, and thus a commutative additive topological group with all elements of order two. Then it is shown that the component of zero is the one point set consisting of zero only. *V. S. Krishnan.*

Wallace, Alexander Doniphan: Two theorems on topological lattices. Pacific J. Math. 7, 1239—1241 (1957).

In a topological lattice L (defined as in the last paper) a set A is said to be convex if x, y in A and $x \leq a \leq y$ imply a is in A , or equivalently $A = (A \wedge L) \vee (A \wedge L)$. The two theorems that are established are then: Theorem 1. Let L be a connected topological lattice and let A be a convex set such that $L \setminus A$ is not connected. Then $L \setminus A$ is the union of the connected separated sets $(A \vee L) \setminus A$ and $(A \wedge L) \setminus A$ which are open (closed) if A is closed (open). If L is also compact then A is connected if it is either open or closed. Theorem 2. Let L be a compact connected metrizable topological lattice. Then L is a cyclic chain, each cyclic element of which is a convex sublattice. If L is topologically contained in the plane then each true cyclic element of L is a 2-cell and L has the fixed-point property. *V. S. Krishnan.*

Anderson, Lee W.: Topological lattices and n -cells. Duke math. J. 25, 205—208 (1958).

Verf. gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß ein topologischer Verband L dem n -dimensionalen Einheitswürfel (mit üblicher Topologie und Verbandsstruktur) verbandisomorph und homeomorph ist. Die Bedingung lautet: L ist ein zusammenhängender distributiver topologischer Verband mit 0 und 1, jede abgeschlossene Kette in L ist lokal-konvex und separabel, ist $a \leq b \leq c$, so $\text{card}(\text{Cen}[b, c]) \leq \text{card}(\text{Cen}[a, 1])$, es ist $\text{card}(\text{Cen}(L)) = 2^n - 2$. Dabei ist $\text{Cen}(A)$ das Zentrum des Verbandes A . Beim Beweis wird wesentlich von den Resultaten einer anderen Note des Verf. (Trans. Amer. math. Soc. 91, 102—112 (1959)) Gebrauch gemacht. *G. Bruns.*

● **Maeda, Fumitomo: Kontinuierliche Geometrie.** Übersetzt und für die deutsche Ausgabe bearb. von **Sibylla Crampe, Günter Pickert und Rudolf Schauffler.** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Bd. 95.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1958. X, 244 S. mit 12 Abb. Ganzln. DM 39.—

Das Buch ist eine vom Verf. leicht bearbeitete Übersetzung der japanischen Ausgabe von 1950 (dies. Zbl. 49, 16); es behandelt die von Neumannschen kontinuierlichen Geometrien und einige ihrer bis 1951 bekannt gewordenen Weiterentwicklungen. Vorkenntnisse über Verbände, Algebra oder Topologie werden nicht vorausgesetzt; alles Benötigte wird definiert, und alle Sätze werden ausführlich bewiesen; man bemerkt auch nicht, daß es sich um eine Übertragung aus fremder Sprache handelt. — Kapitel I enthält eine Einführung in die Verbandstheorie, Sätze über direkte Produkte und Summen (ein Verband mit Null heißt direkte Summe gewisser Teilverbände, wenn er deren direktem Produkt auf kanonische Weise isomorph ist), neutrale Elemente und Zentrum, Kongruenzen und neutrale Ideale, Stonesche und Wallmansche Darstellung durch Mengenverbände und Darstellung als Boolescher Raum, schließlich metrische Verbände (metrische Kompletterierung; bei σ -Vollständigkeit ist Komplettersein äquivalent zur σ -Stetigkeit der modularen Funktion). Kapitel II: Hilfssätze über unabhängige Mengen, Perspektivität in komplementären modularen Verbänden (a, b *perspektiv*, genau wenn ein x mit $a \cap x = b \cap x = 0$, $a \cup x = b \cup x$ existiert: $a \sim_x b$), perspektive Abbildungen (wenn $a \sim_x b$, so seien die zu x gehörigen perspektiven Abbildungen zwischen $[0, a]$, $[0, b]$ durch $a_1 \rightarrow (a_1 \cup x) \cap b$ und $b_1 \rightarrow (b_1 \cup x) \cap a$ gegeben; sie sind reziproke Isomorphismen). In einem bedingt nach oben stetigen, relativ-komplementären modularen Verband L mit Null gelte $a \nabla b$ genau wenn $(a \cup x) \cap b = x \cap b$ für alle x ; wenn $S \subseteq L$, so sei S^∇ die Menge aller a mit $a \nabla b$ für alle b in S ; durch $S \rightarrow S^\nabla$ ist ein Komplementoperator definiert; die Mengen der Gestalt S^∇ sind neutrale Ideale und heißen *normale Ideale*. Für normales S ist L direkte Summe von S und S^∇ , und L ist irreduzibel genau wenn es nur die beiden trivialen normalen Ideale gibt. Die normalen Ideale von L bilden für die Inklusion einen vollständigen Booleschen Verband Z , in dem die als Intervalle $[0, z]$ darstellbaren Elemente von Z ein zur Menge Z_0 der neutralen Elemente von L isomorphes Ideal bilden: $[0, z]$ liegt in Z genau dann, wenn z in Z_0 liegt; insbesondere ist mit $L_1 = Z_0^{\nabla \nabla}$, $L_\infty = Z_0^{\nabla}$ dann L direkte Summe von L_1, L_∞ . Ist L nach oben stetig komplementär modular, so sind die Elemente von Z genau die Intervalle $[0, z]$ mit z aus Z_0 , wobei Z_0 jetzt das Zentrum von L ist [vgl. Maeda, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, 14, 85—92 (1950)]. Kapitel III: Zerlegungssatz für relativ-atomare bedingt nach oben stetige Verbände (vgl. Maeda, dies. Zbl. 45, 417); Diskussion der Minimalbedingung. In modularen Verbänden ist Perspektivität zwischen Atomen transitiv; aus Modularität, Stetigkeit nach oben und Atomzerlegung der Eins schließt man auf Komplementarität und Atomarität [vgl. Birkhoff, Lattice theory (dies. Zbl. 33, 101), p. 129]; für modulare bedingt nach oben stetige Verbände sind „relativ-atomar“ und „atomar relativ-komplementär“ äquivalent. Ist L bedingt nach oben stetig, relativ-komplementär modular mit Null, P die Menge der Atome von L , $L_c = P^\nabla$, $L_p = P^{\nabla \nabla}$, so ist L direkte Summe von L_c, L_p , weiter L_p atomar und L_c ohne Atome; L_p läßt sich dann als subdirekte Summe irreduzibler Summanden darstellen, deren jeder die Atome genau einer Perspektivitätsklasse enthält (vgl. Frink, dies. Zbl. 60, 58). Es folgt der bekannte Zusammenhang zwischen projektiven (Inzidenz-) Geometrien und atomaren nach oben stetigen komplementären modularen Verbänden (Frink, l. c.; auch Hermes, Einführung in die Verbandstheorie, dies. Zbl. 64, 29), dazu der Frinksche Darstellungssatz: für relativ-komplementäres modulares L mit Null ist die Menge der Ultrafilter auch Menge der Punkte eines projektiven Raumes Ω ; ordnet man jedem Element von L die Menge der es enthaltenden Ultrafilter zu, so ist dies ein Isomorphismus von L in den Verband der Unterräume von Ω . — Kapitel IV und V bringen die

Dimensionstheorie stetiger komplementärer modularer Verbände L . Für a, b aus L gelte $a < b$, wenn es ein zu a perspektives Element unter b gibt, $a \ll b$, wenn für alle Zentrumsэлементы z gilt $z \cap a < z \cap b$ oder $z \cap a = z \cap b$. Die Perspektivität in L ist transitiv, also eine Äquivalenzrelation; das zugehörige Restklassensystem $[L]$ wird zu einem Verband durch die von der Repräsentantenwahl unabhängige Definition $[a] < [b]$ genau wenn $a < b$: dem *Dimensionsverband* von L ; L ist irreduzibel, genau wenn $[L]$ total geordnet ist. Man erkläre $[a] + [b]$ genau dann, wenn es a_1 in $[a]$ und b_1 in $[b]$ mit $a_1 \cap b_1 = 0$ gibt; dann sei $[a] + [b] = [a_1 \cup b_1]$; wenn $[a] \geq [b]$, so sei c Komplement in a eines zu b perspektiven Elementes unter a , und man setze $[a] - [b] = [c]$; diese Definitionen hängen wieder nur von den Klassen ab. Man findet mit Existenzvoraussetzungen belastete Rechenregeln, die etwa denen einer geordneten kommutativen regulären Halbgruppe entsprechen; durch Iteration erklärt man noch Skalarmultiplikation mit natürlichen und dann auch positiven rationalen Zahlen; ist allerdings $n[a]$ für alle natürlichen n definiert, so kann a nur die Null sein. Zu a aus L gibt es unter den über a gelegenen Zentrumsэлементы ein kleinstes mit $e(a)$ bezeichnetes, das durch $\{a\}^{e(a)} = [0, e(a)]$ bestimmt ist. Zu a, b aus L betrachtet man Mengen S von Paaren (a_1, b_1) mit $a_1 \leq a$, $b_1 \leq b$ derart, daß für verschiedene Paare aus S stets beide Komponenten verschieden sind und daß sowohl die Menge aller Vorderэлементы von Paaren aus S als auch die Menge aller Hinterэлементы von Paaren aus S beide unabhängig sind; das System dieser S ist von finitem Charakter, so daß man ein maximales solches S findet, für welches a' Supremum der Menge der Vorderэлементы seiner Paare sei, a'' Komplement von a' in a , $q(a, b)$ Komplement von $e(a'')$. Man setzt $q_0(a, b) = 1$, und wenn $q_{n-1}(a, b)$ bekannt ist, so kann man die Gleichung $(n-1)[q_{n-1}(a, b) \cap a] + [x] = [q_{n-1}(a, b) \cap b]$ eindeutig lösen und setzt $q_n(a, b) = q_{n-1}(a, b) \cap q(a, x)$; dann sei $r_n(a, b)$ Komplement von $q_{n+1}(a, b)$ in $q_n(a, b)$. Die $r_n(a, b)$ bilden dann eine unabhängige Menge von Zentrumsэлементы mit dem Supremum $e(a)$, $n[r_n(a, b) \cap a]$ existiert, und es gilt $[r_n(a, b) \cap b] = n[r_n(a, b) \cap a] + [p_n]$, $p_n \ll r_n(a, b) \cap a$; durch diese Bedingungen sind die $r_n(a, b)$ schon eindeutig bestimmt. h aus L heißt *niedrigstes* Element, wenn $x \ll h$ stets $x = 0$ impliziert; unter den Zentrumsэлементы z von L mit $z = e(h)$ für niedrigste h gibt es dann ein größtes z_1 ($z_1 = 0$, wenn es keine niedrigsten h gibt); sei z_{II} Komplement von z_1 , $L_I = [0, z_1]$, $L_{II} = [0, z_{II}]$; L_{II} enthält keine niedrigsten Elemente. Die niedrigsten h mit $z_1 = e(h)$ heißen *erzeugende* niedrigste; sie sind alle zueinander perspektiv. Man wähle ein solches h und setze $e_n = r_n(h, 1)$, $L_n = [0, e_n]$, $e_\infty = z_{II}$, $L_\infty = L_{II}$; dann ist L direkte Summe der L_k ($1 \leq k \leq \infty$). Nun folgt die Theorie von Iwamura (dies. Zbl. 60, 324): sei Δ_k die Menge der Zahlen m/k ($m = 0, \dots, k$), Δ_∞ das reelle Intervall $[0, 1]$; sei Ω der zum Zentrum von L gehörige Boolesche Raum, und sei F_k die Menge der stetigen Funktionen von Ω in Δ_k ($1 \leq k \leq \infty$); mit $f \leq g$ genau wenn $f(p) \leq g(p)$ für alle p aus Ω , ist dann F_k vollständiger Unterverband von F_∞ ; ist für ein Zentrumsэлемент z nun $E(z)$ die Menge der z nicht enthaltenden Elemente von Ω , so sei F_D die Menge der Funktionen aus F_∞ , die $E(e_k)$ in Δ_k abbilden ($1 \leq k \leq \infty$); diese sind durch ihre Werte auf den $E(e_k)$ eindeutig bestimmt, und F_D ist vollständiger Unterverband von F_∞ . Für p aus Ω , a aus L_k ($k < \infty$) sei $\delta(a, p)$ gleich m/k , wenn p in $E(e_k \cap r_m(h, a))$, und gleich 0, wenn p nicht in $E(e_k)$; weiter wähle man eine Folge von Elementen c_k mit $[e_\infty] = 2^k [c_k]$ (dies ist möglich, weil L_∞ keine niedrigsten Elemente enthält) und setze für a aus L_∞ nun $\delta_k(a, p)$ gleich $m \cdot 2^{-k}$, wenn p in $E(r_m(c_k, a))$, und gleich 0, wenn p nicht in $E(e_\infty)$, schließlich $\delta(a, p)$ gleich dem existierenden Limes der $\delta_k(a, p)$ für $k \rightarrow \infty$; für a aus L liegt für alle k die Funktion $p \rightarrow \delta(e_k \cap a, p)$ in F_D ; sei δ_a das Supremum dieser Funktionen in F_D ; die Abbildung D von a auf δ_a heißt *Dimensionsfunktion* von L . D bestimmt einen Isomorphismus von $[L]$ auf F_D (also ist $[L]$ auch vollständig), ist eine modulare Funktion, ist stetig für den o -Limes und bildet das Supremum einer un-

abhängigen Menge ab auf das Supremum der endlichen Summen der Bildfunktionen. Im irreduziblen Fall enthält Ω nur ein Element, so daß man statt einer Funktion aus F_D ihren Wert betrachten kann; L ist schon gleich einem L_k und D eine Abbildung auf A_k ; unabhängige Mengen haben höchstens abzählbar viele von Null verschiedene Elemente, und eine modulare Funktion m mit $m(0) = 0$, $m(1) = 1$ ist gleich D . Die Konstruktion von D war scheinbar abhängig von h und den c_k ; es gilt aber für stetiges komplementäres modulares L (vgl. Kawada, Higuchi und Matsushima, dies. Zbl. 60, 324), daß eine Funktion D_1 schon gleich D ist, wenn sie jedem a aus L eine Funktion $D_1(a)$ von Ω in Δ_∞ zuordnet, modular ist, und wenn für Zentrumselemente z gilt $(D_1(z))(p) = 0$, falls z in p , $(D_1(z))(p) = 1$, falls z nicht in p ; auch diese letzte Eigenschaft ist für das konstruierte D erfüllt. Man verwendet dazu, daß durch $p(J) = J \cap Z$ und $J(p) = \{a; \delta_a(p) = 0\}$ reziproke Abbildungen zwischen den maximalen neutralen Idealen J von L und den maximalen Idealen p des Zentrums Z gegeben werden, daß Einfachheit und Irreduzibilität dasselbe sind, und daß auf L/J eine Dimensionsfunktion durch $D(a/J) = \delta_a(p(J))$ bestimmt wird; L ist isomorph einem subdirekten Produkt der einfachen stetigen komplementären modularen L/J . — Die folgenden Kapitel des Buches bringen die Darstellungstheorie mit den von Neumannschen Resultaten; Beweisvereinfachungen für die Rechnungen im Hilfsring nach Kodaira und Furuya [Zenkoku Shijo Sugaku Danwakai, 168, 514—531 (1938); 169, 593—609 (1938); 170, 638—656 (1938)]. Kapitel VI: Der Verband $R(\mathfrak{R})$ der Rechtsideale eines Ringes \mathfrak{R} ist vollständig, nach oben stetig und modular; direkten Ringzerlegungen von \mathfrak{R} entsprechen umkehrbar und elementweise Supremumsdarstellungen von \mathfrak{R} in $R(\mathfrak{R})$ durch unabhängige Systeme zweiseitiger Ideale; für Ringe mit Eins liegen genau diejenigen Rechtsideale im Zentrum von $R(\mathfrak{R})$, die Rechtshauptideale mit (dann eindeutigen) Erzeugenden aus der Menge \mathfrak{Z}_e der idempotenten Zentrumselemente von \mathfrak{R} sind, und das sind gerade die Ideale in $R(\mathfrak{R})$, welche dort ein Komplement besitzen; die Zuordnung zwischen dem Zentrum von $R(\mathfrak{R})$ und \mathfrak{Z}_e ist sogar ein Verbandisomorphismus auf den über \mathfrak{Z}_e durch $\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2$ definierten Booleschen Verband. Die halbeinfachen Ringe sind genau diejenigen Ringe mit Eins, für die $R(\mathfrak{R})$ endlichdimensional komplementär modular ist, und weiter ist genau für sie der Verband $\bar{R}(\mathfrak{R})$ der Hauptrechtsideale Unterverband von $R(\mathfrak{R})$ und als solcher endlichdimensional komplementär modular; dann ist jedes Rechtsideal von einem Idempotenten erzeugtes Hauptrechtsideal. Die irreduziblen halbeinfachen Ringe sind es also gerade, deren Hauptrechtsidealverbände den n -dimensionalen projektiven Geometrien ($n \geq 3$) entsprechen. Ein Ring \mathfrak{R} mit Eins heißt nun *regulär*, wenn jedes Hauptrechtsideal in $R(\mathfrak{R})$ ein Komplement besitzt; gleichbedeutend damit ist, daß jedes Hauptrechtsideal von einem Idempotenten erzeugt wird, oder, symmetrisch, daß es zu jedem α aus \mathfrak{R} ein π mit $\alpha = \alpha \pi \alpha$ gibt; $\bar{R}(\mathfrak{R})$ ist dann Unterverband von $R(\mathfrak{R})$ und als solcher komplementär modular. $R(\mathfrak{R})$ und $\bar{R}(\mathfrak{R})$ haben dann gleiches Zentrum; Irreduzibilität von \mathfrak{R} und $\bar{R}(\mathfrak{R})$ sind gleichbedeutend und treten genau dann ein, wenn das Zentrum von \mathfrak{R} ein Körper ist. In regulären Ringen läßt sich Perspektivität von Elementen aus $\bar{R}(\mathfrak{R})$ auch algebraisch kennzeichnen durch das Vorhandensein sog. Faktorkorrespondenzen, gewisser reziproker Abbildungen der beiden Ideale aufeinander. Unter einer reellen Rangfunktion R eines regulären Ringes \mathfrak{R} wird eine Abbildung von \mathfrak{R} in Δ_∞ verstanden, die genau für 0 verschwindet, $R(1) = 1$, $R(\alpha\beta) \leq \min(R(\alpha), R(\beta))$ und für orthogonale Idempotenten auch $R(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = R(\varepsilon_1) + R(\varepsilon_2)$ erfüllt; durch $R(\alpha - \beta)$ erhält man dann eine Metrik, für die Addition, Multiplikation und R stetig sind: für $(\alpha)_r$ aus $\bar{R}(\mathfrak{R})$ gibt $m((\alpha)_r) = R(\alpha)$ eine positive modulare Funktion auf $\bar{R}(\mathfrak{R})$, und metrische Komplettheit impliziert Stetigkeit von $\bar{R}(\mathfrak{R})$. Kapitel VII: Ein regulärer Ring \mathfrak{R} heißt *stetig*, wenn $\bar{R}(\mathfrak{R})$

stetig ist (vgl. Maeda, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 14, 1 -7 (1950)); dann ist das Zentrum von $\bar{R}(\mathfrak{K})$ vollständig und daher auch der ihm isomorphe Verband \mathfrak{Z}_e ; die Werte der Dimensionsfunktion von $\bar{R}(\mathfrak{K})$ können daher als stetige Funktionen auf dem Raum Ω der Maximalideale von \mathfrak{Z}_e betrachtet werden. Durch $R(\lambda) = D((\lambda)_r)$ erklärt man nun die Rangfunktion von \mathfrak{K} (und man käme zur gleichen Funktion, würde man die entsprechende Definition für Linkshauptideale aussprechen) mit $R(\lambda) = 1$ genau für invertierbare λ , $R(\lambda) = R(\beta)$ genau wenn $\alpha = \pi_1 \beta \pi_2$ mit invertierbaren π_1, π_2 , $R(\alpha\beta) \leq \min(R(\alpha), R(\beta))$, $R(\alpha + \beta) \leq R(\alpha) + R(\beta)$, $R(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = R(\varepsilon_1) + R(\varepsilon_2)$ für orthogonale Idempotente; umgekehrt ist eine Funktion R_1 von \mathfrak{K} in die Menge der Funktionen von Ω in Δ_∞ schon gleich R , wenn nur für alle α, β gilt $R_1(\alpha\beta) \leq R_1(\alpha)$ oder für alle α, β gilt $R_1(\alpha\beta) \leq R_1(\beta)$, weiter $R_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = R_1(\varepsilon_1) + R_1(\varepsilon_2)$ für orthogonale Idempotente, und für ε aus \mathfrak{Z}_e auch $(R_1(\varepsilon))(\mathfrak{p}) = 0$, falls $\varepsilon \in \mathfrak{p}$, $(R_1(\varepsilon))(\mathfrak{p}) = 1$, falls $\varepsilon \notin \mathfrak{p}$; diese letzte Eigenschaft ist für R auch erfüllt. Im irreduziblen Fall sind die $R(\lambda)$ konstant; ein irreduzibler regulärer Ring ist genau dann stetig, wenn er eine reelle Rangfunktion R besitzt und für sie metrisch komplett ist; dann wird $R(\lambda) = D((\lambda)_r)$. Für stetiges reguläres \mathfrak{K} werden durch $J(\alpha) = \{(\alpha)_r; (\lambda)_r \subseteq \alpha\}$, $\alpha(J) = \{\lambda; (\lambda)_r \in J\}$ reziproke Abbildungen zwischen den maximalen Idealen von \mathfrak{K} und den maximalen neutralen Idealen von $\bar{R}(\mathfrak{K})$ gegeben; \mathfrak{K} ist isomorph einem subdirekten Produkt der einfachen stetigen regulären Ringe \mathfrak{K}/α . Kapitel VIII: Sei L komplementär modular; ein unabhängiges System von n paarweise perspektiven Elementen a_i , dessen Supremum die Eins ist, heißt n -gliedrige *homogene Basis*, n eine *Ordnung* von L . L_{ij} sei die Menge der Komplemente von a_j in $a_i \cup a_j$; wenn $b_{ij} \in L_{ij}$, $b_{jk} \in L_{jk}$, so sei $b_{ij} \otimes b_{jk} = (b_{ij} \cup b_{jk}) \cap (a_i \cup a_k)$; es lassen sich c_{ij} in L_{ij} so finden, daß $c_{ij} = c_{ji}$, $c_{ik} = c_{ij} \otimes c_{jk}$; c_{1i} wählt man etwa mit $a_1 \sim_{c_{1i}} a_i$ ($i = 2, \dots, n$), $c_{11} = 0$, und setzt dann $c_{ij} = c_{11} \otimes c_{1j}$; das Paar, bestehend aus der homogenen Basis und der Abbildung $(a_i, a_j) \rightarrow c_{ij}$ (c_{ij} mit den erstgenannten Eigenschaften) heißt ein *normierter Rahmen* $\{a_i, c_{ij}\}$ von L . Sei nun ein solcher mit $n \geq 4$ fest gegeben, seien i, j, r, s ganze Zahlen zwischen 1, n mit $i \neq j$, $r \neq s$; wenn $i = r$, $j = s$, so sei $P_{ij:rs}$ die identische Abbildung von $[0, a_i \cup a_j]$ auf sich; wenn $i = r$, $j \neq s$, so hat man $a_i \cup a_j \sim_x a_r \cup a_s$ mit $x = c_{js}$, dann sei $P_{ij:rs}$ die zu x gehörige perspektive Abbildung von $[0, a_i \cup a_j]$ auf $[0, a_r \cup a_s]$; entsprechend, wenn $i \neq r$, $j = s$. Damit ist der Fall erledigt, daß $(i, j: r, s)$ eine Transposition ist; eine beliebige Permutation zerlegt man in ein Produkt von Transpositionen und definiert $P_{ij:rs}$ als Produkt der zugehörigen Abbildungen; dies erweist sich zunächst bei Anwendung auf b_{ij} aus L_{ij} als unabhängig von der Zerlegung; man zeigt aber, daß L von den L_{tu} ($t, u = 1, \dots, n$) erzeugt wird — $[0, a_i \cup a_j]$ also von L_{ij}, L_{ji} — und die hier betrachteten Abbildungen sind ja Isomorphismen. Genau auf die gleiche Art kann man auch Abbildungen $P_{i_1 \dots i_m: j_1 \dots j_m}$ erklären ($m < n$), da, wenn $i_p = j_p$ für alle $p \neq r$, $i_r \neq j_r$, dann auch $\bigcup_p a_{i_p} \sim_x \bigcup_p a_{j_p}$ mit $x = c_{rj_r}$. Kapitel IX: Sei \mathfrak{S} ein Ring mit Eins; ist \mathfrak{S} regulär und gibt es Elemente ε_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) mit $\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kh} = \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ih}$ (ε_{jk} das Kronecker-Delta), $\sum_i \varepsilon_{ii} = 1$, so heißt n eine *Ordnung* von \mathfrak{S} ; durch $a_i = (\varepsilon_{ii})_r$, $c_{ij} = (\varepsilon_{ii} \quad \varepsilon_{ji})_r$ erhält man einen normierten Rahmen von $\bar{R}(\mathfrak{S})$, und umgekehrt läßt sich jeder normierte Rahmen von $\bar{R}(\mathfrak{S})$ aus geeigneten ε_{ij} auf diese Art gewinnen; auch im nicht-regulären Fall liefert $x \rightarrow (\lambda_{ij})$ mit $\lambda_{ij} = \varepsilon_{1i} x \varepsilon_{j1}$ einen Isomorphismus von \mathfrak{S} auf den vollen Matrizenring \mathfrak{M}_n des Ringes \mathfrak{K} der π mit $\pi \varepsilon_{11} = \varepsilon_{11} \pi = \pi$. Ein Ring \mathfrak{S} ist genau dann regulär, wenn \mathfrak{S}_n für ein positives n regulär ist; mit Hilfe der Basismatrizen E_{ik} findet man dann einen normierten Rahmen der Ordnung n von $\bar{R}(\mathfrak{S}_n)$. Sei \mathfrak{S} ein Ring mit Eins; zwischen den Idealen α aus $R(\mathfrak{S}_n)$ und den Unterräumen M des Rechtsvektorraumes $V(\mathfrak{S}, n)$ (der n -gliedrigen Folgen in \mathfrak{S}) findet man reziproke

Abbildungen und damit einen Isomorphismus der zugehörigen Verbände, indem $M(a)$ die Vektoren $\sum_i e_i \alpha_{i1}$ mit $(\alpha_{ij}) \in a$ enthalte (e_i der Vektor mit 1 an der i -ten Stelle und 0 an allen übrigen), $a(M)$ die Matrizen (α_{ij}) mit $\sum_i e_i \alpha_{ij} \in M$ ($j = 1, \dots, n$); wenn $a = ((\alpha_{ij}))_r$, so wird $M(a)$ von den Vektoren $\sum_i e_i \alpha_{ij}$ ($j = 1, \dots, n$) erzeugt; ist \mathfrak{S} regulär, so für endlich erzeugte M auch $a(M)$ in $\bar{R}(\mathfrak{S}_n)$. Ist \mathfrak{S} Schiefkörper, so \mathfrak{S}_n irreduzibel und halbeinfach, also $\bar{R}(\mathfrak{S}_n) = R(\mathfrak{S}_n)$ endlichdimensional irreduzibel komplementär modular, also ist auch der dazu isomorphe Unterraumverband von $V(\mathfrak{S}_n)$ ein $(n-1)$ -dimensionaler projektiver Raum. Ist \mathfrak{S} regulär, so gehen für den (aus den E_{ik} bestimmten) normierten Rahmen $\{a_i, c_{ij}\}$ die a_i über in die Unterräume (e_i) , die c_{ij} in die Unterräume $(e_i - e_j)$; wenn $i \neq j$, wird durch $M(b_{ij}) = (e_i - e_j)\beta$ eine umkehrbare Abbildung $b_{ij} \rightarrow \beta$ von $L_{a_i a_j}$ auf \mathfrak{S} gegeben; das Original von β dabei wird auch $(\beta)_{ij}^*$ geschrieben. In $\bar{R}(\mathfrak{S}_n)$ setzt man $(\beta)_{(k)}^* = ((\beta)_{ik}^* \cup a_i) \cap a_k$, was von der Wahl des i unabhängig ist, und erhält durch $(\beta)_{(k)}^* \rightarrow (\beta)_r$ einen Isomorphismus von $[(0), a_k]$ auf $\bar{R}(\mathfrak{S})$. Hat man zwei reguläre Ringe $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$ mit Ordnungen größer oder gleich 3, so wird jeder Verbandsisomorphismus von $\bar{R}(\mathfrak{S})$ auf $\bar{R}(\mathfrak{S}')$ von genau einem Ringisomorphismus induziert: man stelle $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$ wie oben als $\mathfrak{R}_n, \mathfrak{R}'_n$ dar und verwende die Abbildungen zwischen \mathfrak{R} und $L_{a_i a_j}$, \mathfrak{R}' und $L_{a'_i a'_j}$. Für \mathfrak{S} mit $n \geq 4$ sei $i, j, k, h = 1, \dots, n$; $i \neq j, k \neq h, b_{ij} \in L_{a_i a_j}$ und $P_{ij;kh} b_{ij} = b_{kh}$; dann werden alle diese b_{ij} auf das gleiche β in \mathfrak{S} abgebildet; ferner hat man für irgend paarweise verschiedene i, j, k und für β, δ aus \mathfrak{S} auch $(\delta \beta)_{ij}^* = (\beta)_{ik}^* \otimes (\delta)_{kj}^*$, und $(\beta + \delta)_{ij}^*$ läßt sich verbandsalgebraisch durch $(\beta)_{ij}^*, (\delta)_{ij}^*$ und geeignete a_k, c_{ik} ausdrücken — das verwendet nun Kapitel X: Sei L komplementär modular mit einem festen normierten Rahmen, $n \geq 4$; eine Folge (b_{ij}) mit $b_{ij} \in L_{ij}$, $P_{ij;kh} b_{ij} = b_{kh}$, $i, j, k, h = 1, \dots, n, i \neq j, k \neq h$, heißt eine L -Zahl β ; b_{ij} die (i, j) -Komponente $(\beta)_{ij}$ von β — jedes Element von L_{ij} ($i \neq j$) ist (i, j) -Komponente einer eindeutig bestimmten L -Zahl. Sei \mathfrak{S}^L die Menge der L -Zahlen; zu β, δ aus \mathfrak{S}^L und paarweise verschiedenen r, s, t wählt man π mit der (r, t) -Komponente $(\beta)_{rs} \otimes (\delta)_{st}$; man findet für alle paarweise verschiedenen i, j, k dann $(\beta)_{ik} \otimes (\delta)_{kj} = (\pi)_{ij}$ und setzt $\delta\beta = \pi$; weiter setzt man $\beta + \delta$ gleich der L -Zahl mit der (r, t) -Komponente $((\beta)_{rt} \cap c_{rs}) \cap (a_s \cup a_t)$, $((\delta)_{rt} \cap c_{rs}) \cap (c_{rs} \cup a_t)) \cap (a_r \cup a_t)$; wieder gilt für alle paarweise verschiedenen i, j, k dann $(\beta + \delta)_{ij} = (((\beta)_{ij} \cup c_{ik}) \cap (a_k \cup a_j)) \cup (((\delta)_{ij} \cup a_k) \cap (c_{ik} \cup a_j)) \cap (a_i \cup a_j)$. Dadurch wird \mathfrak{S}^L zu einem Ring mit Eins, dem *Hilfsring* von L , wobei $(1)_{ij} = c_{ij}$, $(0)_{ij} = a_i$ ($i \neq j$). Ist \mathfrak{S} regulär, $L = \bar{R}(\mathfrak{S}_n)$, so ist $\beta \rightarrow \beta^* = ((\beta)_{ij}^*)$ ($i, j = 1, \dots, n; i \neq j$) ein Isomorphismus von \mathfrak{S} auf \mathfrak{S}^L mit $(\beta^*)_{ij} = (\beta)_{ij}^*$. Kapitel XI: \mathfrak{S}^L erweist sich nun sogar als regulär; setzt man für β aus \mathfrak{S}^L noch $(\beta)_{(k)} = ((\beta)_{ik} \cup a_i) \cap a_k$ (dies ist unabhängig von i), so gibt $(\beta)_{(k)} \rightarrow (\beta)_r$ einen Isomorphismus von $[0, a_k]$ auf $\bar{R}(\mathfrak{S}^L)$; dabei entsprechen sich die Paare in a_k komplementärer Elemente und die Paare der Hauptideale, die von Idempotenten der Summe Eins erzeugt werden. Man konstruiert nun einen Isomorphismus von L auf $\bar{R}(\mathfrak{S}_n^L)$; nach dem Bisherigen hat man Darstellungen der Elemente von $[0, a_i]$ durch die $(\beta)_{(i)}$, derer von $[(0), a_i]$ durch die $(\beta)_{(i)}^*$, derer von L_{ij} durch die $(\beta)_{ij}$, derer von $L_{a_i a_j}$ durch die $(\beta)_{ij}^*$; ein Isomorphismus von $\left[0, \bigcup_{i=1}^m a_i\right]$ auf $\left[(0), \bigcup_{i=1}^m a_i\right]$ mit $(\beta)_{(i)} \rightarrow (\beta)_{(i)}^*$, $(\beta)_{ij} \rightarrow (\beta)_{ij}^*$ für alle β aus \mathfrak{S}^L heiße J_m ; mit $\beta = 1, m = n$ sieht man, daß der normierte Rahmen von L auf den vermittelt der Basismatrizen konstruierten normierten Rahmen von $\bar{R}(\mathfrak{S}_n^L)$ abgebildet wird. J_1 existiert wegen des Isomorphismus von $[0, a_1]$ auf $\bar{R}(\mathfrak{S}^L)$ und wegen des Isomorphismus von $\bar{R}(\mathfrak{S}^L)$ auf $[(0), a_1]$; sei nun J_{n-1} bereits konstruiert, und sei u aus $\left[0, \bigcup_{j=1}^n a_j\right]$. Sei

$v = u \cap \bigcup_{j=1}^{n-1} a_j$, w das Komplement von v in u , w' das Komplement von $w \cap \bigcup_{j=1}^{n-1} a_j$;
 dann ist $w'' = w \cup w'$ Komplement von $\bigcup_{j=1}^{n-1} a_j$, $w'' \sim_x a_n$ mit $x = \bigcup_{j=1}^{n-1} a_j$; sei u_n
 das Bild von w bei der zugehörigen perspektiven Abbildung, und für $i = 1, \dots, n-1$
 sei $u_{ni} = \left(w'' \cap \bigcup_{j=1, j \neq i}^{n-1} a_j \right) \cap (a_i \cup a_n)$; dann liegt u_{ni} in L_{ni} , und man hat
 $w = \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} a_j \cap u_n \right) \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} \left(\bigcup_{j=1, j \neq i}^{n-1} a_j \cap u_{ni} \right)$. Man bilde nun u_n zunächst vermöge
 des Isomorphismus zwischen $[0, a_n]$ und $\bar{R}(\mathfrak{Z}^L)$ und dann vermöge des Isomorphismus
 zwischen $R(\mathfrak{Z}^L)$ und $[(0), a_n]$ auf ein Ideal u_n ab, weiter u_{ni} zuerst auf die (wegen
 $u_{ni} \in L_{ni}$ eindeutig bestimmte) zugehörige L -Zahl und diese vermöge des Isomorphismus
 zwischen \mathfrak{Z}^L und $L_{a_n a_i}$ auf ein Ideal u_{ni} ; damit setze man $J_n(u) = J_{n-1}(v) \cap$
 $\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} a_j \cap u_n \right) \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} \left(\bigcup_{j=1, j \neq i}^{n-1} a_j \cap u_{ni} \right)$; dies erweist sich in der Tat als Isomor-
 phismus der gewünschten Art. Damit hat man die Matrizendarstellung eines modu-
 laren komplementären Verbandes L einer Ordnung $n \geq 4$: hat man allgemeiner L
 isomorph auf $\bar{R}(\mathfrak{R})$ mit einem regulären Ring \mathfrak{R} abgebildet, so muß nach oben
 Bemerktem \mathfrak{R} isomorph zu \mathfrak{Z}_n^L sein: schließlich ist dann L auch isomorph zum Ver-
 band der endlich erzeugten Unterräume von $V(\mathfrak{Z}^L, n)$. Im klassischen Fall einer
 $(n-1)$ -dimensionalen projektiven Geometrie L wählt man die a_i als Atome; dann
 erweist sich \mathfrak{Z}^L als Schiefkörper, so daß wegen $\bar{R}(\mathfrak{Z}_n^L) = R(\mathfrak{Z}_n^L)$, L dem Rechts-
 idealverband von \mathfrak{Z}_n^L und dem Unterraumverband von $V(\mathfrak{Z}^L, n)$ isomorph wird. —
 Kapitel XII verschärft die Ergebnisse für den Fall orthokomplementärer modularer
 Verbände (vgl. Maeda, dies. Zbl. 54, 17): das sind modulare Verbände mit Null,
 Eins und einem involutorischen Antiautomorphismus $a \rightarrow a^\perp$ mit $a \cap a^\perp = 0$ für
 alle a . Bei regulärem \mathfrak{R} sind die Abbildungen $a \rightarrow a^l$ (Linksannulator), $b \rightarrow b^r$
 (Rechtsannulator) reziproke Antiisomorphismen zwischen $\bar{R}(\mathfrak{R})$ und $\bar{L}(\mathfrak{R})$ (Links-
 hauptidealverband); betrachtet man den inversen Ring, so findet man für einen
 [involutorischen] Antiautomorphismus $\chi \rightarrow \chi^*$ von \mathfrak{R} einen [involutorischen] Anti-
 automorphismus $(x)_r \rightarrow (\chi^*)_r$ von $\bar{R}(\mathfrak{R})$, und hat \mathfrak{R} eine Ordnung $n \geq 3$, so
 läßt sich jeder Antiautomorphismus von $\bar{R}(\mathfrak{R})$ auf genau eine Art so gewinnen:
 hat \mathfrak{R} eine Ordnung $n \geq 2$, so ist mit dem Antiautomorphismus von $\bar{R}(\mathfrak{R})$ auch
 der von \mathfrak{R} involutorisch, $\chi \rightarrow \chi^*$ macht $\bar{R}(\mathfrak{R})$ genau dann orthokomplementär,
 wenn aus $\chi \in \mathfrak{R}$ folgt $(\chi)_r = (\varepsilon)_r$ mit $\varepsilon \varepsilon = \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon^*$; dieses ε ist eindeutig,
 $(1 - \varepsilon)_r$ Orthokomplement von $(\varepsilon)_r$. Ist $\chi \rightarrow \chi^*$ involutorischer Antiautomorphismus
 des regulären \mathfrak{Z} , π_i invertierbar mit $\pi_i = \pi_i^*$ ($i = 1, \dots, n$), und gilt für alle
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, daß $\sum_i \alpha_i^* \pi_i \alpha_i = 0$ auch $\alpha_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$) zur Folge hat, so be-
 stimmt die letzte Summe über $V(\mathfrak{Z}, n)$ ein inneres Produkt: eine definite *-Semi-
 bilinearform: setzt man in \mathfrak{Z}_n fest $(\alpha_{ij}) \rightarrow (\alpha_{ij})^* = (\pi_i^{-1} \alpha_i^* \pi_j)$, so ist dies ein in-
 volutorischer Antiautomorphismus, der $\bar{R}(\mathfrak{Z}_n)$ orthokomplementär macht; Ortho-
 gonalität in $\bar{R}(\mathfrak{Z}_n)$ entspricht dabei der Orthogonalität für das innere Produkt
 bei den zugehörigen Unterräumen von $V(\mathfrak{Z}, n)$. Ist L orthokomplementär modular
 mit einer Ordnung $n \geq 4$, so lassen sich die Elemente der homogenen Basis als
 paarweise orthogonal wählen; zu dem Isomorphismus von L auf den Verband der
 endlich erzeugten Unterräume von $V(\mathfrak{Z}^L, n)$ läßt sich in $V(\mathfrak{Z}^L, n)$ ein inneres Pro-
 dukt so erklären, daß Orthogonalität bezüglich desselben und Orthogonalität in L
 einander entsprechen: mit $a \rightarrow a^\perp$ in L hat man eine entsprechende Abbildung im
 isomorphen $\bar{R}(\mathfrak{Z}_n^L)$, also eine Abbildung $A \rightarrow A^*$ in \mathfrak{Z}_n^L , und da aus $A E_{11} =$
 $= E_{11} A = A$ auch $A^* E_{11} = E_{11} A^* = A^*$ folgt, läßt sich diese nach \mathfrak{Z}^L über-

tragen. — Im Anhang findet sich ein wichtiger Satz von Iwamura [Zenkoku Shijo Sugaku Danwakai 262, 107—111 (1944)], nach dem jede unendliche gerichtete Menge Vereinigung einer monotonen transfiniten Folge gerichteter Teilmengen kleinerer Mächtigkeit ist. Daher ist es gleichbedeutend, in der Stetigkeitsbedingung mit *gerichteten Mengen* (wie in diesem Buche stets) oder mit *monotonen transfiniten Folgen* zu operieren.

W. Felscher.

Skornjakov, L. A.: Nicht-assoziative freie T -Summen von Körpern. Mat. Sbornik, n. Ser. 44 (86), 297—312 (1958) [Russisch].

Als Körper bezeichnet Verf. einen (nicht notwendig assoziativen) Ring, in dem für $a \neq 0$ die Gleichungen $ax = b$ und $ya = b$ eindeutig auflösbar sind. Die Existenz einer Eins wird nicht gefordert, doch lassen sich alle Überlegungen der Arbeit entsprechend auch für Körper mit Eins durchführen. Aus einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 78, 21) ist bekannt, daß jeder Körper eine Algebra über einem Primkörper im gewöhnlichen Sinn ist. Alle im folgenden betrachteten Algebren sollen den gleichen Grundkörper P haben. Ein T -Homomorphismus einer Algebra A ist eine Abbildung ϑ von A in eine um das Symbol ∞ vermehrte (nicht notwendig assoziative) Algebra, für die gilt: Aus $\vartheta(a)$, $\vartheta(b) = \infty$ folgt $\vartheta(a - b) = \vartheta(a) - \vartheta(b)$ und $\vartheta(ab) = \vartheta(a)\vartheta(b)$; aus $\vartheta(a) \neq 0$, $\vartheta(b) = \infty$ oder $\vartheta(a) = \infty$, $\vartheta(b) \neq 0$ folgt $\vartheta(ab) = \infty$. Verf. hatte (l. c.) als nicht-assoziative freie T -Erweiterung einer Algebra A eine kleinste Divisions-Oberalgebra B von A definiert, auf die sich jeder T -Homomorphismus von A in irgendeine Divisionsalgebra fortsetzen läßt. B ist bis auf Isomorphismen über A eindeutig bestimmt: wenn A nullteilerfrei ist, dann ist B ein Körper. In der vorliegenden Arbeit untersucht Verf. die nicht-assoziative freie T -Erweiterung einer nicht-assoziativen freien Summe [vgl. Kuroš, dies. Zbl. 41, 168; Mat. Sbornik, n. Ser. 37 (79), 251—264 (1955)] einer Familie von Körpern, kurz ihre freie T -Summe. Er beweist u. a. die folgenden Sätze: (1) Ist B_i die nicht-assoziative freie T -Erweiterung der nullteilerfreien Algebra A_i für $i \in I$, so ist die freie T -Summe der B_i gleich der nicht-assoziativen freien T -Erweiterung der nicht-assoziativen freien Summe der A_i . (2) Der von der Menge M über P frei erzeugte Körper K (siehe dies. Zbl. 78, 21) ist die freie T -Summe der von $m \in M$ über P frei erzeugten Körper K_m . (3) Ein Unterkörper H der freien T -Summe einer Familie von Körpern A_i und eines nicht-assoziativen freien Körpers F ist die freie T -Summe der Körper $A_i \cap H$ und möglicherweise eines nicht-assoziativen freien Körpers F_0 ; insbesondere ist jeder Unterkörper eines nicht-assoziativen freien Körpers ein nicht-assoziativer freier Körper. (4) Ein freies Erzeugendensystem eines endlich erzeugbaren nicht-assoziativen freien Körpers hat höchstens so viele Elemente wie irgendein anderes Erzeugendensystem. (5) Zwei nicht-assoziative freie Körper sind genau dann isomorph, wenn sie freie Erzeugendensysteme gleicher Mächtigkeit haben.

H. Salzmann.

Kostrikin, A. I.: On the local nilpotency of Lie rings that satisfy Engel's condition. Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 1074—1077 (1958) [Russisch].

Let L be a Lie ring satisfying E_n , the n -th Engel condition: $\{u v r \cdots r\} = 0$ (left normed with n factors v) and suppose that L is of characteristic 0 or prime characteristic $p > n - [\frac{1}{2}n]$. Then L is locally nilpotent. The author sketches the main steps in the proof of this result. It is enough to do this under the assumption that the radical of L (Kostrikin, s. this Zbl. 79, 261) is zero. Let $c_{(m)}$ be an element $\neq 0$ such that $[v c_{(m)} u^\alpha c_{(m)}] = 0$ for $\alpha = 0, 1, \dots, 2m-1$, for all u and $v \in L$. Then a Lie ring satisfying E_n and of characteristic 0 or $p > n$ is locally nilpotent if it contains an element $c_{(2)}$. A further lemma asserts that if L satisfies E_n and has characteristic $p > n + [\frac{1}{2}n]$ (or $p = 0$), then $(\text{ad } [u v^{n-1}])^2 = 0$ holds for all u and $v \in L$. — The author remarks that the methods used to prove the latter fact might allow the inequality $p > n + [\frac{1}{2}n]$ to be weakened to $p > n + 1$.

ut this would still exclude the critical case $p = n + 1$, on which a solution of the restricted Burnside problem could be made to depend. *P. M. Cohn.*

Patterson, E. M.: On certain classes of linear algebras of genus one. Proc. roy. Soc. Edinburgh, Sect. A **65**, 63—71 (1958).

Unter Benutzung früherer Resultate (vgl. Patterson, dies. Zbl. **78**, 24) klassifiziert Verf. die Jordanalgebren der Dimension $n \geq 4$ und vom Geschlecht Eins durch Angabe der Multiplikationsformeln. Es gibt drei solche Formeln, die für Jordanalgebren vom Geschlecht Eins charakteristisch sind. Ferner werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß eine lineare Algebra der Dimension $n \geq 3$ und vom Geschlecht Eins einfach ist. Schließlich gibt der Verf. eine Klassifikation der einfachen Jordanalgebren der Dimension $n \geq 4$ und vom Geschlecht Eins. Es zeigt sich, daß im Falle eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers diese Jordanalgebren mit den von A. A. Albert (dies. Zbl. **29**, 10) klassifizierten einfachen Jordanalgebren vom Grad zwei zusammenfallen.

E. Trost.

Divinsky, Nathan: *D-regularity*. Proc. Amer. math. Soc. **9**, 62—71 (1958).

An element x in a ring A is said to be right *D-regular* (r. D. r.) if $x \in xA$. Left *D-regularity* (l. D. r.) is defined analogously. An r. D. r. right ideal is a right ideal all of whose elements are r. D. r. Since the sum of r. D. r. right ideals is again one, there exists a maximal r. D. r. right ideal M_R (it is not hard to see that it is actually two-sided). M_L is defined analogously as the maximal l. D. r. left ideal. In this paper the author investigates the consequences of the conditions $M_R = 0$, $M_R = M_L = 0$, $M_R = A$, $M_R = M_L = A$ in the presence of various chain conditions. Some of the results are as follows: Theorem 5. For rings A in which every nonzero right ideal contains minimal right ideals the condition $\bigcap_n A^n = 0$ is equivalent to $M_R = 0$ and $\bigcap_n A^n$ contains no nonzero x such that $xA = 0$. Theorem 7. For rings A in which every one sided ideal contains minimal one sided ideals, $\bigcap_n A^n = 0$ is equivalent to $M_R = M_L = 0$ and $\bigcap_n A^n$ contains no nonzero element x such that $xA = Ax = 0$. Although the author states these theorems with the descending chain condition they can be proved in the more general context stated above by observing that $M_R = 0$ implies that $IA = 0$ for any minimal right ideal I . This, in turn, implies $SA = 0$ where S is the right socle of A . But in the class of rings mentioned above, S has a nonzero intersection with every nonzero right ideal. Thus $A^n \neq 0$ implies $\bigcap_n A^n \cap S \neq 0$ and $(\bigcap_n A^n \cap S)A \neq 0$. The analogous proof of Theorem 7 requires looking at the intersection of the left and the right socle.

J. P. Jans.

MacLane, Saunders: Extensions and obstructions for rings. Illinois J. Math. **2**, 316—345 (1958).

A theory of ring extensions and the associated (ring) cohomology theory is given, which is elegant in its parallelism with the theory of group extensions as developed by Eilenberg-MacLane (this Zbl. **29**, 341). Both the multiplicative structure and the additive structure are dealt with simultaneously. The required cohomology groups are those of the author [cf. Centre Belge Rech. math., Colloque de Topologie Algébrique, Louvain les 11, 12 et 13 juin 1956, 55—80 (1957)]. Equivalence classes of extensions of "zero" rings K (rings in which $ab = 0$ for all $a, b \in K$) by rings A are found to be in a one-one correspondence with a second cohomology group $H^2(1, K)$. Just as group extensions of abelian groups are classified. In case K is not a zero ring, the theory develops the analogues of the Q -kernels of group extension theory of non-abelian groups, and as in that theory the vanishing of an obstruction in a certain third cohomology group $H^3(1, -)$ is necessary and sufficient for the existence of extensions, which, when they exist, are classified by means of $H^2(1, -)$. Such

added complication as there is, in moving over from group extension theory, is due to the slightly more complicated cohomology groups which are required.

W. H. Cockcroft.

Reiner, Irving: A theorem on continued fractions. Proc. Amer. math. Soc. 8, 1111—1113 (1958).

Let $[a_1, \dots, a_n] \sim P/Q$ denote the simple continued fraction whose successive quotients a_1, \dots, a_n are elements of a field K , and P and Q denote the formal numerator and denominator, respectively, of this continued fraction. Let K be a skew field, and let $R = K[x]$ be the ring of polynomials in an indeterminate x with coefficients in K , where it is assumed that x commutes with all elements of K . For $f_1, \dots, f_n \in R$, define $[f_1, \dots, f_n] \sim P/Q$. Let $f \rightarrow f^*$ denote any homomorphism of $(R, +)$ into itself which leaves K elementwise fixed, and satisfies $(af)^* = af^*$ for all $a \in K$, $f \in R$. Then the following theorem is proved: If $f_1, \dots, f_k \in R$ are such that $[f_1, \dots, f_k] \sim P/Q$ where $P, Q \in K$, then also $[f_1^*, \dots, f_k^*] \sim P/Q$.

E. Frank.

Northcott, D. G.: On irreducible ideals in local rings. J. London math. Soc. 32, 82—88 (1957).

Sei Q ein Stellenring, \mathfrak{m} sein maximales Ideal; unter der Dimension d von Q werde der Rang von \mathfrak{m} verstanden [vgl. [1], Northcott, Ideal theory (1953: dies. Zbl. 52, 268), p. 63.] Eine Menge von $d \geq 1$ Elementen, welche ein zu \mathfrak{m} gehöriges Primärideal erzeugen, heiße ein Parametersystem (system of parameters, [1], p. 64). Ein Stellenring heiße regulär, wenn die Anzahl der Elemente einer Minimalbasis von \mathfrak{m} gleich d ist, wenn also \mathfrak{m} ein Ideal der Hauptklasse ist ([1], p. 70). Ein Satz von Grbner ([3] (angezeigt in dies. Zbl. 42, 265), S. 142) läßt sich dann so formulieren: In einem regulären Stellenring ist jedes durch ein Parametersystem erzeugbare Ideal irreduzibel. Durch eine Verallgemeinerung des Begriffes des regulären Stellenringes gelingt dem Verf. eine Verallgemeinerung dieses Satzes. Dazu wird folgende Definition eingeführt: Ein Stellenring Q der Dimension d ($d \geq 1$) heißt halbbregulr, wenn für jedes Parametersystem v_1, v_2, \dots, v_d das Ideal \mathfrak{m} kein zugehöriges Primideal zum Ideal $(v_1, v_2, \dots, v_{d-1})$ ist. Verf. zeigt zunächst, daß dies tatsächlich eine Verallgemeinerung ist, daß also jeder reguläre Stellenring der Dimension d ($d \geq 1$) halbbregulr ist (Theorem 1). Weiter zeigt Verf.: Ist Q ein halbbregulrer Stellenring der Dimension d ($d \geq 1$) und v_1, v_2, \dots, v_d ein Parametersystem, dann ist $Q/(v_1, v_2, \dots, v_i)$ ein halbbregulrer Stellenring der Dimension $d - i$ für $0 \leq i \leq d - 1$ (Theorem 2). Ist nun \mathfrak{q} ein zu \mathfrak{m} gehöriges Primrideal in einem beliebigen Stellenring Q und $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_N$ eine unverkrzbare Durchschnittsdarstellung durch irreduzible zu \mathfrak{m} gehörige Primrideale, dann ist nach Grbner ([2] (angezeigt in dies. Zbl. 9, 290), Satz 3, S. 204) $N = N(\mathfrak{q})$ gleich der Ideallnge von \mathfrak{q} nach \mathfrak{q} ; \mathfrak{m} , in Zeichen: $N = N(\mathfrak{q}) = L[(\mathfrak{q}:\mathfrak{m})/\mathfrak{q}]$; Verf. bezeichnet diese Größe als Reduzibilittsindex von \mathfrak{q} ; es gilt $N \geq 1$; \mathfrak{q} ist dann und nur dann irreduzibel, wenn $N = 1$ ist ([2], Satz 4a, S. 205). Als Hauptergebnis zeigt nun Verf., daß bei einem d -dimensionalen ($d \geq 1$) halbbregulren Stellenring Q der Reduzibilittsindex eines durch ein Parametersystem erzeugten Primrideals nur von Q und nicht von der Wahl des Parametersystems abhängt (Theorem 3); anders ausgedrückt: Alle durch Parametersysteme erzeugten Primrideale besitzen denselben Reduzibilittsindex, haben also die gleiche Anzahl irreduzibler Komponenten. Ist nun Q ein regulärer (also nach Theorem 1 erst recht halbbregulrer) Stellenring, also \mathfrak{m} ein Ideal der Hauptklasse, so ist \mathfrak{m} selbst ein durch ein Parametersystem erzeugbares Ideal; nach Theorem 3 ist also der Reduzibilittsindex eines jeden durch ein Parametersystem erzeugten Ideals gleich dem von \mathfrak{m} . Dieser aber ist gleich 1, d. h. jedes durch ein Parametersystem erzeugte Ideal ist irreduzibel (Theorem 4). Dies aber ist gerade die Aussage des eingangs erwähnten Satzes von Grbner ([3], S. 142), der somit als Spezialfall von Theorem 3 erkannt ist. *B. Renschuch.*

Schmid, Josef: Ein Beweis eines Dimensionssatzes der algebraischen Geometrie. Arch. der Math. 8, 39—42 (1957).

Es handelt sich um folgenden Satz: Der Durchschnitt einer irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeit V der Dimension d mit einer Hyperfläche H besteht aus Komponenten derart, daß die isolierten unter ihnen alle die gleiche Dimension $d - 1$ haben. Idealtheoretisch ist dies der zweite Hauptidealsatz von W. Krull in der Fassung von W. Gröbner: Ist \mathfrak{p} ein beliebiges Primideal, so ist (\mathfrak{p}, f) immer pseudogemischt [vgl. Gröbner, Moderne algebraische Geometrie (dies. Zbl. 33, 127), S. 144, und in allgemeinerer Fassung W. Krull, S.-Ber. Heidelberger Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. 1928, 7. Abh. (1928)]. Unter der Eigenschaft, daß (\mathfrak{p}, f) pseudogemischt ist, versteht man folgendes: Sei

$$(\mathfrak{p}, f) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k \cap \mathfrak{q}_{k+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s$$

mit den zugehörigen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{k+1}, \dots, \mathfrak{p}_s$ und ist $\text{Dim. } \mathfrak{p}_\sigma = d - 1$ für $\sigma = 1, \dots, k$, aber $\text{Dim. } \mathfrak{p}_{k+\tau} \leq d - 2$ für $\tau = 1, \dots, s - k$, so existiert für jedes $\mathfrak{p}_{k-\tau}$ mindestens ein \mathfrak{p}_σ mit $\mathfrak{p}_{k-\tau} \supset \mathfrak{p}_\sigma$ ($\sigma = 1, \dots, k$); die allgemeine Nullstelle von $\mathfrak{p}_{k-\tau}$ entsteht also durch (relationstreue) Spezialisierung der allgemeinen Nullstelle von \mathfrak{p}_σ . Nun sind aber die allgemeineren Nullstellen $(z) = (z_1, \dots, z_n)$ von $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{k+1}, \dots, \mathfrak{p}_s$ ihrerseits Spezialisierungen der allgemeinen Nullstelle $(x) = (x_1, \dots, x_n)$ von \mathfrak{p} derart, daß $f(z) = 0$ wird. Der Satz kann also auch folgendermaßen formuliert werden: Zu jeder Spezialisierung $(x) \rightarrow (z)$ (über \mathfrak{f}) mit $f(z) = 0$ kann man eine Spezialisierung $(y) = (y_1, \dots, y_n)$ derart zwischenschalten, $(x) \rightarrow (y) \rightarrow (z)$, daß $f(y) = 0$ und die Dimension von (y) über \mathfrak{f} gleich $d - 1$ ist. In dieser Fassung wird der Satz vom Verf. vermittle zwei Hilfssätze bewiesen.

B. Renschuch.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Faith, Carl C.: Extensions of normal bases and completely basic fields. Trans. Amer. math. Soc. 85, 406—427 (1957). Errata. Ibid. 89, 559 (1959).

Let N/F be a normal extension. An element w of N is called a completely basic element to N/F if for each intermediate field A the set of all conjugates of w relative to N/A is a basis of N/A . The author proves firstly that each normal extension of an infinite field possesses at least one completely basic element. A normal extension N/F is called a complete basic extension (c. b. e.) if every element w of N which generates a normal basis of N/F is always a completely basic element of N/F . The author gives several sufficient conditions that N/F be a c. b. e., in particular, he proves that every Kummer extension is a c. b. e. He gives also a normal extension which is not a c. b. e. Normally, let F be a field which contains a primitive p^g -th root of unity ($g \geq 1$) but which does not contain a primitive p^{g-1} -th root ϱ of unity. Let $C_g = F(\varrho)$ and Z_{g+2} be a cyclic extension of C_g of degree p_{g-1} . Then Z_{g+2}/F is certainly not a c. b. e. Let a normal extension N/F be $N = N_1 \times \cdots \times N_i$ over F . If N/F is a c. b. e. then all N_k/F are also c. b. e. So finally the author considers the necessary and sufficient condition that a cyclic extension Z_e of prime power degree p^e over a field F which contains a primitive p -th root of unity be a c. b. e. Let $g = g(F, p)$ denote the largest integer for which the polynomial $x^{p^g} - 1$ factors linearly in F . Then the above condition can be stated that either $g(F, p) \geq e - 1$ or $g(Z_e, p) = g(F, p)$ in other cases.

Y. Kawada.

Fröhlich, A.: On a method for the determination of class number factors in number fields. Mathematika, London 4, 113—121 (1957).

Mit Hilfe der Hilbertschen Theorie des galoisschen Körpers insb. der Trägheitsgruppe und der p -adischen Erweiterung leitet Verf. einige Sätze über die Klassenzahl einer gewissen normalen Erweiterung eines algebraischen Zahlkörpers her.

Z. B. wird bewiesen: Die Klassenzahl eines galoisschen Körpers, dessen Grad eine Potenz einer Primzahl l ist und dessen Diskriminante nur einen einzigen Primteiler p besitzt, ist zu l teilerfremd. Ferner wird gezeigt u. a.: Die Klassenzahl des Körpers $P(\eta_l, \sqrt[p]{p})$, wobei P den rationalen Zahlkörper, p eine ungerade Primzahl und η_l eine primitive l -te Einheitswurzel ($l \text{ prim} \geq 3$) bedeutet, ist durch l teilbar, falls $p \equiv 1 \pmod{l}$ ist. Z. Suetuna.

Igusa, Jun-ichi: Class number of a definite quaternion with prime discriminant. Proc. nat. Acad. Sci. USA 44, 312—314 (1958).

Wie M. Deuring (s. dies. Zbl. 25, 20) bemerkte, ist die Idealklassenzahl h einer definiten Quaternionen-Algebra der Prim-Grundzahl p gleich der Anzahl der supersingulären elliptischen Funktionenkörper der Charakteristik p . Es sei $p > 2$ und der Funktionenkörper durch $y^2 = x(1-x)(\lambda-x)$ definiert. Dann ist einerseits die absolute Invariante $j = 2^8(1-\lambda(1-\lambda))^3\lambda^{-2}(1-\lambda)^{-2}$. Andererseits (M. Deuring, a. a. O. p. 253—255) die Hassesche Invariante

$$A(\lambda) = (-1)^r \sum_{i=0}^r \binom{r}{i}^2 \lambda^i, \quad r = \frac{1}{2}(p-1).$$

Verf. bemerkt, daß diese der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$\lambda(1-\lambda)A'' + (1-2\lambda)A' - \frac{1}{4}A = 0$$

genügt, woraus sich ergibt, daß $A(\lambda)$ nur einfache Nullstellen hat. Ein elliptischer Körper ist dann und nur dann supersingulär, wenn seine Hasse-Invariante 0 ist. Ferner gibt es zu jedem Wert von j i. a. 6 verschiedene Werte von λ , ausgenommen $j = 0$ und 12^3 . Mithin ist die gesuchte Anzahl h im wesentlichen der 6. Teil der Nullstellenanzahl von $A(\lambda)$, d. h. $(p-1)/12$. Bei geeigneter Berücksichtigung obiger Ausnahmewerte von j erhält man die vom Ref. erstmalig auf andere Weise bewiesene Formel (s. dies. Zbl. 17, 150). Vgl. auch M. Deuring, dies. Zbl. 29, 9 und 39, 29. M. Eichler.

● **Hasse, Helmut:** Über die Riemannsche Vermutung für Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper. (Univ. Madrid, Publ. Secc. Mat. Fac. Ci., Cursos I. Num. 2.) Madrid: Universidad de Madrid 1957. 142 S. [Spanisch].

Es handelt sich um eine vom Verf. überarbeitete und in einigen Punkten ausgestaltete Wiedergabe der Abhandlung von P. Roquette (s. dieses Zbl. 51, 273).

Lamprecht, Erich: Invariante Zetafunktionen arithmetischer Funktionenkörper. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 22, 71—83 (1958).

Es sei K ein algebraischer Zahlkörper und A ein algebraischer Funktionenkörper einer Variablen über K . Zu jedem über K transzendenten Element x aus A gehört eine Zetafunktion $Z_A(s; x)$, vgl. dazu Hasse, Zetafunktionen und L -Funktionen zu einem arithmetischen Funktionenkörper vom Fermatschen Typus; Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, math. naturw. Kl. 1954, Nr. 4, 70 S. (1955); ferner siehe auch: Lamprecht, dies. Zbl. 70, 36. In dieser Note wird gezeigt, wie $Z_A(s; x)$ von der Auswahl von x abhängt. Darüber hinaus wird die Existenz einer invarianten Zetafunktion nachgewiesen, die also nur von A und nicht von einer Erzeugung von A abhängt. Diese invariante Zetafunktion unterscheidet sich nur unwesentlich von jeder der Zetafunktionen $Z_A(s; x)$: sie ist jedoch „unvollständig“ in dem Sinne, daß gewisse endlich viele Primdivisoren \mathfrak{p} von K (die in A nicht „regulären“ \mathfrak{p}) keinen Beitrag zu $Z_A(s; x)$ liefern. Bei einer Reihe wesentlicher Spezialfälle wird der Einblick in die Natur der Zetafunktionen vertieft; insbesondere wird zusammengestellt, wieweit die analytische Fortsetzbarkeit zur Zeit gesichert ist. — Die Beweise stützen sich hauptsächlich auf bewertungstheoretische Überlegungen, insbesondere auf Eigenschaften von Funktionalprimdivisoren; ferner werden zweirangige Bewertungen von A untersucht. Einige Aussagen, die Verf. früher (s. dies. Zbl. 70, 37; 71, 35) nur

unter der Voraussetzung bewiesen hat, daß K ein algebraischer Funktionenkörper einer Variablen ist, werden hier für den Zahlkörperfall ausgesprochen.

P. Roquette.

Terpstra, Fedde J.: On a set of rings contained in a field of rational functions. *Math. Ann.* **133**, 41—51 (1957).

Es sei K rationaler Funktionenkörper in zwei Unbestimmten über einem algebraisch-abgeschlossenen Körper k . Sind u, v zwei Erzeugende von K/k , so werde unter dem Punkt $P = \{u, v\}$ derjenige Unterring von K verstanden, der aus allen rationalen Funktionen $A(u, v)/B(u, v)$ mit $B(0, 0) \neq 0$ besteht. Verf. gibt eine explizite Übersicht über alle Punkte P' , die ein vorgegebenes P umfassen (Nachfolger von P). Resultate: P' ist kleinster (erster) Nachfolger von P dann und nur dann, wenn $P' = \{x_1, y_1\}$ und $P = \{x_1 y_1, x_1\}$ mit geeigneten $x_1, y_1 \in K$. Aus vorgegebenen x, y mit $P = \{x, y\}$ erhält man ein derartiges Paar durch den Ansatz $x_1 y_1 = p x - q y$, $x_1 = r x + s y$, wobei $p, q \in k$ so zu bestimmen sind, daß

$$(1) \quad o_{P'}(p x + q y) > \text{Min}(o_{P'}(x), o_{P'}(y))$$

wird. $o_{P'}$ ist dabei eine naheliegende Bewertung im Ring der formalen Potenzreihen in x_1, y_1 , der ja P' enthält. Verf. zeigt nun, daß es zu einem beliebigen (nicht notwendig ersten) Nachfolger P' von P stets ein bis auf einen gemeinsamen Faktor eindeutig bestimmtes Paar $p, q \in k$ gibt, für welches die Beziehung (1) erfüllt ist. Daraus folgt schließlich, daß man P' mit P durch eine eindeutig bestimmte endliche Kette $P_0 = P \subset P_1 \subset P_2 \cdots \subset P_i = P'$ verbinden kann, wobei P_{j+1} erster Nachfolger von P_j ist.

H. W. Knobloch.

Zahlentheorie:

• **Holzer, Ludwig:** Zahlentheorie. Teil I. (Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek. 13.) Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1958. VI, 202 S. DM 9,75.

Unter den gewichtigen Neuerscheinungen oder Übersetzungen der letzteren Zeit auf dem Gebiete der Zahlentheorie als eigenständiges und beachtliches Werk zu bestehen, ist gewiß keine leichte Aufgabe, wurde aber vom vorliegenden Buch in trefflicher Weise gelöst. Für den — allerdings in moderner Algebra wohlbewanderten — Leser bietet sich eine sehr angenehme Darstellung, weder zu weitläufig, noch zu gedrängt. Besonders hervorzuheben wäre die neuartige sehr elegante Herleitung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes durch Gaußsche Summen über einem Galoisfeld, welche schließlich kaum noch einen Rechenaufwand erfordert. Dabei wird für die — zum Beweis hier nicht nötige — sehr schwierige Vorzeichenbestimmung der Gaußschen Summen über dem rationalen Bereich auf den bevorstehenden Teil II verwiesen. — Inhaltlich gliedert sich das Buch in die drei Abschnitte: A. Grundbegriffe. B. Das quadratische Reziprozitätsgesetz. C. Theorie der algebraischen Körper. Der Abschnitt A erhebt sich nach den anfänglichen Grundtatsachen in recht günstiger Art durch das Eingreifen des Schubfachschlusses schon auf die Höhe der Darstellung von Primzahlen durch gewisse quadratische Formen und der Ergänzungssätze zum Reziprozitätsgesetz. Er schließt mit der Berechnung der vier letzten Stellen der Zahl 9^{999} zu 5289. — B beginnt mit den Galoisfeldern und führt dann über die Darstellung ganzer Zahlen als Quadratsummen. (Einer kleinen Korrektur bedarf der Beweis auf S. 74, da auch die Summe von 4 ungeraden Quadraten durch 4 teilbar ist.) Hierauf kommt nach der vorhin erwähnten Ableitung das Reziprozitätsgesetz samt Jacobi- und Kroneckersymbol, dem dann noch der biquadratische Charakter von 2 und der Satz von Skolem über kubische Kongruenzen folgen. — In C findet sich, ausgehend vom Begriff der ganzen algebraischen Zahl, organisch aufgebaut das Wichtigste über Basis und Diskriminante, Einheiten,

Ideale, Primideale und Zerlegungssätze, die Minkowskischen Sätze, Einheiten in quadratischen Zahlkörpern (Pellsche und Nicht-Pellsche Gleichung), Kreisteilungskörper, die Klassenzahl und ihre Bestimmung in quadratischen Körpern. — Die Zahlenbeispiele nebst relativ wenig Übungsaufgaben sind oft einfallsreich und bezeichnend und verwenden auch gerne in Problemen aufgetretene Werte. Ebenso sind gelegentliche Zwischenbemerkungen aufschlußreich und richtungweisend. Man kann daher dem Erscheinen des II. Teiles mit großem Interesse entgegensehen.

A. Aigner.

Vandiver, H. S.: The rapid computing machine as an instrument in the discovery of new relations in the theory of numbers. Proc. nat. Acad. Sci. USA **44**, 459—464 (1958).

Um für zahlentheoretische Experimente elektronische Rechenautomaten auszunutzen, hat Verf. Tafeln rechnen lassen, „where we have no special problem in mind but hope, by study of the tables derived, to be able to formulate a problem and be guided . . . toward its solution“. Es wird über Probleme und auch gewisse Ergebnisse berichtet, die durch solche Tafeln angeregt wurden. Sie betreffen Teilbarkeits- und asymptotische Eigenschaften der Lösungszahl der Kongruenz $ax^m \equiv by^k + 1$ modulo einer geraden Primzahl p . (Vgl. auch Pearson und Verf., dies. Zbl. **52**, 278, und spätere Arbeiten des Verf. in der vorliegenden Zeitschrift.)

G. Beyer.

Khan, N. A.: On some congruences of idempotent matrices. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A **24**, 1—3 (1958).

Verf. zeigt drei einfache Sätze: Für eine ganzzahlige idempotente Matrix A gilt $(I + A)^p \equiv I + A \pmod{p}$, $(2I - 2A)^p \equiv 2I - 2A \pmod{p}$, $(4I - 4A)^p \equiv 4I - 4A \pmod{p}$ (I Einheitsmatrix) dann und (für $A \neq 0$ bzw. $A \neq I$) auch nur dann, wenn p eine Primzahl oder Pseudoprimzahl ($2^p - 2$) ist. — Der Existenznachweis durch ausgerechnete Beispiele ist bei der Bekanntheit solcher Matrizen wohl unnötig.

A. Aigner.

Johnson jr., Robert J.: Congruence properties of the solutions of certain difference equations. Duke math. J. **25**, 155—170 (1958).

Consider the homogeneous second order difference equation $u_{n+1} = f(n)u_n - c u_{n-1}$, where u_0 and u_1 are assigned indeterminates or rational numbers which are integral (mod m); c is an indeterminate or a rational number with both numerator and denominator prime to m ; m is a fixed integer, and $f(n)$ is an odd polynomial with integral coefficients. Defining

$$\Delta^r u_n = \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} c^m (r-s) u_{n+2sm},$$

the author proves that $\Delta^{2r} u_n \equiv \Delta^{2r-1} u_n \equiv 0 \pmod{m^r}$ for m even; for m odd, the modulus is $2^{-r-1} m^r$. Moreover he discusses the non-homogeneous equation, $u_{n+1} = f(n)u_n + b c u_{n-1} + b^n + c^n$, where $f(n), b, c, b^{-1}, c^{-1}$ satisfy certain conditions and obtains some results.

T. Eweida.

Palamà, Giuseppe: I problemi di Escott-Tarry e di Prouhet-Tarry. Giorn. Mat. Battaglini **85** (V. Ser. 5), 80—94 (1957).

Fortsetzung des Übersichtsberichtes aus dem vorhergehenden Band derselben Zeitschrift (s. dies. Zbl. **71**, 268). Kapitel 3: Spezielle Untersuchungen über mehrgradige Gleichungen, Kuriositäten. Es wird z. B. über ganzzahlige Lösungen von $x_1^k + \dots + x_p^k = y_1^k + \dots + y_p^k$ für $k = 1, 2, \dots, n, n+2, n+4, n+2r$ sowie von $m_1 x_1^k + \dots + m_p x_p^k = q_1 y_1^k + \dots + q_p y_p^k$ für $k = n_1, \dots, n_r$ berichtet. Das zugehörige Schrifttum ist bereits in dem eingangs genannten ersten Teil der Abhandlung angegeben. Der Bericht soll weiter fortgesetzt werden.

W. Schulz.

Wright, E. M.: A definite integral in the asymptotic theory of partitions. Proc. London math. Soc., III. Ser. **8**, 312—320 (1958).

Verf. geht auf eine seiner früheren Arbeiten (dies. Zbl. 78, 36) zurück und diskutiert das Verhalten der dort definierten Funktion $J(z) = \int_0^\infty h(u, z) du$. Insbesondere wird auch eine genaue Formel für rationale z -Werte hergeleitet. — In seiner Einleitung weist Verf. noch darauf hin, daß in seiner eingangs zitierten Arbeit nicht alle Resultate neu seien und verweist dabei auf Auluck (dies. Zbl. 50, 41) und Meinardus (dies. Zbl. 72, 269).

H. Ostmann.

Erdős, P.: Über eine Art von Lakunarität. Colloquium math. 5, 6—7 (1958).

S. Hartman (dies. Zbl. 66, 32) betrachtet Mengen positiver ganzer, wachsend geordneter Zahlen, die folgende Lückenbedingung erfüllen: Es gibt ein natürliches $m > 0$ so, daß für alle natürlichen Zahlen l in \mathfrak{M} Sequenzen $m_n, m_{n+1}, \dots, m_{n+l}$ existieren mit $m_{n+i+1} - m_{n+i} < m$ für alle $i = 0, 1, 2, \dots, l-1$. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so heiße \mathfrak{M} lückenhaft (lakunär). Vgl. hierzu auch Sierpiński (dies. Zbl. 67, 275). Verf. beweist auf einfache und elementare Weise folgenden Satz: Es sei $1 < a_1 < a_2 < \dots$ eine Folge ganzer Zahlen; $A(a_1, a_2, \dots) = \mathfrak{A}$ bezeichne die Menge aller derjenigen ganzen Zahlen, die durch kein a_i teilbar sind. Dann ist \mathfrak{A} dann und nur dann lückenhaft, wenn eine unendliche Teilfolge a_{i_1}, a_{i_2}, \dots paarweise teilerfremder Zahlen in der Ausgangsfolge existiert. — Hiermit ist z. B. die Menge der quadratfreien Zahlen (man wähle $a_i = p_i^2$, p_i Primzahl) eine lückenhafte Menge positiver natürlicher Dichte ($= \frac{1}{6} \pi^2$). Ebenfalls ist die Primzahlmenge lückenhaft, was schon Sierpiński (vgl. oben) gezeigt hatte.

H. Ostmann.

Mirsky, L.: Additive prime number theory. Math. Gaz. 42, 7—10 (1958).

Extract from an address on this subject. Comprises the history of the conjecture of Goldbach with the results of Hardy and Littlewood (1923), Vinogradov (1937), Schnirelmann (1930), Buchstab (1940), Rényi (1948).

W. Verdenius.

Lavrik, A. F.: Addition of prime to a prime power of a given prime. Doklady Akad. Nauk SSSR 119, 1085—1087 (1958) [Russisch].

Sei $Q(p_2, N)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen n , $n \leq 2N$, die in der Form $n = p_1 + p_2^{p_1}$ (p_i Primzahlen), $p_1 \leq N$, $p_2^{p_1} \leq N$ darstellbar sind; $F(p_2, N)$ die Anzahl der n , für die eine solche Darstellung in genau einer Weise möglich ist. Dann gilt

$$F(p_2, N) \sim Q(p_2, N) = \frac{N}{\log p_2 \cdot \log \log N} + O\left(\frac{N \log \log \log N}{\log p_2 \cdot \log^2 \log N}\right).$$

Wenn man statt $p_2^{p_1}$ (p_2 fest) die Zahlen a^m , $m = 1^k, 2^k, \dots$, a fest, verwendet, sind die entsprechenden Anzahlen

$$= \frac{N}{(\log N)^{1-1/k} \log^{1/k} a} + O\left(\frac{N}{\log^{1-\varepsilon} N \cdot \log^{1/k} a}\right).$$

K. Prachar.

Hooley, Christopher: On the representation of a number as the sum of a square and a product. Math. Z. 69, 211—227 (1958).

Bezüglich der Darstellung der natürlichen Zahl n in der Gestalt $n = \sum_{i=1}^r x_i^2 + \sum_{i=1}^s \lambda_i \mu_i$ betrachtet Verf. den bei A. Page (s. dies. Zbl. 7, 398; 8, 197, 297) offen gebliebenen Fall $s = r = 1$, wenn n keine Quadratzahl ist [bez. $n = m^2$ s. A. E. Ingham, J. London math. Soc. 2, 202—208 (1927)]. Ist $\kappa(n)$ die Anzahl der Darstellungen von $n = (-v)^2 + \lambda \mu$ ($\lambda \mu$ und $\mu \lambda$ sind für $\mu \neq \lambda$ hier als verschiedene Summanden zu zählen), so ist evident:

$$\kappa(n) = \sum_{-\sqrt{n} < v < \sqrt{n}} \tau(n - v^2) \quad (\tau(x) \text{ ist die Teileranzahl}).$$

Leicht ergibt sich:

$$\kappa(n) = 4\sqrt{n} \sum_{\lambda < \sqrt{n}} \frac{q(\lambda)}{\lambda} + O\left(\sum_{\lambda < \sqrt{n}} q(\lambda)\right),$$

worin $\varrho(\lambda)$ die Anzahl der Kongruenzlösungen von $x^2 \equiv n \pmod{\lambda}$ bedeutet. Das Hauptresultat des Verf. lautet:

$$\pi(n) = 4\sqrt{n} \{1 + O[(\log \log n)/\log n]\} \cdot \{(\log \sqrt{n} + \gamma) f_n(1) + f'_n(1)\}.$$

Es bedeuten: γ die Eulersche Konstante,

$$f_n(s) = \frac{K(s)}{\zeta(2s)} \sum_{d^2 | n, (d,2)=1} \frac{d}{d^{2s}} L_{n/d^2}(s),$$

$$\zeta(s) \text{ Riemannsche } \zeta\text{-Funktion, } L_{n/d^2}(s) = \sum_{l=1, (l,2)=1}^{\infty} \left(\frac{n/d^2}{l}\right) \frac{1}{l^s} \quad \left(\left(\frac{n/d^2}{l}\right) \text{ ist}\right.$$

$$\text{Jacobi-Symbol}\Big), \quad K(s) = (1 + 2^{-s})^{-1} \sum_{a=0}^{\infty} \frac{\varrho(2^a)}{2^{as}} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{a_{\mu}}{2^{\mu s}} \quad (a_{\mu} = O(2^{\mu/2})).$$

H. Ostmann.

Klimov, N. I.: Kombination einer elementaren und einer analytischen Methode in der Zahlentheorie. Uspechi mat. Nauk 13, Nr. 3 (81), 145—164 (1958) [Russisch].

Verf. beweist einige obere Abschätzungen mittels der A. Selbergschen Verbesserung der Brunschen Siebmethode. Es werden die in den oberen Schranken auftretenden Summen durch die Methode der komplexen Integration asymptotisch abgeschätzt. Hauptergebnisse: 1. Sei $1 \leq i \leq m$, $m \geq 2$, $1 \leq n \leq N$, $z \leq N^{1/2} (\log N)^{-2m}$, $N_z(k_i, l_i)$ die Anzahl der n , für die keine der Zahlen $k_1 n + l_1, \dots, k_m n + l_m$ einen Primteiler $\leq z$ hat, $u_{i,j} = |j k_i - l_i k_j|$ ($1 \leq j \leq m$), $u_0 = \max(k_i, u_{i,j})$ (die k_i sind natürliche Zahlen), $\omega(p)$ die Anzahl der Lösungen n ($0 \leq n < p$) von $\prod_{i=1}^m (k_i n + l_i) \equiv 0 \pmod{p}$. Es gilt dann

$$N_z(k_i, l_i) \leq \frac{m! N}{\log^m z} \prod_p \frac{1 - \omega(p)/p}{(1 - 1/p)^m} \left\{1 + O\left(\frac{\log \log u_0}{\log z}\right)\right\}$$

gleichmäßig für $u_0 = O(\exp \log^B z)$, wobei $B > 0$ eine beliebig große Konstante ist; die Konstanten in den O -Gliedern können von m, B abhängen. (Man vgl. zu diesem Satz auch das Buch des Ref. „Primzahlverteilung“, Kap. 2, s. dies. Zbl. 80, 254).

2. Sei $\pi_h^{(2)}(K; N, z)$ die Anzahl der Zahlen $P = M^2 + K$, die keine Primteiler $\leq z$ enthalten, wobei $h < M \leq h + N$, $h > 0$; sei $(-K)$ kein vollständiges Quadrat, $K = O(\log^B z)$, $B > 0$ beliebig, $z \leq N^{1/2}/\log^4 N$. Dann gilt

$$\pi_h^{(2)}(K; N, z) \leq \frac{2}{2 - \chi(2)} \prod_{p > 2} \frac{p(p-1-\chi(p))}{(p-1)(p-\chi(p))} \cdot \frac{1}{L(1, \chi)} \cdot \frac{N}{\log z} \left\{1 + O\left(\frac{K^{1/2}}{\log z}\right)\right\},$$

wobei $\chi = \chi(n, D)$ ein reeller Charakter mit Modul $D \leq 4|K|$ und $L(s, \chi)$ die zugehörige L -Funktion ist. (Man vgl. zu diesem Resultat auch Heilbronn, dies. Zbl. 2, 15.)

K. Prachar.

Knapowski, S.: On prime numbers in an arithmetical progression. Acta arithmetica 4, 57—70 (1958).

Sei $\Delta(x, k, l) = \pi(x, k, l) - \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{du}{\log u}$, wobei $\pi(x, k, l)$ die Anzahl der Primzahlen p mit $p \leq x$, $p \equiv l \pmod{k}$ ist. Es wird bewiesen: Für $T \geq \max(c_0, \exp \exp \{150(k \log k)^2\})$ gilt

$$\max_{1 \leq x \leq T} |\Delta(x, k, l)| \leq T^{\delta(T)} \exp \left\{ \left(1 + \frac{1}{k}\right) \frac{\log T}{\sqrt{\log \log T}} \right\} \cdot \left(\max_{1 \leq x \leq T} |\Delta(x, k, 1)| + \sqrt{T} \right),$$

wobei $\lim_{T \rightarrow \infty} \delta(T) = 0$ für $T \rightarrow \infty$. Genauer ist $\delta(T) = \varepsilon(\sqrt{T}) - \varepsilon(\exp \sqrt{\log \log T})$, wobei $\varepsilon(T)$ das Maximum der Realteile derjenigen nichttrivialen Nullstellen aller Dirichletschen L -Funktionen bedeutet, für die der Imaginärteil absolut genommen $\leq T$ ist. (Wenn die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung richtig ist, gilt:

$\delta(T) = 0$.) Zunächst wird mit

$$F(s) = \sum_{n=1 \pmod{k}} \frac{1(n) - 1/\varphi(k)}{n^s} = -\frac{1}{\varphi(k)} \left\{ \sum_{\chi} \frac{L'}{L}(s, \chi) - \zeta(s) \right\}$$

das Integral

$$J(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\eta-iT_L}^{1-\eta+iT_L} \frac{\zeta^s}{s^{1+\tau}} F(s) ds$$

betrachtet (wobei T_L passend gewählt wird). Der Integrationsweg wird dann in den kritischen Streifen verschoben und so, daß er „nicht zu nahe“ an Nullstellen der $L(s, \chi)$ herankommt. Die sich als Residuum ergebende Summe, in der die Nullstellen der $L(s, \chi)$ vorkommen, wird mit einer Methode von Turán (Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen, S. 52, Satz X; s. dies. Zbl. 52, 46) nach unten abgeschätzt. Dies liefert auch eine Abschätzung für $\max |1(x, k, l)|$ nach unten. Ähnlich wird dann $\max |\Delta(x, k, l)|$ nach oben abgeschätzt, wobei allerdings der genannte Satz von Turán nicht benötigt wird. Das Endergebnis folgt durch Gegenüberstellung beider Abschätzungen. *K. Prachar.*

Rieger, G. J.: Verschärfung des Satzes von Richert über die Verteilung der quadratfreien Zahlen mit genau r Primfaktoren in einer arithmetischen Progression. *J. reine angew. Math.* **199**, 215—220 (1958).

Für die Anzahl $\Pi_r(x; k, l)$ der quadratfreien Zahlen $\leq x$ und $\equiv l \pmod{k}$, $(k, l) = 1$, mit genau r Primfaktoren hat Ref. eine asymptotische Entwicklung bei $x \rightarrow \infty$ angegeben (vgl. Richert, dies. Zbl. 52, 41). Die Fehlerabschätzung wurde im Hinblick auf Anwendungen in der additiven Primzahltheorie gleichmäßig in k durchgeführt und verallgemeinerte daher den Primzahlsatz von Page-Siegel-Walfisz ($r = 1$). Verf. zeigt nun, daß unter Verwendung der Tatzuwaschen Abschätzung für die Dirichletschen L -Reihen in der Nähe der Geraden $\operatorname{Re} s = 1$ (vgl. Tatzuwa, dies. Zbl. 45, 165) eines der beiden Fehlerglieder jener Entwicklung verbessert werden kann. Als Spezialfall ist hierin der Primzahlsatz von Tatzuwa: $\pi(x) = \operatorname{Li} x + O(x \exp(-c \log^{4/7} x / \log \log^3 x))$ enthalten. [Vgl. I. M. Vinogradov, *Izvestija Akad. Nauk SSSR. Ser. mat.* **22**, 161—164 (1958) und N. M. Korobov, *Uspechi mat. Nauk* **13**, Nr. 4 (82), 185—192 (1958).] *H.-E. Richert.*

Rieger, G. J.: Verallgemeinerung der Selbergschen Formel auf Idealklassen mod \mathfrak{f} in algebraischen Zahlkörpern. *Math. Z.* **69**, 183—194 (1958).

Die Selbergsche Formel

$$\sum_{p \leq x} \log^2 p + \sum_{p, q \leq x} \log p \cdot \log q = 2x \log x + O(x) \quad (p, q \text{ prim}),$$

woraus sich ein elementarer Beweis des Primzahlsatzes ergibt, verallgemeinert Verf. folgendermaßen: Es sei K ein algebraischer Zahlkörper endlichen Grades, \mathfrak{f} ein (ganzes) Ideal aus K und \mathfrak{H} eine zu \mathfrak{f} teilerfremde Klasse mod \mathfrak{f} in K . Als dann gilt

$$\sum_{\substack{Np \leq x \\ p \in \mathfrak{H}}} \log^2 Np + \sum_{\substack{Np, q \leq x \\ p, q \in \mathfrak{H}}} \log Np \cdot \log Nq = \frac{2}{h(\mathfrak{f})} x \log x + O(x) \quad (p, q \text{ prim}),$$

wobei $h(\mathfrak{f})$ die Anzahl der zu \mathfrak{f} teilerfremden Klassen mod \mathfrak{f} in K bedeutet. Bekanntlich wurden die Sonderfälle, wo K der rationale Zahlkörper und auch wo für einen beliebigen Körper K $\mathfrak{f} = (1)$ ist, schon von Shapiro erledigt (s. dies. Zbl. 36, 307; 37, 168). Die Anzahl der Ideale einer Klasse \mathfrak{H} mod \mathfrak{f} mit Norm $\leq x$ kann man elementar, d. h. ohne Hilfe der komplexen Funktionentheorie mit dem Restglied $O(x^{1-\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$) angeben und aus solcher Abschätzung leitet Verf. die oben angeführte Formel elementar her, so daß sich diese Formel tatsächlich elementar beweisen läßt. *Z. Suetuna.*

Bredichin (Bredikhin), B. M.: Free numerical semigroups with power densities. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **118**, 855—857 (1958) [Russisch].

Es handelt sich um eine Ausdehnung der Selbergschen Formel und des elemen-

taren Beweises des Primzahlsatzes auf freie Halbgruppen von Zahlen mit einer Anzahlfunktion der Darstellung $v(x) = Cx^\theta + O(x^{\theta_1})$, $\theta_1 < \theta$, sowie Anwendungen. Die ausführliche Darstellung der Arbeit ist inzwischen erschienen [Mat. Sbornik, n. Ser. 46 (88), 143—158 (1958)].

H.-E. Richert.

Delange, Hubert: Sur la distribution de certains entiers. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 2205—2207 (1958).

Verf. zeigte kürzlich (dies. Zbl. 79, 67, 3. Referat) daß ein Teil seiner Ergebnisse aus früheren Untersuchungen aus der asymptotischen Zahlentheorie [s. dies. Zbl. 72, 275; Illinois J. Math. 2, 81—87 (1958)] richtig bleibt, wenn die Bedingung H , für die der Untersuchung zugrunde liegende Primzahlmenge durch eine allgemeinere und natürlichere Dichtehypothese ersetzt wird. Verf. zeigt nun, daß die übrigen Resultate ebenfalls unter dieser erweiterten Voraussetzung ihre Gültigkeit behalten.

H.-E. Richert.

Kanold, Hans-Joachim: Ein Satz über zahlentheoretische Funktionen. Math. Nachr. 18, H. L. Schmid-Gedächtnisband 36—38 (1958).

Nach seinen ergebnisreichen Untersuchungen von Zahlmengen mit der natürlichen Dichte Null (dies. Zbl. 78, 35) beweist Verf. nun, daß diese auch der Menge der Zahlen m mit mindestens einer der beiden Eigenschaften $(\sum_{d|m} d^r, m) = 1$ oder

$(m^r \cdot \prod_{p|m} (1 - \frac{1}{p^r}), m) = 1$, wobei r eine feste natürliche Zahl, d Teiler und p Primteiler von m ist, zukommt.

A. Aigner.

Schinzel, A. and Y. Wang: A note on some properties of the functions $\varphi(n)$, $\sigma(n)$ and $\theta(n)$. Ann. Polon. math. 4, 201—213 (1958).

Es sei $\varphi(n)$ die Eulersche Funktion, $\sigma(n)$ die Summe der Divisoren von n und $\theta(n)$ die Anzahl von Divisoren von n . A. Schinzel (dies. Zbl. 65, 271) hat bewiesen, daß zu jeder Folge a_1, a_2, \dots, a_h von h positiven Zahlen und einer gegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ natürliche Zahlen n, n' existieren derart, daß

$$(1) |\varphi(n+i)/\varphi(n+i-1) - a_i| < \varepsilon, \quad (2) |\sigma(n'+i)/\sigma(n'+i-1) - a_i| < \varepsilon$$

für $i = 0, 1, \dots, h$ erfüllt ist. Loo-Keng Hua hat darauf aufmerksam gemacht, daß man mit Hilfe der Brunschen Siebmethode zeigen kann, daß zwei positive Konstante c und X_0 existieren derart, daß die Anzahl natürlicher Zahlen n des Intervalles $1 \leq n \leq X$, die (1) erfüllen, für $X > X_0$ größer als $cX/\log^{h-1} X$ ist. Vorliegende Arbeit enthält den Beweis dieses Satzes und des entsprechenden Satzes für (2). Durch Lösung eines Problems von A. Schinzel (dies. Zbl. 56, 270) wird ein ähnliches aber schwächeres Resultat über die Funktion $\theta(n)$ bewiesen. Die letzten zwei Sätze wurden nach einer vorläufigen Mitteilung (dies. Zbl. 72, 33) auch von Pin-Tsung Shao bewiesen.

B. Stolt.

Erdős, P.: Some remarks on Euler's φ function. Acta arithmetica 4, 10—19 (1958).

Es sei n eine natürliche Zahl, $\varphi(n)$ die Eulersche Funktion und $\sigma(n)$ die Summe der positiven Teiler von n . Verf. verallgemeinert einige Resultate von A. Schinzel (dies. Zbl. 65, 271) mit Hilfe der Brunschen Siebmethode. Er hätte hervorheben können, daß auch A. Schinzel-Y. Wang (dies. Zbl. 70, 42 und vorstehende Arbeit) und Pin-Tsung Shao (dies. Zbl. 72, 33) dieselbe Methode bei ähnlichen Problemen angewandt haben. Es sei $A(n)$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung $\varphi(x) = n$. H.-J. Kanold und W. Sierpiński bzw. A. Schinzel haben gezeigt, daß es unendlich viele n gibt, für welche $A(n) = 2$ bzw. $= 3$ gilt. Verf. zeigt, daß, wenn es ein n mit $A(n) = m$ gibt, es unendlich viele gibt. Übrigens enthält die Arbeit mehrere Vermutungen und Sätze ohne Beweis. Die Beweise der Arbeit sind nicht in allen Einzelheiten durchgeführt worden.

B. Stolt.

Erdős, P.: On the distribution function of additive arithmetical functions and on some related problems. Rend. Sem. mat. fis. Milano 27, 45—49 (1958).

The paper is a general survey about the existence and the properties of the distribution function of an additive arithmetic function. Most of the results are due to the author and his cooperators. It contains also a number of unsolved problems and conjectures. The proofs of the results mentioned in the paper are referred to the original papers.

L. K. Hua.

Amitsur, S. A.: On arithmetic functions. J. Analyse math. 5, 273—314 (1957).

Verf. verallgemeinert den Selbergschen Beweis des Primzahlsatzes auf eine gewisse Klasse von arithmetischen Funktionen. Er benutzt die Beweisaneordnungen von N. Shapiro (dies. Zbl. 37, 168; 38, 183) und K. Yamamoto (dies. Zbl. 67, 23). Es wird dabei einer arithmetischen Funktion $g(n)$ eine durch

$$(S_g f)(x) = \sum_{n \leq x} g(n) f\left(\frac{x}{n}\right)$$

definierte lineare Transformation im linearen Raum \mathfrak{M} der für $x \geq 1$ definierten und auf jedem endlichen Intervall beschränkten komplexwertigen Funktionen f zugeordnet. Der Faltung („convolution“)

$$(g * h)(x) = \sum_{d|x} g(d) h\left(\frac{x}{d}\right)$$

zweier arithmetischen Funktionen g und h entspricht das Produkt der zu g und h gehörigen linearen Transformationen. Die Algebra der arithmetischen Funktionen (mit „Faltung“ statt „gewöhnlicher“ Multiplikation) ist isomorph mit der Algebra \mathcal{A} der zugehörigen linearen Transformationen von \mathfrak{M} . Die Multiplikation einer arithmetischen Funktion mit $\log x$ (oder allgemeiner mit einer additiven Funktion) induziert in \mathcal{A} eine Ableitung („derivation“). Verf. betrachtet jetzt den Teilraum \mathfrak{Q} von \mathfrak{M} , der aus allen Polynomen in $\log x$ besteht. Mit Hilfe eines symbolischen Kalküls erhält er (für die in Betracht kommenden arithmetischen Funktionen g) asymptotische Formeln für $I_g f$ (wo $I_g = S_{g \cdot x^{-1}}$) in denen die Hauptglieder Funktionen aus \mathfrak{Q} sind. Diese Formeln entsprechen der Selbergschen fundamentalen Ungleichung. Der Hauptsatz des Verf. verkörpert eine Verallgemeinerung des Verfahrens, mit dem Selberg den Primzahlsatz aus der fundamentalen Ungleichung herleitet. Er lautet folgendermaßen: Es sei f eine beschränkte Funktion aus \mathfrak{M} mit den folgenden Eigenschaften:

$$1. \quad |f(x)| \log x \leq \sum_{n \leq x} \Lambda(n) f\left(\frac{x}{n}\right) + o(\log x)$$

(1 ist die aus der Primzahltheorie bekannte Faltung der Funktion μ von Moebius mit $\log x$); 2. Es gibt ein positives ganzes k derart, daß

$$\sum_{n \leq x} f\left(\frac{x}{n}\right) - f\left(\frac{x}{n+1}\right) = O(\log^k x); \quad 3. \quad \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n} = O(1);$$

$$4. \quad |f(tx) - f(x)| = o(1) \quad \text{falls} \quad t \rightarrow 1 \quad \text{und} \quad x \rightarrow \infty.$$

Dann gilt $f(x) = o(1)$. — Falls $f(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n}$ erhält man den Primzahlsatz.

Verf. beweist auch den Dirichletschen Satz über Primzahlen in einer arithmetischen Progression.

H. D. Kloosterman.

Mikolás, M.: On certain sums generating the Dedekind sums and their reciprocity laws. Pacific J. Math. 7, 1167—1178 (1957).

Let $\{a\} = a - [a]$ denote the fractional part of the real number a and let $((a)) = \{a\} - \frac{1}{2}$. The Dedekind sums $S(h, k) = \sum_{\lambda=0}^{k-1} \left(\left(\frac{\lambda}{k} \right) \right) \left(\left(\frac{\lambda h}{k} \right) \right)$ satisfy the

remarkable reciprocity law

$$S(h, k) + S(k, h) = (h^2 + 3hk + k^2 + 1)/12hk,$$

for coprime integers h, k . Various proofs and generalizations of these sums and of

their reciprocity laws were given, among others, by Apostol, Carlitz, Rademacher and Rédei. The author gives yet another interesting generalization. Let a, b, c , be three integers, $c > 0$ and x and y two complex numbers. Let $e(z) = e^{2\pi iz}$. Put

$$(e(x) - 1)(e(y) - 1) S_c^{a,b}(x, y) = \sum_{\lambda \pmod{c}} e\left(\left\{\frac{\lambda a}{c}\right\}x + \left\{\frac{\lambda b}{c}\right\}y\right)$$

with $(a, c) = (b, c) = 1$. The author proves, by applying the calculus of residues, the relation

$$S_b^{c,a}(ax + by, -cx) + S_c^{a,b}(cx, cy) + S_a^{b,c}(-cy, ax + by) = \{1 - e(ax + by)\}^{-1}$$

provided $0 \leq R(x)$, $R(-y) < 1$ and $ax + by, cx, cy$ are not integers. By expressing $S_c^{a,b}(x, y)$ in terms of the cotangent function and specializing a, b, c, x and y , the author obtains the formulae given by Apostol, Carlitz and Rademacher.

K. G. Ramanathan.

Birch, B. J. and H. Davenport: Quadratic equations in several variables. Proc. Cambridge philos. Soc. **54**, 135—138 (1958).

Let $f(x_1, \dots, x_n)$ be an indefinite quadratic form with integral coefficients, and let $g(x_1, \dots, x_n)$ be a positive definite form (in the strict sense) with real coefficients. If the equation $f = 0$ is properly soluble in integers, it is shown that it has a solution satisfying

$$0 < g(x_1, \dots, x_n) \leq \gamma_{n-1}^{n-1} (2 \operatorname{Tr}(\mathbf{f} \mathbf{g}^{-1})^2)^{(n-1)/2} (\operatorname{Det} g).$$

Here γ_{n-1} denotes Hermite's constant, and \mathbf{f} and \mathbf{g} are the matrices $\{f_{ij}\}$ and $\{g_{ij}\}$. The result can also be enunciated in geometrical form, in terms of lattices in n dimensional space. The theorem is a generalization of a result of Cassels (this. Zbl. **64**, 283; **71**, 272), corresponding to the case $g = x_1^2 + \dots + x_n^2$. *E. S. Selmer.*

Watson, G. L.: One-sided inequalities for integral quadratic forms. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **9**, 99—108 (1958).

Es sei $f = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{kk}x_k^2$ eine indefinite quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten, primitiv, nicht singulär, und $s(f)$ sei die Signatur. Der Form werde die Matrix A mit den Elementen $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ und die Diskriminante $d(f) = (-1)^{k/2} \det A$, wenn k gerade, $= \frac{1}{2} (-1)^{(k-1)/2} \det A$, wenn k ungerade, zugeordnet. Die untere Grenze der positiven Werte von f werde mit $\min^+ f$ bezeichnet. Als obere Schranke für den Quotienten $(\min^+ f)^k / |d(f)|$ ergibt sich 1, bzw. $\frac{1}{2}$, bzw. $\frac{1}{4}$, bzw. $\frac{1}{8}$, wenn $\pm s(f) \equiv 0$ oder 1, bzw. 3, bzw. 2, bzw. 4 (mod 8). Dies gilt, abgesehen von 2 Ausnahmefällen für $k = 3$ und einem Ausnahmefall für $k = 4$. Die angegebenen Schranken sind scharf. Die Spezialfälle $k = 2, 3, 4$ sind nach Barnes, Davenport und Oppenheim bekannt. Mit Hilfssätzen über die Äquivalenz von Formen nach Moduln wird gezeigt, daß man sich auf Formen mit kleiner Signatur beschränken kann. Weitere Hilfssätze über die Darstellung von quadratischen Formen führen zum Ziel.

N. Hofreiter.

Lewis, D. J.: Cubic forms over algebraic number fields. Mathematika, London **4**, 97—101 (1957).

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist: Sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grad d . Es gibt eine Schranke $\psi(d)$ so, daß jede kubische Form mit Koeffizienten aus K und mehr als $\psi(d)$ Variablen eine nichttriviale Nullstelle in K hat (d.h. für passende, nicht sämtlich verschwindende Werte der Variablen aus K verschwindet). Der Beweis benützt Resultate von Brauer [Bull. Amer. math. Soc. **51**, 749—755 (1945)] und Peck (dies. Zbl. **34**, 313). Nach dem ersteren läßt sich jede kubische Form $f(x_1, \dots, x_n)$ durch eine lineare Transformation vom Rang m mit Koeffizienten aus $K(\sqrt{-1})$ auf eine „Diagonalform“ $\sum_{i \leq m} \alpha_i y_i^3$ mit Koeffizienten aus $K(\sqrt{-1})$ transformieren, wenn nur n oberhalb einer von m abhängigen Schranke liegt. Nach

dem zweitgenannten Ergebnis stellt jede Diagonalform mit genügend vielen Variablen die Null im Körper der Koeffizienten, d. h. hier in $K(\sqrt[l]{-1})$ dar. Verf. zeigt noch, daß eine solche Form auch eine Nullstelle in K haben muß, wenn sie eine in $K(\sqrt[l]{-1})$ hat [wenn $A + B\sqrt[l]{-1}$ eine Nullstelle aus $K(\sqrt[l]{-1})$ ist — A, B sind n -Tupel aus K — so ist $A f(B) - B f(A)$ eine Nullstelle aus K]. — Allgemeiner wird bewiesen, daß für genügend große Variablenzahl jede kubische Form eine lineare Mannigfaltigkeit der Dimension l als Nullstellenmannigfaltigkeit besitzt, wobei l beliebig vorgegeben werden kann (dabei hängt die untere Schranke für die Anzahl der Variablen nur von l und dem Körper K ab). Eine weitere Verallgemeinerung bezieht sich auf Systeme kubischer Formen. K. Prachar.

Birch, B. J.: Homogeneous forms of odd degree in a large number of variables. *Mathematika*, London 4, 102—105 (1957).

In einer redaktionellen Fußnote zur Arbeit von Lewis (vgl. vorhergehendes Referat) wird festgestellt, daß dasselbe Problem unabhängig auch von H. Davenport und B. J. Birch gelöst wurde. Der letztgenannte Verf. beweist hier gleich den allgemeineren Satz: Seien $h \geq 1$, $m \geq 1$ natürliche Zahlen, r_1, r_2, \dots, r_h ungerade natürliche Zahlen und K ein algebraischer Zahlkörper (endlichen Grades). Dann gibt es eine Zahl $\psi = \psi(r_1, \dots, r_h; m; K)$ mit folgender Eigenschaft: Für $n \geq \psi$ und beliebige Formen $f_{r_1}(X), \dots, f_{r_h}(X)$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, der Grade r_1, \dots, r_h gibt es eine m -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit M über K mit $f_{r_1}(X) = \dots = f_{r_h}(X) = 0$ für X aus M . Der von dem Lewisschen Beweis verschiedene Beweis des Verf. benützt auch die Resultate von Brauer und Peck (vgl. vorhergehendes Referat). K. Prachar.

Feldman, N. I.: Über die simultane Approximation der Perioden elliptischer Funktionen durch algebraische Zahlen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* 22, 563—576 (1958) [Russisch].

Let $\wp(z)$ be the Weierstrass elliptic function with invariants g_2 and g_3 and the pair of generating periods ω, ω_1 . Assume that g_2 and g_3 are algebraic numbers; and let ξ and ξ_1 be two algebraic numbers, of degrees n and n_1 , and heights h and h_1 , respectively, that both lie in an algebraic field of degree n_0 . In an earlier paper (this *Zbl.* 44, 271) the author gave a lower bound for $|\omega - \xi|$ in terms of n and h . He now proves the much stronger simultaneous inequality

$$|\omega - \xi| + |\omega_1 - \xi_1| > e^{-A_0 n_0 N (\log N)^2}$$

where $A_0 > 0$ depends only on $g_2, g_3, \omega, \omega_1$, and N is defined by

$$N \log N = n_0 (\log n_0 + n^{-1} \log h + n_1^{-1} \log h_1 + 1).$$

K. Mahler.

Analysis.

• **Vallée Poussin, Ch.-J. de la:** *Cours d'analyse infinitesimale. Tome II.* Neuvième éd. revue et augmentée avec la collaboration de **Fernand Simonart**. Louvain: Librairie Universitaire 1957. VIII, 552 p.

Die vorliegende neunte Auflage des bekannten Werkes von de la Vallée Poussin (1. Aufl. 1906, 2. Aufl. 1912, 6. Aufl. 1928; 11. Aufl. des ersten Bandes ist bereits 1954 erschienen) unterscheidet sich von den früheren Auflagen durch zahlreiche Verbesserungen im Text und durch eine Neubearbeitung einzelner Kapitel über die linearen Gleichungen in partiellen Ableitungen und in totalen Differentialen. Neu eingeführt gegen die sechste Auflage ist Kap. XII. Geometrische Anwendungen. Singuläre Punkte. Berührungen. Einhüllende. D. J. Mangeron.

Block, H. D.: Discrete analogues of certain integral inequalities. *Proc. Amer. math. Soc.* 8, 852—859 (1957).

Die N komplexen Zahlen z_1, \dots, z_N werden zu einem Vektor Z im unitären Raum U_N zusammengefaßt; es wird gesetzt $DZ = (z_2 - z_1, z_3 - z_2, \dots, z_N - z_{N-1}) \in U_{N-1}$ und $\dot{Z} = (z_2 - z_1, \dots, z_N - z_{N-1}) \in U_{N-1}$ und bewiesen:

$$|z_v| \leq N^{-1/2} \|Z\| + (2 \sin \pi/N)^{-1} \|DZ\|$$

mit dem Gleichheitszeichen nur für $Z = (c, \dots, c)$. Falls $\sum_{v=1}^N z_v = 0$, so gelten Verschärfungen im Sinne der Wirtingerschen Ungleichungen (s. K. Fan, O. Taussky, J. Todd, dies. Zbl. 64, 298); wenn man Z als Matrix betrachtet und D in einen Zeilen- und Spaltenoperator aufspaltet, so ergeben sich weitere Verallgemeinerungen. Hinsichtlich \dot{Z} werden verschiedene Abschätzungen der Form

$$|z_v|^2 \leq \alpha \|Z\|^2 + \beta \|\dot{Z}\|^2$$

gefunden.

G. Aumann.

Mengenlehre:

● Hausdorff, Felix: Set theory. Transl. from the German by John R. Aumann et al. New York: Chelsea Publishing Company 1957. 352 p. 6 dollars.

Ljapunov, A. A.: Über Mengenoperationen mit transfiniten Indizes. Trudy Moskovsk. mat. Obšč. 6, 195—230 (1957) [Russisch].

The paper gives a complete presentation of R -sets, which are defined here in a simpler way than before [for terminology and notation see Ljapunov: On R -sets, Trudy mat. Inst. Steklov 40 (1953)]. In particular, the exposition is based on the following T - and T^C -operations, respectively. A chain is defined as any set of natural numbers (0 included), and a basis N is any set of chains. If N is given, as well as a sequence of sets $\{E_n\}$, the corresponding δ s-function $\Phi_N\{E_n\}$ denotes $\bigcap_{n \in N} \bigcap_{m \in n} E_m$. Let N_n be a sequence of bases: the conjunctive extension of the corresponding δ s-functions is defined by the basis N consisting of all the chains η such that 1. $\eta \supseteq \eta_0$ for some $\eta_0 \in N_0$, 2. if $\eta \in N$, $n \in \eta$, then N_n contains an η_n such that $\eta_n \subset \eta$. Let to every set E_n be associated the Ω -sequence E_n^s ($s < \Omega$) in the following way: $E_n^1 = E_n$ (E_n^0 denotes the space), $E_n^{s+1} = E_n^s \cap \Phi_{N_n}\{E_m^{s+1}\}$, $E_n^s = \bigcap_{\alpha < s} E_n^\alpha$. Let $E_0^\Omega = \bigcap_{\alpha < \Omega} E_0^\alpha$; the set E_0^Ω is determined by the given sequences E_n , N_n of sets and bases respectively: it is denoted functionally by $T_{N_n}\{E_n\}$. This „ T -operation“ is a δ s-operation on E_n with just the basis N , i. e., $T_{N_n}\{E_n\} = \Phi_N\{E_n\}$. The T^C -operation is defined in the following way. The disjunctive extension of δ s-operations on E_n with bases N_n is the δ s-operation with the basis M satisfying $N_0 \subseteq M$ such that if $\eta \in M$ and $n \in \eta$ then, for every $\eta_n \in N_n$, $\eta \setminus \{n\} \cup \eta_n \in M$. Putting $\tilde{E}_n^1 = E_n$, $\tilde{E}_n^{s+1} = \tilde{E}_n^s \cup \Phi_{N_n}\{\tilde{E}_m^s\}$, $\tilde{E}_n^s = \bigcup_{\alpha < s} \tilde{E}_n^\alpha$, let $\tilde{E}_0^\Omega = \bigcup_{\alpha < \Omega} \tilde{E}_0^\alpha$. Then $T_{N_n}^C\{E_n\} = \tilde{E}_0^\Omega$. A sequence N_n of bases is non-chained provided there exists a sequence $\eta^0, \eta^1, \dots, \eta^s, \dots$ of mutually disjoint chains such that $\{0, n\} \cap \eta^s$ is empty and $\eta_n \in N_n$ implies $\eta_n \subset \eta^s$. Every T -operation with non-chained bases is an R -operation and vice versa. Starting with the above definitions, all the results concerning R -sets which were proved earlier by other means are now proved in a simpler way. G. Kurepa.

Iśeki, Kiyoshi: A generalisation of a theorem of W. Sierpiński. Proc. Japan Acad. 34, 28 (1958).

As a generalization of a theorem of Sierpiński (this Zbl. 58, 282) the following theorem is proved. Let M be a simply ordered set of cardinality $m \geq \aleph_0$; for a cardinality n the relation $m \leq n$ holds if and only if there exists a mapping F by which to every $x \in M$ one associates a family $F(x)$ of cardinality $< n$ of closed intervals of M , each having the point x as endpoint and such that for every $y \in M$ $\{x\}$ one has $[x, y] \in F(x) \cup F(y)$. G. Kurepa.

Iséki, Kiyoshi: On a theorem of W. Sierpiński and S. Ruziewicz. *Proc. Japan Acad.* **34**, 353—354 (1958).

Using the result of the Note reviewed above the following theorem of Ruziewicz (cf. this Zbl. **17**, 345; 346) is proved: For a linearly ordered set M of cardinal $m \geq \aleph_0$ the relation $m < n$ (n being a cardinal) holds if and only if there exists a decomposition of $M \times M$ into two disjoint sets A, B such that for each $c \in M$ the relations $(c, x) \in A, x \in M$ as well as $(y, c) \in B, y \in M$ have $< n$ solutions.

G. Kurepa.

Kondó, Motokiti: Sur l'uniformisation des ensembles nommables. *C. r. Acad. Sci., Paris* **246**, 2712—2715 (1958).

Unter Bezugnahme auf eigene frühere Arbeiten (vgl. dies. Zbl. **21**, 333; **70**, 278) sowie u. a. auf solche von P. Novikov (*Trudy mat. Inst. Steklov* **38**, 272—316 (1951)), J. W. Addison (*Bull. Amer. Math. Soc.* **63**, 397 (1957)) und A. Mostowski (u. a. dies. Zbl. **31**, 194, 339) teilt Verf. folgende Sätze mit: I. Jede $(P_n^a; k, k)$ - bzw. $(P_n^a; k, k)$ - bzw. $(P_n^a; k, k)$ -nominable Menge (vgl. dies. Zbl. **70**, 278) kann uniformisiert werden durch die Differenz zweier $(P_n^a; k, k)$ -nominabler Mengen bzw. für $a \geq 2$ durch eine $(P_n^a; k, k)$ - bzw. für $a \leq 2$ durch eine $(P_n^a; k, k)$ -nominable Menge. — (II) Zwei (dem gleichen Raum angehörige) fremde $(P_n^a; k, k)$ -nominable Mengen A', A'' mit $a \geq 2$ lassen sich separieren durch zwei fremde $(P_n^a; k, k)$ -nominable Mengen B', B'' , also mit $A' \subseteq B', A'' \subseteq B''$. Für $a \geq 2$ lassen sich zwei dem gleichen Raume angehörige $(P_n^a; k, k)$ -nominable Mengen C', C'' separieren durch zwei $(P_n^a; k, k)$ -nominable fremde Mengen D', D'' derart, daß $C' \cap C'' = C'' \subseteq D'$ und $C'' \cap C' = C' \subseteq D''$.

Otto Haupt.

Mycielski, Jan: About sets with strange isometrical properties. II. *Fundamenta Math.* **45**, 292—295 (1958).

The paper contains generalizations of results of the part I of an author's paper with the same title (cf. this Zbl. **65**, 38) in the sense that the sphere S_2 and the group of rotations are replaced by analytic manifolds and groups of analytic homeomorphisms respectively. For two analytic real connected manifolds M, M' a mapping f from M into M' is called analytic if the local coordinates of $f(p) \in M'$ are analytic functions of the local coordinates of p in M . An ordered pair $[M, G]$ of M and a Lie group of analytic homeomorphisms of M onto itself is an "analytic system" if the mapping $[h, p] \rightarrow h(p)$ of $G \times M \rightarrow M$ is analytic. Theorem 2: For every analytic system $[M, G]$ such that G contains a free subgroup of rank 2 there exists a sub-set H of M of cardinality $c = 2^{\aleph_0}$ such that for every enumerable $D \cap H$ there exists an $h \in G$ satisfying $hH = H \cap D$. Theorem 1: For every M and every free group U of rank 2 contained in G there exists a countable sub-set E of M such that for every finite $F \cap E$ there exists an $h \in U$ satisfying $hE = E \cap F$.

G. Kurepa.

Mycielski, Jan: About sets invariant with respect to denumerable changes. *Fundamenta Math.* **45**, 296—305 (1958).

One proves that the space R_n for $n \geq 1$ contains a set S that is congruent with every set $X \subseteq R_n$ satisfying $|S \cap X| \leq \aleph_0$ (here $|S \cap X|$ means $(S \cap X) \cap (X \cap S)$). The same proposition holds for the sphere S_n ($n \geq 2, n \neq 4$), for the n -dimensional elliptic space L_n ($n \geq 2, n \neq 4$) and n -dimensional hyperbolic space H_n ($n \geq 2$). The cases of the spaces S_4, L_4 remain open, because one does not know whether in S_4, L_4 there exist free locally commutative groups of rank c of isometries. The algebraic character of the phenomenon is contained in this Theorem 1: Let S be a set and G a free group of $1-1$ transformations of S onto itself, with a well ordered set of free generators $\{q_i\}_{i < \kappa}$. Two disjoint sets $C_1, C_2 \subseteq S$ and three sequences $\{F_i\}_{i < \kappa}, \{A_i\}_{i < \kappa}, \{B_i\}_{i < \kappa}$ of subsets of S are given. We suppose that for every $\xi < \kappa, q_\xi$ is free at $\{[q_1, \dots, q_\xi]\}$ and $C_1 \cap C_2 \subseteq \bigcup_{i < \xi} F_i$, and q_ξ is free at $\{q_1, \dots, q_\xi\}$.

and $C_1 \cup C_2 \cup \bigcup_{\tau \leq \xi} (A_\tau \cup B_\tau)$. Then there exist such sets $E_1, E_2 \subset S$ that for every $\xi < \alpha$

$$\varphi_\xi E_1 = E_1 \dot{-} F_\xi, \quad \varphi_\xi E_2 = (E_2 \setminus A_\xi) \cup B_\xi,$$

and moreover

$$C_1 \subset E_i \subset S \setminus C_2 \text{ for } i = 1, 2; \quad \bar{E}_1 = \mathfrak{s}_0 \bar{\alpha} + \bar{C}_1 + \sum_{\xi < \alpha} F_\xi.$$

Notations. For a group G of permutations of a set S and $H \subseteq G$, $P \subseteq S$ let $HP = \{h(p) \mid h \in H, p \in H, p \in P\}$; $[H]$ is the group which is generated by H . The basic notion is this one: H is free at P if every element of HP is representable in a single manner by $h(p)$ where $n \in H$, $p \in P$. G is called locally commutative, if the relations $h, h' \in G$, $h p = h' p = p$ for some $p \in S$ imply $h h' = h' h$. G. Kurepa.

Straus, E. G.: On Sierpiński sets in groups. *Fundamenta Math.* **45**, 332—333 (1958).

In a previous paper (cf. this Zbl. **79**, 78) this conjecture was formulated: "A group contains a Sierpiński set only if it contains a free group of rank 2^{\aleph_1} ". In this paper this conjecture is proved to hold. Consequently one has the corollary: Let G be a group of fixed-point-free transformations on a space S ; then S contains a Sierpiński set with respect to G if and only if G contains a free subgroup of rank 2. In this connection let us mention that the group of isometries of the sphere S_2 as well as that of elliptic or hyperbolic plane contains a free subgroup of rank 2. G. Kurepa.

Bagemihl, F.: An example of a function with a distorted image. *Michigan math. J.* **4**, 285—287 (1958).

Definition of a one-to-one function f from R_1 onto R_1 such that at every point of the plane R_2 the corresponding curve $y = f x$ is nonmeasurable and of second category and that every straight line intersects this curve C in at most two points. The definition of f is based on a well-ordering ξ ($\xi < \omega_\lambda$) of the set consisting of all perfect sets of any circle $c_r: x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) and of all lines $y = x_0$ and $x = y_0$. Let a_0, b_0 be two distinct points of Q_0 if Q_0 is a circle and 2 points of a c_r and the line Q_0 otherwise. Let $0 < \gamma < \omega_\lambda$ and the one-to-one γ -sequences $\{a_\xi\}_\xi, \{b_\xi\}_\xi$ be defined such that: (I) $\{a_\xi\}_{\xi \leq \beta}, \{b_\xi\}_{\xi \leq \beta}$ are disjoint, (II) $\{a_\xi, b_\xi\} \subset c_r(\xi)$ for some r and every $\xi < \beta$, (III) No line $\|x$ or $\|y$ contains more than one point a_ξ ($\xi \leq \beta$); (IV) no straight line contains more than 2 points a_ξ ($\xi \leq \beta$). Then by induction argument one defines the set A of all the $\{a_\xi\}_{\xi < \omega_\lambda}$ in such a way that A be the requested curve $y = f x$. G. Kurepa.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

Haupt, Otto und Christian Y. Pauc: Über Erweiterungen von Inhalten durch Adjunktion von Nullsomen. *Akad. Wiss. Lit. Mainz. Abh. math.-naturw. Kl.* **1957**, 273—290 (1958).

Ist $j|q$ ein Inhalt auf dem Booleschen Unterverband q des Booleschen σ -Verbandes g , so werde mit $n(j)$ das Ideal der j -Nullmengen bezeichnet. Die „Null-erweiterung“ $j^0|q^0$ von $j|q$ bezüglich eines Ideals n_0 von g ist erklärt durch $q^0 = q \dot{-} n_0$ und $j^0(Q^0) = j(Q)$ für $Q^0 = Q \dot{-} N$ mit $Q \in q, N \in n_0$; sie ist genau dann eindeutig, wenn $n_0 \subset q \dot{-} n(j)$. Ist $j|q$ ein Maß, so auch $j^0|q^0$, und Vollständigkeit überträgt sich. Mit Bezug auf die kleinste Erweiterung von $j|q$ zu einem Maß $j'|q'$ ergibt sich ein Kriterium für die σ -Additivität von $j^0|q^0$: Ist $j|q$ σ -additiv und σ -endlich (und $n_0 \subset q \dot{-} n(j)$), so ist für die σ -Additivität von $j^0|q^0$ notwendig und hinreichend, daß $(n_0)_\sigma \subset q' \dot{-} n(j)$; gleichwertig damit ist die Existenz der $(n_0)_\sigma$ -Nullerweiterung $j'^0|q'^0$ von $j'|q'$. Weitere Sätze betreffen Beziehungen zwischen $j'|q'$, $j^{0'}|q^{0'}$ und $j'^0|q'^0$. Als Anwendungen werden die Vervollständigung eines Maßes, die Erweiterung (topologisch) adaptierter Inhalte (s. O. Haupt u. Ch. Pauc, dies. Zbl. **65**,

286) zu adaptierten Maßen und Zerlegungen von Maßen bezüglich eines σ -Ideals besprochen. Angeschlossen sind Bemerkungen über Boolesche Verbände, die Träger eines endlichen Maßes sind.

G. Aumann.

Plamennov, I. Ja.: Zu den differentiellen Eigenschaften der meßbaren Funktionen. Mat. Sbornik, n. Ser. **42** (84), 223—248 (1957) [Russisch].

On apporte des contributions dans la question du comportement d'une fonction mesurable d'une variable réelle dans le voisinage des points où la dérivée approximative n'existe pas. Soit $y = f(x)$ une fonction finie, définie sur l'ensemble réel E . Désignons par $s(\eta)$ un angle quelconque situé dans le plan $x O y$ et ayant le sommet au point $\eta = [x, f(x)]$ ($x \in E$) du graphique de $f(x)$. Soit $E_{s(\eta)}$ l'ensemble de tous les valeurs $x' \in E$, telles que les points $[x', f(x')]$ appartiennent à $s(\eta)$. En connexion avec certains résultats de A. I. Khintchine [Mat. Sbornik **31**, 265—285, 377—433 (1924)], J. C. Burkil et U. S. Haslam-Jones (ce Zbl. **2**, 20), l'A. pose le problème suivant: Quelle est la densité supérieure de l'ensemble $E_{s(\eta)}$ aux points $x \in E$ où $f(x)$ est dépourvue de dérivée approximative? F. I. Smidov [Dissertation, Moscou 1938, et Dokl. Akad. Nauk SSSR **39**, 271—274 (1943)] a étudié ce problème pour une classe spéciale de points $x \in E$, les ainsi-dits points de densité inférieure positive du graphique de $f(x)$, définis par la condition suivante: Il existe un nombre $\lambda = \lambda(x) < +\infty$, tel que l'ensemble

$$E(x, \lambda) = E \left[|f(x') - f(x)| < \lambda |x' - x| \right]_{x' \in E}$$

ait, au point x , une densité inférieure positive au sens faible, c'est-à-dire

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\text{mes } E(x, \lambda) \cdot (x - h, x + h)}{2h} \right] > 0.$$

Le résultat principal, dont la démonstration est très longue et minutieuse, est le suivant: Soit $0 < \varepsilon < 1$. Il existe une fonction $\varphi(x)$, continue sur l'intervalle $[0, 1]$ et satisfaisant les trois propriétés suivantes: a) $\varphi(x)$ est dépourvue de dérivée approximative en chaque point x d'un ensemble $E \subset (0, 1)$ et tel que $\text{mes } E > 1 - \varepsilon$; b) pour chaque $x \in E$ on a, quel que soit $\lambda > 0$,

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\text{mes } E(x, \lambda) \cdot (x - h, x + h)}{2h} \right] = \frac{1}{2};$$

c) Si l'angle fermé $s[\eta]$, $\eta = [x, \varphi(x)]$, ne contient aucun rayon parallèle à Ox ou à Oy et, donc $0 < |\alpha_1| < |\alpha_2| < +\infty$, où par α_1 et α_2 on a désigné les coefficients angulaires des cotés de l'angle $s[\eta]$, alors

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\text{mes } E_{s(\eta)} \cdot (x, x + h)}{|h|} \right] = 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

pour chaque $x \in E$: si $s[\eta]$ contient un rayon parallèle à Ox et est situé dans le semiplan $x' \geq x$ (ou $x' \leq x$), alors la densité supérieure de l'ensemble $E_{s(\eta)}$, $\eta = [x, \varphi(x)]$, est égale à 1 pour chaque $x \in E$. On dit que le nombre k (on admet la possibilité $k = \pm \infty$) est un nombre dérivé essentiel à droite (gauche) de la fonction $f(x)$, au point x_0 , si à droite (gauche) de x_0 il existe un ensemble mesurable E_{x_0} , tel que sa densité supérieure au point x_0 soit égale à 1 et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k.$$

On montre que dans l'espace C des fonctions continues sur $[0, 1]$ il existe un ensemble B de deuxième catégorie, jouissant des propriétés suivantes: 1. Pour chaque fonction $f(x) \in B$ on peut déterminer un ensemble de mesure nulle $N[f(x)] \subset [0, 1]$ tel que, si $x \in [0, 1] - N[f(x)]$, alors x n'est pas un point de densité inférieure positive pour le graphique de $f(x)$; 2. Chaque nombre réel ($+\infty$ et $-\infty$ y compris) est, pour chaque $x \in [0, 1] - N[f(x)]$, un nombre dérivé essentiel à droite et à gauche.

S. Marcus.

Menger, Karl: Multiderivatives and multi-integrals. Amer. math. Monthly 64, Nr. 8 part II, 58—70 (1957).

Es bezeichne ξ das n -tupel (x_1, \dots, x_n) und $L_n(\xi; f)$ dasjenige Polynom $(n-1)$ -ten Grades in x , welches für $x = x_i$ den Wert $f(x_i)$ annimmt ($i = 1, \dots, n$), wo f eine Funktion der Variablen x ist. Außerdem sei $g_a(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$ mit $a = (a_1, \dots, a_n)$. Läßt man ξ in geeigneter Weise gegen a streben, so besitzt der „interpolatorische Differenzenquotient“

$$[L_n(\xi; f) - L_n(a; f)] / [L_n(\xi; g_a) - L_n(a; g_a)]$$

einen Limes in Gestalt eines Polynoms in x vom Grade $n-1$, welches die „ n -stellige (verallgemeinerte) Ableitung“ ${}_n Df(a)$ heißt. Dieser von K. Menger und S. S. Shü (dies. Zbl. 65, 62) eingeführte Begriff wird hier in Falle $n=2$ [der Fall $n=1$ ergibt die gewöhnliche Ableitung $f'(a)$] ausführlich dargestellt und der zugehörige Formelapparat entwickelt. Für die „2-stellige Integration“ als Umkehrung von $f \rightarrow {}_2 Df(a)$ wird eine Deutung gegeben. G. Aumann.

Tambs Lyche, R.: A monotonously increasing continuous function which is not differentiable in any interval. Nordisk mat. Tidskrift 5, 139—142, engl. Zusammenfassg. 168 (1957) [Norwegisch].

Let $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = \frac{1}{2}$, $\alpha_4 = \frac{1}{3}$, $\alpha_5 = \frac{2}{3}$, $\alpha_6 = \frac{1}{4}$, ... be the rationals of $[0, 1]$ arranged according to increasing denominators. Then $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x - \alpha_n$ is an increasing function in $0 \leq x \leq 1$, differentiable for every irrational x and not differentiable for every rational x . J. Horváth.

Marcus, S.: La superposition des fonctions et l'isométrie de certaines classes de fonctions. Bull. math. Soc. Sci. math. phys. RPR, n. Sér. 1 (49), 69—76 (1957).

In questa Nota, l'A. stabilisce alcune proprietà di rappresentazione di funzioni reali di una variabile reale mediante funzioni composte con funzioni appartenenti a certe classi. Per mezzo di tali proprietà l'A. ottiene la determinazione della potenza di taluni insiemi di funzioni nonché l'isometria di certe classi di funzioni. Tra i teoremi di rappresentazione ricordiamo i seguenti: ogni funzione reale $f(x)$ definita in $(0, 1)$ può porsi nella forma $f(x) = \psi(q(x))$ con q e ψ derivabili quasi ovunque, oppure con ψ che gode della proprietà di Darboux e q crescente: ogni funzione reale $f(x)$ limitata in $(0, 1)$ può porsi nella forma: $f(x) = \psi(q(x))$ ove ψ e q sono integrabili secondo Riemann, oppure ψ è non misurabile secondo Lebesgue e verificante la proprietà di Darboux e q è crescente, oppure ψ gode della proprietà di Darboux e non di quella di Baire e q è crescente. Riguardo le potenze di insiemi di funzioni l'A. dimostra che: hanno la potenza 2^c gli insiemi: delle funzioni (1) derivabili quasi ovunque, delle funzioni che (2) godono della proprietà di Darboux, delle funzioni (3) integrabili secondo Riemann e non boreliane, delle funzioni che (4) godono della proprietà di Darboux e non sono misurabili nel senso di Lebesgue, delle funzioni che (5) godono della proprietà di Darboux e non di quella di Baire. L'A. inoltre dimostra le seguenti isometrie: esiste un insieme di funzioni reali limitate, discontinue, integrabili nel senso di Riemann e derivabili quasi ovunque, il quale è isometrico allo spazio delle funzioni limitate in $(0, 1)$. Se S_M è lo spazio delle funzioni definite in $(0, 1)$, equilimitate in modulo da M , esistono un sottoinsieme $A \subset S_M$ di funzioni integrabili secondo Riemann che non godono della proprietà di Darboux, un insieme II di funzioni integrabili secondo Riemann, che godono della proprietà di Darboux, derivabili quasi ovunque ed aventi un insieme non denso di punti di discontinuità, un insieme Ω di funzioni del tipo (4) ed un insieme Z di funzioni del tipo (5), tali che A, II, Ω, Z siano isometrici allo spazio S_M . L. De Vito.

Ganguli, P. L.: A note on Ostrowski's generalization of a theorem of Osgood. Bull. Calcutta math. Soc. 49, 75—78 (1957).

Let $f(t, x)$, $a \leq x \leq b$, $t \geq T$, be a continuous function of x for every t . Let

$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, x) = f(x)$ be continuous. Then for every $\varepsilon > 0$ there exists a subinterval $[c, d]$ of $[a, b]$ and a $T' > T$ such that $|f(t, x) - f(x)| < \varepsilon$ for $c \leq x \leq d, t \geq T'$. Ostrowski (this Zbl. 39, 286) proved this under the assumption that $f(t, x)$ is continuous in both t and x . — The present result is an immediate consequence of Baire's theorem. Indeed, let $E_n = \{x; |f(t, x) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ for } t \geq n\}$. E_n is closed and $\bigcup_n E_n = [a, b]$. Hence one of the sets E_n contains an interval. J. Horváth.

Shah, S. M. and S. K. Singh: Note on a step function. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 9, 63—67 (1958).

Gegeben sei die Stufenfunktion $f(x) = \sum_{r_n \leq x} 1$ mit $0 < r_1 \leq r_2 \leq \dots$ und $r_n \rightarrow \infty$. Dann folgt aus dem durch

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log f(x)}{\log x} = A \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log f(x)}{\log x} = B \quad (0 \leq A < \infty; 0 < B \leq \infty)$$

präzisierten Verhalten von $f(x)$ stets

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x) \cdot \log x} \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt \leq 1 - \frac{A}{B};$$

diese Zahl kann durch keine kleinere ersetzt werden. Ist $A = B = 0$ oder $A = B = \infty$, so kann die linke Seite von (1) jeden Wert in $\langle 0, 1 \rangle$ annehmen. {Durch Betrachtung der Stufenfunktion $f(x) = [g(x)]$ sieht man leicht, daß der angegebene Satz für alle Funktionen $g(x) \nearrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$) richtig bleibt, während er für beliebiges $g(x)$ falsch wird; $g(x) = x + \sin^2 x (x^2 - x)$.} Als Anwendung ergibt sich z. B.: Ist $\Phi(z)$ eine ganze Funktion von der Ordnung ϱ ($0 < \varrho < \infty$) und der unteren Ordnung λ , und ist $\nu(r)$ der Index des Maximalterms für $|z| = r$, so gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{\nu(r) \cdot \log r} \leq 1 - \frac{\lambda}{\varrho}$$

[vgl. R. P. Srivastav, Ganita 7, 29—44 (1956)].

D. Gaier.

Wolibner, W.: Sur les fonctions dont les intégrales étendues aux surfaces sphériques sont nulles. Colloquium math. 5, 66—68 (1958).

Konstruktion von stetigen Funktionen im Raum, bzw. in der Ebene, deren Integrale über jede Kugel, die den Koordinatenursprung im Innern oder auf dem Rand enthält, verschwinden (mit Hilfe von harmonischen Funktionen). Analoge Fragestellung bei J. Radon, Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, math.-phys. Kl. 69, 262—277 (1917).

H. Hornich.

Beesack, Paul R.: A note on an integral inequality. Proc. Amer. math. Soc. 8, 875—879 (1957).

Die reellen Funktionen $F|A$, $G|A$ und $M|A$ seien auf der meßbaren Menge A integrierbar, wobei $\int_A G(x) dx \leq \int_A F(x) dx$ und für $x_1 \in A_1 = \{x: F(x) \leq G(x)\}$ und $x_2 \in A_2 = A - A_1$ durchweg $0 \leq M(x_1) \leq M(x_2)$ (oder anderenfalls durchweg $M(x_1) \leq 0 \leq M(x_2)$) gelte. Dann ist $\int_A G(x) M(x) dx \leq \int_A F(x) M(x) dx$. Dieser Satz enthält eine von K. Tatarkiewicz (dies. Zbl. 57, 47) gefundene Integralungleichung als Spezialfall. Verf. wendet ihn an auf den Größenvergleich der kleinsten Eigenwerte von zwei Differentialgleichungen $u'' + \lambda p(x) u = 0$ und $v'' - \lambda q(x) v = 0$.

G. Aumann.

Block, H. D.: A class of inequalities. Proc. Amer. math. Soc. 8, 844—851 (1957).

Bei festen nicht negativen Funktionen f und g werden Bedingungen dafür angegeben, daß für eine in $a \leq x \leq b$ stückweise stetig differenzierbare Funktion $y(x)$ eine Abschätzung

$$|y(x)|^2 \leq M(x) \int_a^b (y'(t) f(t) + y^2(t) g(t)) dt$$

mit einer hinsichtlich $y(x)$ nur von $y(a)$ und $y(b)$ abhängigen Funktion $M(x)$ Gültigkeit hat. Die Bedingung kommt auf die Existenz einer gewissen Lösung w der Differentialgleichung $(f w)' - g w = 0$ hinaus. Es wird noch ein etwas allgemeinerer Typus der Abschätzung von $|y(x)|$ behandelt. G. Aumann.

Lagrange, J.: Calcul des intégrales $I_m = \int_0^\infty \frac{1 - \cos^m x}{x^2} dx$, m entier positif.

Mathesis 67, 122—124 (1958).

Lewin, L.: On the evaluation of log-sine integrals. Math. Gaz. 42, 125—128 (1958).

Allgemeine Reihenlehre:

Petersen, G. M.: Matrix norms. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 9, 161—168 (1958).

The matrices employed in this paper are of the class Π , i. e., they are regular T -matrices with the property $\lim_{m \rightarrow \infty} \max_n |a_{m,n}| = 0$; these have been investigated by Lorentz (s. this Zbl. 31, 295). A matrix $B = (b_{m,n})$ is said to be „ b -stronger than $A = (a_{m,n})$ “ if every bounded sequence which is A -summable is also B -summable. If B is b -stronger than A , and A is b -stronger than B , then A and B are said to be „ b -equivalent“. The main result is given in Theorem 3, viz: Let $\{A^r\}$ ($r = 1, 2, \dots$) be a sequence of matrices of type Π . $A^r = (a_{m,n}^r)$, such that A^r is b -stronger than A^{r-1} . Let $\sum_{n=1}^\infty |a_{m,n}^r| \leq M$ for every m and r . Then there exists a sequence of matrices $\{B^r\}$, with $\sum_{n=1}^\infty |b_{m,n}^r| \leq M$, such that B^r is b -equivalent to A^r , and $B^r = D^r \cdot B^{r-1}$, where $D^r = (d_{m,n}^r)$ is a regular matrix. The proof is based on the following theorems, due to Brudno [Mat. Sbornik. n. Ser. 16 (58), 191—247 (1945)], and Lorentz, loc. cit., respectively; these are given as the author's Theorems 1 and 2, viz., 1. If $B = (b_{m,n})$ is regular and b -stronger than $A = (a_{m,n})$, then B must be b -consistent with A , i. e., every bounded sequence summed by A and by B is summed to the same limit. 2. A regular matrix A belongs to Π if, and only if, it has a summability function $\Omega(n)$, i. e., $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_n |a_{m,n}| = 0$ ($n \in n_k$) for any sequence $\{n_k\}$ for which $\omega(n) \leq \Omega(n)$, where the „counting function“ $\omega(n)$ of $\{n_k\}$ is, for a given n , the number of n_k satisfying $n_k \leq n$, and where $\Omega(n)$ is a fixed positive function increasing to $+\infty$ with n . The author then defines the norm of a matrix A to be $h'(A) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^\infty |a_{m,n}|$. This is a modification of Brudno's definition, given in the paper referred to above; but it is shown (Lemma 5) that the norm of a method \mathcal{A} is defined equivalently by $\|\mathcal{A}\| = \inf h(A)$ or by $\|\mathcal{A}\| = \inf h'(A)$, where $h(A) = \sup_m \sum_{n=1}^\infty |a_{m,n}|$ (Brudno's definition), and the „inf“ is taken over all the matrix methods equivalent to \mathcal{A} for bounded sequences. It is then proved (Theorem 4) that: There is a sequence of matrices $\{B_k\}$ such that $h'(B_k) = 1$ for every k , B_{k+1} is a -stronger than B_k ; and no regular matrix is a -stronger than every B_k . [The matrix B is „ a -stronger“ than A if all sequences (bounded and unbounded) that are A -summable are also B -summable.] R. G. Cooke.

Russell, D. C.: Note on inclusion theorems for infinite matrices. J. London math. Soc. 33, 50—62 (1958).

Given an infinite matrix $A = (a_{n,k})$ and a sequence $\{s_n\}$, if $\sigma_n = A(s_n) = \sum_{k=0}^\infty a_{n,k} s_k$, we say that $A\text{-}\lim s_n = \sigma$ if $A(s_n) \rightarrow \sigma$ as $n \rightarrow \infty$. For the main

result (Theorem 1), the assumptions on A are that it shall be normal, i. e., $a_{n,k} = 0$ ($k > n$), $a_{n,n} \neq 0$ for any n , and that it shall have zero column limits, i. e., $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k} = 0$ for every fixed k ; also that A should satisfy a mean value theorem of the following type, referred to subsequently as $M(A)$: For each sequence $\{s_k\}$ of a given class, and for all $n \leq m$, there exists n' with $0 \leq n' \leq n$ and an absolute constant K , such that

$$\left| \sum_{k=0}^n a_{m,k} s_k \right| \leq K \left| \sum_{k=0}^{n'} a_{n',k} s_k \right|.$$

For Césaro means (C, α) , $0 < \alpha \leq 1$, this was first stated without proof by Jacob [Proc. London math. Soc., II. Ser. 26, 470—492 (1927)], and proved independently by Bosanquet (s. this Zbl. 28, 219); a stronger version of the inequality appears in an alternative proof by Bosanquet [Proc. London math. Soc., II. Ser. 50, 482—496 (1949; this Zbl. 32, 404), Lemma 5]. Jurkat and Peyerimhoff (s. this Zbl. 44, 63) adapted the method given in the latter paper to obtain conditions, dependent only on the matrix elements, in order that $M(A)$ should hold for every sequence $\{s_n\}$; this is used by the author in his proof of Theorem 1. Theorem 1. Let A be normal and satisfy $M(A)$ for every A -limitable sequence $\{s_n\}$; and let $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k} = 0$ for every fixed k . Let C be an arbitrary

matrix. The necessary and sufficient conditions that the existence of A -lim s_n implies that of C -lim s_n are that a matrix $(b_{n,v})$ and a sequence $\{\theta_n\}$ exist satisfying

$$b_{n,v} = \sum_{k=v}^{\infty} c_{n,k} a_{k,v}^{-1}, \quad \theta_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} \sum_{v=0}^k a_{k,v}^{-1},$$

and such that

$$c_{n,k} = \sum_{v=k}^{\infty} b_{n,v} a_{v,k}, \quad \sum_{v=0}^{\infty} |b_{n,v}| < M$$

independently of n , $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n,v} = \beta_v$ for each fixed v , $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta$. Moreover, if

A -lim $s_n = \sigma$, then C -lim $s_n = \theta \sigma + \sum_{v=0}^{\infty} \beta_v (\sigma_v - \sigma)$. A matrix A is said to be

multiplicative with multiplier α if it is a K -matrix (conservative matrix) with characteristic numbers λ, α_k , where $\alpha_k = 0$ for all k . Theorem 1 A. Let A be a multiplicative matrix with non-zero multiplier, normal, and satisfy $M(A)$ for every A -limitable sequence $\{s_n\}$; let C be an arbitrary matrix. Then the existence of A -lim s_n implies that of C -lim s_n if, and only if, there is a K -matrix B such that $BA = C$. Moreover, if A -lim $s_n = \sigma$ and B has characteristic numbers β, β_v ,

then C -lim $s_n = \beta \sigma + \sum_{v=0}^{\infty} \beta_v (\sigma_v - \sigma)$. Theorem 1 B. Let A be a normal

T -matrix (regular matrix) satisfying $M(A)$ for every A -limitable sequence $\{s_n\}$; and let B be an arbitrary T -matrix. Then $(BA) \supseteq A$ [i. e., (BA) -lim s_n exists whenever A -lim s_n exists]. Theorem 2. Let A, C be row-finite matrices, and let A possess a row-finite left-hand reciprocal ^{-1}A . Then the necessary and sufficient condition that C -lim s_n exists whenever A -lim s_n exists is that $C \cdot ^{-1}A$ should be a K -matrix. Theorems 3 and 4 are applications of the above results to Nörlund methods of summability.

R. G. Cooke.

Brudno, A. L.: Ein Beispiel zweier Toeplitzscher Matrizen, die beschränkt verträglich und beschränkt nicht überdeckbar sind. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 22, 309—320 (1958) [Russisch].

Verf., der bahnbrechend in der Limitierungstheorie beschränkter Folgen gewirkt hat, gewinnt ein weiteres Ergebnis aus diesem Gebiet. Er gibt ein Beispiel zweier permanenter Matrixverfahren A und B , die für beschränkte Folgen verträglich sind, zu denen es aber kein permanentes Matrixverfahren C gibt, das

jede beschränkte Folge aus den Wirkfeldern von A und B limitiert. Das beruht darauf, daß die von $A^\infty(x)$ und $B^\infty(x)$ aufgespannte Linearform f eine unbeschränkte Norm (bezüglich $|x| = \sup_k |x^k|$) besitzt. — Dasselbe Resultat findet man in einer kürzlich erschienenen Arbeit von Lorentz-Zeller (dies. Zbl. 80, 41). Zur Konstruktion betrachtet Verf. für $n = 1, 2, \dots$ den $3n$ -dimensionalen Raum R^{3n} , dessen Vektoren $x = \{x^k\}$ mit der Norm $|x| = \sup_k |x^k|$ versehen werden. Er bildet zwei n -dimensionale Teilräume α_n und β_n . Dabei wird α_n von den Vektoren

$$u_{1n} = \{1 + \delta_1, -1 + \delta_1, \delta_1 \varepsilon_1 + \delta_1, \delta_1, \dots, \delta_1\},$$

$$u_{2n} = \{\delta_2, \delta_2, \delta_2, 1 + \delta_2, -1 + \delta_2, \delta_2 \varepsilon_2 + \delta_2, \delta_2, \dots, \delta_2\}, \dots, u_{nn}$$

aufgespannt; β_n von den entsprechenden Vektoren v_{kn} , bei denen δ_k durch $-\delta_k$ ersetzt ist. Die δ_k und ε_k sind fest gewählt und erfüllen $\delta_k \searrow 0$, $\sum \delta_k < 1$, $1 > \varepsilon_k \searrow 0$. Es gibt v_n Linearformen $\sum a_{in}^k x^i$ ($k = 1, \dots, v_n$), die in α_n verschwinden, in $e = \{1, \dots, 1\}$ den Wert 1 annehmen und (bei festem $\varepsilon > 0$) eine Norm $1/(1 - \varepsilon)$ haben. (Lemma 1; dort sollte betont werden, daß die Hyperebenen Γ_k durch L gehen; die Methode des Ref., dies. Zbl. 52, 55, ist vielleicht vorzuziehen.) Indem er die so erhaltenen $(v_n, 3n)$ -Matrizenblocks Ecke an Ecke zusammenfügt und die Lücken mit Nullen füllt, erhält er eine permanente Matrix A ; und entsprechend mit β_n ein B . Durch Aneinanderreihen von Vektoren $u_{kk}, u_{k+1}, u_{k+2}, \dots$ (an ein geeignetes Anfangsstück) bekommt er eine beschränkte Folge x_a , die von A zu Null limitiert wird; aus den v_{kn} entsprechend eine von B zu Null limitierte Folge x_b . Die Folge $(x_a - x_b)/(2\delta_k)$ hat von $e = \{1, 1, \dots\}$ einen Abstand ε_k . Da die Linearform f auf ihr den Wert Null annimmt, folgt die Behauptung über die Norm von f . Andererseits sind die linearen Mengen α_n und β_n so beschaffen, daß eine gute Approximation von $e = \{1, 1, \dots, 1\}$ durch $u + v$ (mit $u \in \alpha_n$ und $v \in \beta_n$) nach sich zieht, daß die Normen von u und v groß sind. Das bewirkt, daß A und B nur für unbeschränkte Folgen unverträglich sein können. Der Beweis von Lorentz-Zeller verläuft ganz ähnlich. Nur werden A und B explizit aus einfacheren Blocks konstruiert, wobei aber die Vorschrift für die Zusammensetzung komplizierter ist. Vielleicht lassen sich die Beweise vereinfachen, wenn man eine Zweinorm-Konvergenz oder — was auf dasselbe hinausläuft — eine geeignete lokalkonvexe Topologie einführt.

K. Zeller.

Ramanujan, M. S.: The „translativity“ problem for quasi-Hausdorff methods of summability. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A 24, 4—14 (1958).

A transformation of the series $\sum u_n$ into the series $\sum v_n$, defined by $v_n = \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k} u_k$.

is said to be conservative and the matrix $H = (h_{n,k})$ a δ -matrix, if $\sum v_n$ converges to a limit whenever $\sum u_n$ does so. If, in addition, the two limits are the same, the transformation is said to be regular and the matrix an α -matrix. A δ -matrix or an α -matrix H for which $\lim_{k \rightarrow \infty} h_{n,k} = 0$ are called a δ_0 -matrix or α_0 -matrix respectively.

Any matrix transforming $\sum u_n$ into $\sum v_n$ is said to be translatable if, whenever $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ is summable to l by the matrix, then so is $0 + u_0 + u_1 + u_2 + \dots$, and conversely. The matrix is translatable to the left, or translatable to the right, according as the first half alone of the condition of translativity or the second (converse) half alone of the condition is fulfilled. The problem of translativity for the Hausdorff matrices has been discussed by Kuttner (this Zbl. 70, 61). In Theorem I of the present paper, the author proves the following result for a quasi-Hausdorff matrix (H^*, μ_n) which is also a δ_0 -matrix: Let (H^*, μ_n) and $(H^*, \mu_{n+1}/\mu_n)$ be both δ_0 -matrices. Then, for the class B of series with bounded partial sums, (H^*, μ_n) is translatable to the left. If, in addition, the limit constant associated with $\{\mu_{n+1}/\mu_n\}$ is not $\frac{1}{2}$, then (H^*, μ_n) is translatable for the class B . The result is similar to that for

Hausdorff methods given by Kuttner in Theorem 2 of his paper referred to above: the proof is based on eight lemmas. Translative theorems of Vermes [Amer. J. Math. 71, 541–562 (1949; this Zbl. 33, 237), theorems 3. III and 3. IV] for the method $A(p)$ of Taylor series continuation, where the boundedness of the partial sums of the series is not required, are deduced by the author from the proof of his Theorem I. Theorem II is an unpublished result by Kuttner, and shows how a deduction from Theorem I for bounded sequences can be improved: If (H^*, μ_{n-1}) is any conservative sequence-to-sequence quasi-Hausdorff transformation, then (H^*, μ_{n+1}) is translative for bounded sequences. R. G. Cooke.

Parameswaran, M. R.: On some Mercerian theorems in summability. Proc. Amer. math. Soc. 8, 968–974 (1957).

Verv. beweist Mercersätze mittels funktionalanalytischer Methoden (in einer Banachalgebra besitzt ein Element ein Inverses, wenn es „nahe“ der Eins liegt). Die im wesentlichen schon bekannten Sätze 1 und 2 besagen, daß eine konvergenz-treue Matrix A keine beschränkt-divergente Folge limitiert, wenn

$$\liminf_n \left\{ |a_{nn}| - \sum_{k \neq n} |a_{nk}| \right\} > 0$$

gilt: ist A überdies untere Dreiecksmatrix, so limitiert A überhaupt keine divergente Folge. Ähnliche Aussagen gelten für nulltreues bzw. beschränktheitstreues A . Satz 4 lautet: Ist P eine untere Dreiecksmatrix, die ein absolut konvergenztreues Verfahren (Folge-Folge-Form) definiert, und gilt

$$\left| p_{nn} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \sum_{i=n}^k (p_{ki} - p_{k-1,i}) \right| \right| > \lambda > 0,$$

so ist die P -Transformation einer Folge nur dann absolut konvergent, wenn die Urfolge selber absolut konvergent ist. — Bei Hausdorffverfahren gibt es ein einfacheres Kriterium für „absolute Konvergenzgleichheit“ (Satz 5), weil bei diesen absolute Permanenz aus gewöhnlicher Permanenz folgt. Literatur: Zeller, Theorie der Limitierungsverfahren (1958) S. 78 und S. 13–14; sowie Širokov, s. dies. Zbl. 65, 292. K. Zeller.

Jakimovski, Amnon: Some Tauberian theorems. Pacific J. Math. 7, 943–954 (1957).

The author points out that K. K. Chen's theorem (cf. this Zbl. 60, 156): „the pair of conditions that (a) the series $\sum a_n$ is summable Abel to s and (b) $n^2(a_n - a_{n-1}) \rightarrow 0$ implies $\sum a_n \rightarrow 0$ “ is equivalent to the statement that, on writing $s_n = a_0 + \dots + a_n$, if $\{s_n\}$ satisfies (a) and (b) then it is summable $(H, -1)$ to s . A sequence $\{s_n\}$ is said to be summable $(H, -k)$ to s , if

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} s_m \Delta^{n-m} (m+1)^k = s.$$

The author proves: let k be a positive integer, the conditions (a) and $\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \Delta^k s_{n-k} = 0$ are necessary and sufficient for the truth of (1). The proof is based upon the generalized form of Hadwiger's inequality

$$(2) \quad \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left| - (m+1)^p \Delta^p s_{m-p} - \sum_{r=0}^p (m+1)^{p-r} \sum_{v=0}^r \binom{r}{v} \left(\frac{m}{1+v} \right)^{n-v} \Delta^{p-1} s_{n-p-1} \right| \\ \leq \varrho_p \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \binom{n}{p+1} \Delta^{p+1} s_{n-p-1} \right|.$$

As consequences of the above theorem, the author demonstrates that if (a) holds good and, by some fixed k , (3) $\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} s_{mk} \Delta^{n-m} (m+1)^{-\lambda-k} > -K$, then $\{s_n\}$ is summable $(H, \lambda-1)$ to s . Instead of (3), if the sum of (3) is bounded,

then $\{s_n\}$ is summable $(H, \alpha + \varepsilon)$ for $\varepsilon > 0$, provided (a) holds. Under (a), the condition necessary and sufficient for the (H, α) -summability of $\{s_n\}$ is that the sequence $\left\{\binom{n}{k} \Delta^k s_{n-k}\right\}$ should be summable $(H, \alpha + k)$ to zero for some k . The proofs are based on certain theorems due to O. Szász, concerning Abel summable series (cf. this Zbl. 49, 44).

Chen Kien-Kwong.

Rajagopal, C. T.: Simplified proofs of "some Tauberian theorems" of Jakimovski. Pacific J. Math. 7, 955—960; Addendum and corrigendum 1727 (1957).

"The fundamental theorem" in Jakimovski's paper (cf. the preceding review) is: the necessary and sufficient conditions for $\{s_n\}$ is summable $(H, -k)$ to s are

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-x) \sum_0^\infty s_n x^n = s \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \Delta^k s_{n-k} = 0,$$

k being a positive integer. The proof is simplified by the author, as he only uses Hadwiger's inequality

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| s_n + \sum_{\nu=0}^\infty \Delta s_{\nu-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu \right| \leq \tau \lim_{n \rightarrow \infty} |n \Delta s_{n-1}|,$$

where $\tau = C + \int_1^\infty e^{-x} x^{-1} dx$ (C = Euler's constant) in the place of Jakimovski's generalized form of (1). In the addendum and corrigendum the author corrects an invalid argument in his "simplified proof" of Jakimovski's theorem. The invalid argument has been pointed out by B. Kuttner who also noticed to the author that Jakimovski's result is contained in Hausdorff, Math. Z. 31, 186—196 (1930).

Chen Kien Kwong.

Włodarski, L.: Sur les méthodes continues de limitation du type de Borel. Ann. Polon. math. 4, 137—164 (1958).

Verf. hat früher (s. dies. Zbl. 64, 57) eine allgemeine Theorie der „stetigen“ Limitierungsverfahren aufgestellt. Jetzt befaßt er sich mit speziellen Verfahren dieser Art, nämlich den Borelverfahren B_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), die auf der Transformation

$$B_k(t, x) = 2^k e^{-t} \sum_{n=0}^\infty \frac{t^{n/2^k}}{\Gamma(n/2^k + 1)} \xi_n \quad (\text{betrachtet für } t \rightarrow \infty)$$

beruhen. Die B_k sind permanent (Th. 1). Sie sind rechtstranslativ (Th. 2), d. h. mit $x = \{\xi_0, \xi_1, \dots\}$ wird auch $\{\xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots\}$ limitiert (zum selben Wert); zum Beweis führt er die Indexverschiebung von x auf eine Faltungsoption an der B_k -Transformation zurück. Theorem 3: Wird x von B_k zum Wert ξ (endlich oder unendlich) limitiert und existiert die B_{k-1} -Transformation von x , so wird x auch von B_{k-1} zum Wert ξ limitiert. — Zum Beweis gibt Verf. die Vermittlungstransformation an:

$$B_{k-1}(t, x) = \frac{e^{-t}}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{4t} + u\right) B_k(u, x) du.$$

Theorem 3 bleibt richtig, wenn B_{k-1} durch B_q (wo $q < k$) oder durch A (Abelverfahren) ersetzt wird. B_{-k} limitiert die geometrische Folge $\{a^n\}$ zum Wert 0, wenn eine der Ungleichungen $R(a^{2^i}) < 1$ ($i = 0, 1, \dots, k$) erfüllt ist. Zu jedem B_k gibt es eine B_k -limitierbare Folge, die von keinem B_p mit $p > k$ limitiert wird. Entsprechendes gilt für die B_q mit $q < k$. — Man vergleiche Ref., Theorie der Limitierungsverfahren (1958), Nr. 67 und dort angegebene Literatur. K. Zeller.

Tyler, Barbara: Absolute convergence and summability factors in a sequence. J. London math. Soc. 33, 341—351 (1958).

Nachdem Bosanquet die Limitierbarkeitsfaktoren ε_n vom Typ (C_k, C_0) charakterisiert hatte [Mathematika, London 1, 24—44 (1954)], gibt Verf. nun die

(C_k , $|C_0|$)-Faktoren an ($k, 0$ ganz und ≥ 0). Genau dann transformiert die Folge $\{\varepsilon_n\}$ jede $|C_k|$ -limitierbare Folge $\{s_n\}$ in eine $|C_0|$ -limitierbare Folge $\{\varepsilon_n s_n\}$, wenn gilt:

(i) $\varepsilon_n = O(n^{c-k})$ und $\sum_{\nu=0}^n \varepsilon_\nu = O(n)$, (ii) $\Delta^{k-1} \varepsilon_n = O(n^{1-k})$, (iii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta C^q(\varepsilon_n)| < \infty$, wo $C^q(\varepsilon_n)$ die C_0 -Transformation der Folge $\{\varepsilon_n\}$ bedeutet. Beweis über einen Satz von Mears (dies. Zbl. 17, 162), der die Dreiecksmatrizen charakterisiert, die jede Folge beschränkter Schwankung in eine ebensolche transformieren. *D. Gaier.*

Leipnik, R. B.: Note on alternating Tannery series. Amer. math. Monthly 65, 197—198 (1958).

Es sei $\{q_n\}$ eine Folge von natürlichen Zahlen mit $q_n \rightarrow \infty$ (für $n \rightarrow \infty$), weiterhin $\{f_{k,n}\}$ eine Doppelfolge, so beschaffen, daß $f_{k,n} \geq f_{k+1,n}$ wenn $n > n_0$ und $1 \leq k \leq q_n$ ist. Setzen wir weiter voraus, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{k,n} = f_k$ existiert für alle k und $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = 0$ ist. Nun wird die folgende Behauptung bewiesen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{q_n} (-1)^{k-1} f_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} f_k.$$

Der Beweis ist ganz einfach.

S. Fenyő.

Thron, W. J.: Convergence of infinite exponentials with complex elements. Proc. Amer. math. Soc. 8, 1040—1043 (1958).

Let $\{t_n(z)\}$ be a sequence of exponential functions $t_n(z) = e^{a_n z}$, where the a_n are arbitrary complex numbers not on the negative real axis. Define $T_{k,m}(z) = t_k(T_{k+1,m}(z))$, $T_{m+1,m}(z) = z$, $1 \leq k \leq m+1$, $m \geq 1$, and set $T_n(z) = T_{1,n}(z)$. The sequence $\{T_n(1)\}$ is called an infinite exponential. Here the following theorem is proved: An infinite exponential converges if, for all $n \geq 1$, $|a_n| \leq e^{-1}$. The value u to which the infinite exponential converges satisfies the condition $|\log u| \leq 1$. For real a_n , this is the result of Barrow (cf. this Zbl. 13, 254). For $a_n = \log b_n$ (where throughout this article the principal branch of the function is meant) and for all $b_n = b$, the problem goes back to Seidel [Abh. königl. Bayer. Akad. Wiss., 2. Kl. 11 (1870)] and Eisenstein.

E. Frank.

Myrberg, Pekka J.: Sur une généralisation de la moyenne arithmétique-géométrique de Gauss. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 3201—3204 (1958).

Es werden Mischalgorithmen von Mittelwerten, d. h. die Prozesse $x_{n+1} = \varphi(x_n, y_n)$, $y_{n+1} = \psi(x_n, y_n)$, x_n, y_n komplexe Zahlen ($n = 0, 1, \dots$) untersucht, wo φ und ψ als reflexive $[\varphi(x, x) = \psi(x, x) = x]$ und symmetrische, in beiden Veränderlichen im Reellen wachsende, homogene Funktionen mit Exponent 1 vorausgesetzt werden. Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \chi(x_0, y_0)$, so wird der Mischalgorithmus konvergent genannt.

Das Problem läßt sich auf die Konvergenz der Iteration $z_{n+1} = \varphi(z_n, 1)/\psi(z_n, 1)$ zurückführen. Zugleich ist $\chi(z_0, 1) = \prod_{n=0}^{\infty} \psi(z_n, 1)$. Dies gibt auch ein Approximationsverfahren für $\chi(z, 1)$. Es werden die Fälle mit rationalen φ, ψ erwähnt und ein Satz für rationale φ, ψ von höchstens zweitem Grade ohne Beweis ausgesprochen. [Ref. glaubt, daß in (3. 2) $z = (qt + p)/(qt - p)$ mit $q = (b - c)/(a - c)$ statt $z = (t + p)/(t - p)$ stehen sollte.] Die Arbeit enthält keine Literaturhinweise. Als Arbeiten mit ähnlichem Gegenstand seien die folgenden erwähnt: G. Aumann (s. dies. Zbl. 11, 12), I. Fenyő (s. dies. Zbl. 34, 327) und C. Domb-M. E. Fisher (s. dies. Zbl. 72, 334).

J. Aczél.

Thron, W. J.: On parabolic convergence regions for continued fractions. Math. Z. 69, 173—182 (1958).

The author continues his study of parabolic convergence regions for continued fractions $a_1 1 + a_2 1 + \dots$. There is obtained an estimate of the error committed if the continued fraction is replaced by one of its approximants, a result which also

gives information concerning the factors which influence the rapidity of convergence. A convergence neighborhood is found in which the convergence is proved uniform, even though the elements a_n are functions of any number of variables. Among other convergence theorems proved here, two results are established in which the a_n lie in different parabolas for different values of n .
E. Frank.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Tchakaloff, L.: Formules générales de quadrature mécanique du type de Gauss. Colloquium math. 5, 69—73 (1958).

Besprochen werden Näherungsformeln der Art

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^m \sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} f^{(\lambda)}(a_k),$$

und zwar die Berechnung der Argumente a_n in der Weise, daß die Formeln exakt werden für Polynome möglichst hohen Grades.
E. J. Nyström.

Godefroid, Michel: Remarque sur la formule de Taylor. Enseignement math., II. Sér. 4, 120—123 (1958).

Si tratta di una interessante osservazione circa la validità della formula di Taylor per una funzione $f(x)$, $a \leq x \leq b$ di una variabile, col resto nella forma di Lagrangia. Essa viene di solito stabilita supponendo continua a destra in a la derivata $f^{(n)}(x)$, se $n+1$ è l'ordine della derivata che compare nel resto. L'A. richiama anzitutto la nozione di valore di aderenza di $f(x)$ in $x_0 + 0$ (è un numero λ tale che per ogni coppia $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$ esiste nell'intorno $(x_0, x_0 + \eta)$ un x tale che $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$) e stabilisce il seguente risultato: Se a e b sono finite e $f(x)$ ammette la $f^{(n)}(x)$ continua e derivabile in $a < x < b$, detto $\alpha[\beta]$ un valore di aderenza di $f(x)$ in $a + 0$ $[b - 0]$, se k_1, k_2, \dots, k_n sono valori di aderenza di $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ in $a + 0$, esiste un numero c , $a < c < b$, per cui:

$$\beta - \alpha = \sum_{i=1}^n \frac{(b-a)^i}{i!} k_i + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Un'estensione analoga subisce la formula di Cauchy.

L. Giuliano.

Brudnyj, Ju. A. (Brudny, Yu. A.) and I. E. Gopengauz (Hopenhaus): On a problem raised by N. N. Lusin. Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 12—15 (1957) [Russisch].

Let $f(x)$ be a continuous function on a segment $[a, b]$, $P_n(f; x)$ be the polynomial of the best approximation

$$E_n(f) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(f; x)|,$$

and $M_n(f)$ the set of all $x \in [a, b]$ such that $|f(x) - P_n(f; x)| = E_n(f)$. The author proves that 1. there exist a function $f(x)$ continuous on $[a, b]$ and such a sequence of natural numbers $\{n_k\}$, $0 < n_k < n_{k+1} < \dots$ that $\text{mes } M_{n_k}(f) > 0$ for every k .

2. Let $s_n(f, x)$ be the partial sum of the degree n of the periodic function $f(x)$ and $M_n(f)$ the set of points $x \in [0, 2\pi]$ such that

$$|f(x) - s_n(f; x)| = \max_{t \in [0, 2\pi]} |f(t) - s_n(f; t)|.$$

Then there exist a continuous function $F(x)$, $x \in [0, 2\pi]$ and a sequence $\{n_k\}$, $0 < n_k < n_{k+1} < \dots$ such that $\text{mes } M_{n_k}(F) > 0$.
J. Górski.

Butzer, Paul L.: Sur la meilleure approximation d'une fonction définie par sa transformée de Laplace. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 687—689 (1958).

Sei $y(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma u} x(u) du$ konvergent für $\sigma > 0$ und

$$l_{\varepsilon, t}[y(\sigma)] = \sum_n l_n L_n(t) e^{-\varepsilon n} \quad \text{mit} \quad l_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{y^{(k)}(\frac{1}{2})}{k!}$$

(es wird also das Abelsche Summierungsverfahren auf eine Laguerre-Reihe angewandt). Nach Satz 1 gilt $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l_{\varepsilon, t}[y(\sigma)] = x(t)$ für fast alle t . Die $l_{\varepsilon, t}[y(\sigma)]$ definieren eine Halbgruppe von Operatoren $T(\xi)[x]$. Verf. hat mit Hilfe von Sätzen über Halbgruppen eine recht allgemeine Theorie der Saturation (beste Approximationsgeschwindigkeit) aufgestellt [s. dies. Zbl. 72, 132 und Math. Z. 70, 93—112 (1958)], die auch hier anwendbar ist. In Satz 2 untersucht er für $x \in L_p$ ($1 \leq p < \infty$) den Ausdruck $\|l_{\xi, t}[y(\sigma)] - x(t)\|_p$ und setzt $g(t) = tx''(t) - x'(t) + [\frac{1}{2} - \frac{1}{4}t]x(t)$. Gilt $\|\cdot\|_p = o(\xi)$, so ist x von der Form $C \cdot e^{-t/2}$. Hingegen gilt $\|\cdot\|_p = O(\xi)$ für alle x mit $g \in L_p$. Im Falle $p > 1$ folgt aus $\|\cdot\|_p = O(\xi)$ umgekehrt wieder $g \in L_p$. In Satz 3 werden diese Ergebnisse in der Terminologie der Saturation formuliert, während Satz 4 in derselben Weise Hermite-Reihen behandelt.

K. Zeller.

Chako, Nicholas: Application de la méthode de la phase stationnaire dans la théorie de la diffraction des images optiques. C. r. Acad. Sci., Paris 247, 580—582 (1958).

Chako, Nicholas: Calcul d'intégrales doubles pour de grandes valeurs d'un paramètre. C. r. Acad. Sci., Paris 247, 637—639 (1958).

Für das Doppelintegral

$$U(k) = \iint_D g(x, y) e^{ik\varphi(x, y)} dx dy,$$

wobei $g(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ beliebig oft differenzierbare Funktionen sind, werden bei beliebiger Lage des kritischen Punktes (x_0, y_0) asymptotische Entwicklungen für $k \rightarrow \infty$ mit angedeuteten Beweisen angegeben. Während die Grundlage der ersten Note die Methode der stationären Phase ist, wird in der zweiten Note die Theorie von Poincaré und Picard über die Residuen von Doppelintegralen herangezogen. In beiden Fällen ergeben sich dieselben Ergebnisse, von denen hier nur für den Fall, daß (x_0, y_0) ein innerer Punkt von D ist, in dem $q_x = q_y = 0$ ist, die Formel

$$U(k) \sim [2\pi i \varepsilon e^{ik\varphi(x_0, y_0)}] g(x_0, y_0) / k \sqrt{|\Delta|}$$

angeführt sei mit $\Delta = \varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2$ und $\varepsilon = 1$ für $\Delta > 0$, $\varphi_{xx} > 0$, $\varepsilon = -1$ für $\Delta > 0$, $\varphi_{xx} < 0$ sowie $\varepsilon = i$ für $\Delta < 0$. Ein strenger Beweis dieser Formel wurde bereits von J. Focke (dies. Zbl. 57, 49) durchgeführt, der die Voraussetzungen noch präzisiert.

L. Berg.

Gagaev, B. M.: Orthogonale Systeme von Funktionen, deren Ableitungen ebenfalls orthogonal sind. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 2 (74), 133—136 (1957) [Russisch].

Let $\{\Phi_n(x)\}$ be the system of functions orthonormal with respect to the weight function $q(x)$ with first derivatives $\Phi'_n(x) \in L_p$, $x \in [a, b]$. The author shows that it is always possible to construct such a system of functions $\{y_n(x)\}$ which 1° are linear combinations of $\Phi_n(x)$, 2° orthonormal with respect to the weight $q(x)$ and 3° with first derivatives $\Phi'_n(x)$ orthogonal with respect to the given function $p(x)$.

L_p is the class of functions $\omega(x)$ which satisfy the condition $\int_a^b p(x) \omega^2(x) dx < \infty$.

J. Górski.

Mishoe, Luna I.: On the Gibbs' phenomenon in a certain eigenfunction series. Proc. Amer. math. Soc. 9, 1—5 (1958).

$f(x)$ sei in $\langle 0, 1 \rangle$ von beschränkter Variation und werde in eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x)$ nach den Eigenfunktionen $u_n(x)$ von $u'' - q(x)u - \lambda[p(x)u - u'] = 0$, $u(0) = u(1) = 0$ entwickelt, wobei $q(x)$ in $\langle 0, 1 \rangle$ stetig und $p(x)$ zweimal stetig differenzierbar seien. Die Partialsummen $\sum_{k=-n}^n a_k u_k(x)$ der Reihe zeigen dann das Gibbs-

sche Phänomen für die Funktion $g(x) = f(x) + c \exp \int_0^x p \, dt$, wenn die Partialsummen der gewöhnlichen Fourierreihen von $f(x)$ das Gibbssche Phänomen aufweisen.

L. Collatz.

Freud, Géza: Über die Asymptotik orthogonaler Polynome. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **11**, 19—32 (1957).

Es sei $\Phi_n(f; z)$ ($n = 0, 1, \dots$) ein normiertes System orthogonaler Polynome auf dem Einheitskreise bezüglich der Gewichtsfunktion $f(\theta) \in L$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), $0 < m \leq f(\theta) \leq M$, d. h.

$$\int_0^{2\pi} \overline{\Phi_n(f; e^{i\theta})} \Phi_m(f; e^{i\theta}) f(\theta) \, d\theta = 2\pi \delta_{nm}.$$

Falls $f(\theta) = \{u(\theta)\}^{-1}$, wo $u(\theta)$ ein trigonometrisches Polynom ist, so hat man (1) $\Phi_n(f; z) = z^{-n} \{D(f; z)\}^{-1} = 0$, wo $D(f; z) = \exp k(f; z)$ und $k(f; z)$ diejenige reguläre Funktion in $|z| < 1$ ist, deren Realteil auf $|z| = 1$ die Randwerte $\frac{1}{2} \log f(\theta)$ annimmt. Dies legt die Vermutung nahe, daß im allgemeinen Falle die linke Seite von (1) gleich $o(1)$ ist. Einen Satz von Szegő verallgemeinernd zeigt Verf., daß dies in der Tat der Fall ist an jeder Stelle γ , in deren Umgebung die Bedingung (2) $f(\theta) - f(\gamma) = O(|\theta - \gamma|)$ erfüllt ist. — 2. Wenn man von der Gewichtsfunktion $f(\theta)$ nur voraussetzt, daß $0 \leq f(\theta) \in L$, $\{f(\theta)\}^{-1} \in L$, $f(\gamma) > 0$, und in einer Umgebung von γ (2) erfüllt ist, dann ist die Folge $\Phi_n(f; e^{i\gamma})$ beschränkt. *J. Horváth.*

Freud, G.: Eine Bemerkung zur asymptotischen Darstellung von Orthogonalpolynomen. Math. Scandinav. **5**, 285—290 (1958).

Let G denote the class of functions $f(\theta) \geq 0$, measurable in $[-\pi, \pi]$, for which the integrals $\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \, d\theta$, $\int_{-\pi}^{\pi} |\log f(\theta)| \, d\theta$ exist. With such a function $f(\theta) \in G$, one can associate a uniquely determined analytic function $D(f; z)$ regular for $|z| < 1$. [Cf. G. Szegő, Orthogonal polynomials, New York (1939), § 10]. Let $\{\Phi_n(f; z)\}$ denote the orthogonal polynomials with the weight function $f(\theta)$ on the unit circle, $z = e^{i\theta}$. Then the author shows that if (1) $f(\theta)$ is of limited total variation, (2) $0 < m \leq f(\theta) \leq M$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, and (3) $(P) \int_{-\pi}^{\pi} \log f(\theta) \cot \frac{1}{2}(\gamma - \theta) \, d\theta$ exists, then

$$\Phi_n(f; e^{in\gamma}) = e^{in\gamma} \{D(f; e^{i\gamma})\}^{-1} + o(1) \text{ at } \theta = \gamma. \quad G. Sunouchi.$$

Geronimus, Ja. L. (Heronimus, J. L.): On equiconvergence of Fourier-Chebyshev and Maclaurin expansions of analytical H_2 class functions. Doklady Akad. Nauk SSSR **113**, 491—492 (1957) [Russisch].

Let

$$s_n(f; z) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(z), \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) P_k(e^{i\theta}) p(\theta) \, d\theta,$$

$$\sigma_n(f; z) = \sum_{k=0}^n \gamma_k z^k, \quad \gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} \, d\theta$$

be the n -th partial sums respectively of the Fourier-Chebyshev and Maclaurin expansions of the given function $f(z)$ analytic in $|z| < 1$. $f(z) \in H_2$; $\{P_n(z)\}$ are polynomials orthonormal on $|z| = 1$ with respect to the weight function $p(e^{i\theta}) \geq 0$, $\log p(e^{i\theta}) \in L_1$. The author gives some conditions bearing on $p(e^{i\theta})$ under which $\lim_{n \rightarrow \infty} \{s_n(f; e^{i\theta}) - \sigma_n(f; e^{i\theta})\} = 0$. *J. Górski.*

Czipszer, J. et G. Freud: Sur l'approximation d'une fonction périodique et de ses dérivées successives par un polynôme trigonométrique et par ses dérivées successives. Acta math. **99**, 33—51 (1958).

Let $f(x)$ be periodic with period 2π and its k -th derivative be continuous. If

$P_n(x)$ is a trigonometric polynomial of the n -th order and satisfies

$$\max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon,$$

then the authors show

$$\max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)| \leq c(k) \{n^k \varepsilon + E_n(f^{(k)})\}$$

where $c(k)$ is a constant depending only on k and $E_n(f)$ is the best approximation of f by the trigonometric polynomial of the n -th order. The proof is done by the use of de la Vallée Poussin's delayed mean. The localization theorem of the above result is given also.

G. Sunouchi.

Zolin, A. F.: Eine Abschätzung der Konvergenz im Mittel von trigonometrischen Interpolationspolynomen. Doklady Akad. Nauk Uzb. SSR 1958, 17—22 (1958) [Russisch].

Let $f(\theta)$ be continuous and periodic with period 2π and $T_n(f, \theta)$ be its trigonometric interpolation polynomial of n -th order with equidistant nodal points. Then the author shows that

$$\int_0^{2\pi} \{f(\theta) - T_n(f, \theta)\} d\theta \leq 8\pi E_n(f),$$

where $E_n(f)$ means the best approximation of $f(x)$ in the Čebyšev metrics.

G. Sunouchi.

Chen, Yung-Ming: Some further asymptotic properties of Fourier constants. Math. Z. 69, 105—120 (1958).

The author shows some integrability theorems of trigonometric series by the method of asymptotic approximations of powers.

G. Sunouchi.

Timan, A. F.: Einige Bemerkungen über trigonometrische Polynome und Fourier-Stieltjesche Reihen. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 2 (74), 175—183 (1957) [Russisch].

Die Arbeit befaßt sich mit Abschätzungen der Form

$$\int_0^\pi \left| \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos k t \right| dt \geq C \left| \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(n)} a_k \right|.$$

Es wird u. a. gezeigt, daß

$$\int_0^\pi \left| \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos k t \right| dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu + 1} \sum_{(2n+1)\nu \leq k \leq (2n+1)(\nu+1)-1} a_{(2n+1)\nu-k} \left| k + \frac{1}{2} \right|$$

gilt und nicht verbessert werden kann. Ferner werden notwendige Bedingungen für Faktorenfolgen angegeben, die Fourierreihen von L -Funktionen (bzw. beschränkten meßbaren, bzw. stetigen Funktionen) oder Fourier-Stieltjes-Reihen in ebensolche Reihen überführen.

A. Peyerimhoff.

Ogieveckij (Ogievetski), I. I.: Generalisations of some results of G. H. Hardy, S. E. Littlewood and A. Zygmund on fractional integration and differentiation of periodic functions. Ukrain. mat. Žurn. 9, 205—210, engl. Zusammenfassg. 210 (1957) [Russisch].

f' soll die Ableitung und f_α das Integral von der Ordnung α (α reell, positiv) der periodischen Funktion f bedeuten. $E_n[f]$ sei die beste Annäherung von f durch trigonometrische Polynome n -ter Ordnung. Satz 1: Aus $E_n[f] = O(1/n^\alpha)$ ($\alpha > 0$) folgt, daß f^γ für $\gamma < \alpha$ existiert und $(f^\gamma)_\nu = f$, sowie $E_n[f^\gamma] = O(1/n^{\alpha-\gamma})$ gilt. — Satz 2: Aus $E_n[f] = O(1/n^\alpha)$ ($\alpha > 0$) folgt $E_n[f_\gamma] = O(1/n^{\alpha-\gamma})$. — Satz 3: f^β gehört zur Zygmundschen Klasse Λ^* dann und nur dann, wenn $E_n[f] = O(1/n^{1-\beta})$. — Aus diesen Sätzen folgt eine Reihe von Behauptungen, die insbesondere Sätze von Hardy und Littlewood [Math. Z. 27, 565—606 (1928)] und Zygmund (s. dies. Zbl. 60, 138) als Spezialfälle enthalten. — Ref. bemerkt, daß die Arbeit von D. Králík

(s. dies. Zbl. 70, 65) Sätze über Ableitungen und Integrale gebrochener Ordnung ebenfalls mit konstruktiv-funktionentheoretischer Methode herleitet.

B. Sz.-Nagy.

Sinha, S. R.: On the non-summability of the conjugate series of a Fourier series. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part. A 23, 377—394 (1957).

Sei $f(t)$ eine mit 2π periodische, L -integrierbare Funktion,

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

ihre Fourierreihe; die zu dieser konjugierte Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta)$ und die als Cauchysches Integral definierte konjugierte Funktion

$$g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \psi(u) \operatorname{ctg} \frac{u}{2} du \quad \text{mit} \quad \psi(u) = f(\theta + u) - f(\theta - u).$$

Endlich sei für $\alpha > 0$ $\Psi_{\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \psi(u) du$, $\Psi_0(t) = \psi(t)$ und für $\alpha \geq 0$ $\psi_{\alpha}(t) = \Gamma(\alpha+1) t^{-\alpha} \Psi_{\alpha}(t)$. Der konjugierten Reihe wird als Abel-Summe der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} V(x, \theta) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta) x^n \quad (0 \leq x < 1),$$

wenn er existiert, zugeschrieben. Über die A -Summierbarkeit einer konjugierten Reihe, für welche die konjugierte Funktion als Cauchy-Integral existiert, weiß man seit Plessner (1923), daß aus der Bedingung

$$(1) \quad \int_0^t \psi(t) dt = o(t) \quad (t \rightarrow 0)$$

die Beziehung

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[V(x, \theta) - \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \psi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \right] = 0, \quad \varepsilon = \arcsin(1-x),$$

folgt. Insbesondere ergibt sich: die Divergenz der konjugierten Funktion gegen $+\infty$ ($-\infty$) ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Divergenz der Abel-Mittel der konjugierten Reihe gegen $+\infty$ ($-\infty$). B. N. Prasad gelang 1932 (s. dies. Zbl. 4, 347) eine Verallgemeinerung dieses Satzes, indem er die konjugierte Funktion durch eine verallgemeinerte konjugierte Funktion und die Bedingung (1) durch die schwächere Bedingung

$$\int_0^t \frac{\Psi(t)}{t} dt = o(t) \quad \text{für} \quad t \rightarrow 0$$

ersetzte. Sinha [On the non-summability of the conjugate series of a Fourier series. Proc. nat. Acad. Sci. India 22 Sect. A, Parts IV—VI. 83—88 (1953)] bewies eine weitere Verallgemeinerung des Satzes von Plessner, indem er die Bedingung (1) durch die schwächere $\psi_{\alpha}(t) = o(1)$ für $t \rightarrow 0$ ($\alpha \geq 1$ ganz) ersetzte und zeigte, daß die Divergenz der verallgemeinerten konjugierten Funktion

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \psi_{\alpha-1}(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \quad \text{gegen} \quad +\infty (-\infty)$$

unter der Nebenbedingung $\psi_{\alpha}(t) = O(1)$ eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Divergenz der Abel-Mittel der konjugierten Reihe einer Fourierreihe gegen $+\infty$ ($-\infty$) darstellt. Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Ausdehnung dieses Ergebnisses auf beliebige reelle (nicht notwendig ganzzahlige) Werte von $\alpha > 0$. Verf. beweist nämlich die beiden Sätze: 1. Wenn für $\alpha \geq 1$ die Bedingung $\psi_{\alpha}(t) =$

$= o(1) \ (t \rightarrow 0)$ besteht, gilt

$$V(x, \theta) - \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \psi_{\alpha-1}(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt = o(1) \text{ für } x \rightarrow 1-0.$$

2. Wenn für $\alpha > 0$ die Bedingung $\psi_{\alpha}(t) = O(1) \ (t \rightarrow 0)$ besteht, so gilt

$$V(x, \theta) - \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \psi'_{\alpha-1}(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt = O(1) \text{ für } x \rightarrow 1-0.$$

Der 2. Satz besagt offenbar im Fall $\psi_{\alpha}(t) = O(1) \ (t \rightarrow 0)$ für $\alpha > 0$, daß die Divergenz der verallgemeinerten konjugierten Funktion (2) gegen $+\infty (-\infty)$ eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Divergenz der Abel-Mittel der konjugierten Reihe einer Fourierreihe gegen $+\infty (-\infty)$ darstellt.

V. Garten.

Mohanty, R. and S. Mohapatra: On the absolute convergence of a series associated with a Fourier series. Proc. Amer. math. Soc. 7, 1049—1053 (1957).

Let $\Phi(t) = \frac{1}{2} \{f(x+t) + f(x-t) - 2s\}$, where $f \in L(0, 2\pi)$ is 2π -periodic, and let S_n be the partial sum of the n th order of the Fourier series $\sum A_n$ of f at the

point x . Let $\Phi_1(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \Phi(u) du$. The authors study the behaviour of the

series (*) $\sum (S_n - s)/n$ (See Zygmund, Trigonometrical series; this Zbl. 11, 17) and obtain among others, the following results. 1. If $\Phi_1(t) \log k/t$ is of bounded variation in $(0, \pi)$, $|\Phi_1(t)|/t \in L(0, \pi)$, and the sequence $\{n^{\delta} A_n\}$ is of bounded variation for $\delta > 0$, then the series (*) is absolutely convergent. 2. If $|\Phi(t)|/t \in L(0, \pi)$ then the series (*) is summable $[c, \delta]$, $\delta > 0$.

U. N. Singh.

Rath, P. C. and R. Mohanty: On the convergence and summability of a series associated with the derived Fourier series. Proc. Amer. math. Soc. 9, 11—17 (1958).

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \nu (b_r \cos \nu x - a_r \sin \nu x)$ konvergiert, falls für $g(t) = (f(x+t) - f(x-t))/4 \sin \frac{1}{2} t$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{v \rightarrow 0} \int_{kv}^{\eta} \left| \frac{g(t+v)}{t+v} - \frac{g(t)}{t} \right| dt = 0 \quad (0 < \eta \leq \pi)$$

gilt und $\int_0^{\pi} g(t) \csc \frac{1}{2} t dt$ für $t=0$ als Cauchy-Integral existiert. Es wird ein weiterer Satz über die $(\log n, 1)$ -Summierbarkeit der Reihe bewiesen.

A. Peyerimhoff.

Musiak, Julian: On absolute convergence of Fourier series of some almost periodic functions. Zeszyty Nauk. Uniw. A. Mickiewicza, Mat.-Chem. 1, 9—16, russ. und engl. Zusammenfassg. 16—17 (1957) [Polnisch].

Es werden Fourierreihen $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \sin \lambda_n x)$ der Besicovitchschen B^2 -fp. Funktionen mit $\lambda_n \uparrow \infty$ auf absolute Konvergenz untersucht. Allgemeiner wird die Konvergenz der Reihe (1) $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^{\gamma} + |b_n|^{\gamma})$ mit $0 < \gamma < 2$ dann festgestellt, wenn die Exponenten λ_n hinreichend schnell wachsen und der mittlere quadratische Stetigkeitsmodul von f , d. h.

$$\omega_2(h) = \left\{ \sup_{|\delta| \leq h} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x+\delta) - f(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

hinreichend klein ist. Es genügt z. B., wenn

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [\mu(2^{\nu} \pi) - \mu(2^{\nu-1} \pi) + 1]^{1-\nu/2} \omega_2^{\nu}(2^{-\nu}) < \infty$$

gilt, wo μ die zu $\lambda(n) = \lambda_n$ inverse Funktion bedeutet. Übersichtlicher wird die

Konvergenzbedingung, wenn $n^q = O(\lambda_n)$ mit $q > 0$ gilt, was insbesondere für die periodischen Funktionen zutrifft (mit $q \geq 1$). Dann hat man den Satz: mit $\sum_{n=1}^{\infty} n^{(1-\gamma/2)/q-1} \omega_2^\gamma(n^{-1})$ konvergiert auch (1). Für periodische Funktionen und für $q = \gamma = 1$ ergibt sich daraus der bekannte Satz von Bernstein, aus welchem folgt, daß die Funktionen der Klasse $\text{Lip } \alpha$ ($\alpha > \frac{1}{2}$) absolut konvergente Fourierreihen haben. Schärfere Behauptungen erhält man wenn man die Endlichkeit der p -ten Variation von f , d. h.

$$\left\{ \overline{\lim} \frac{1}{2T} \sup_H \sum_{n=1}^N |f(x_n) - f(x_{n-1})|^\nu \right\}^{1/p} < \infty$$

voraussetzt, wo H eine beliebige Teilung des Intervalls $\langle -T, T \rangle$ durch Punkte x_0, \dots, x_N bezeichnet. Gilt dann $n^q = O(\lambda_n)$ und ist für ein $p \in (0, 2]$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(1-\gamma/2)/q-\gamma/2-1} \omega_1^{(1-p/2)\gamma}(n^{-1}) \left(\text{mit } \omega(h) = \sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ |\delta| \leq h}} \text{ess } |f(x+\delta) - f(x)| \right)$$

konvergent, so ist es die Reihe (1) gleichfalls. Durch Spezialisierung erhält man wieder bekannte Sätze, z. B. den Satz von Zygmund, nach welchem die Fourierreihe einer Funktion von beschränkter Schwankung aus der Klasse $\text{Lip } \alpha$ ($\alpha > 0$) absolut konvergiert. Noch mehr kann Verf. für lakunäre Reihen ($\lambda_{n+1}/\lambda_n > q > 1$) beweisen. Dann ist unter der Bedingung $\omega_2(h) = O(h^\alpha)$ ($\alpha > 0$) die Reihe (1) für jedes $\gamma > 0$ konvergent. Es wird bemerkt, daß dieser Satz für beschränkte Funktionen und für $\gamma = 1$ schwächer ist, als der Sidonsche Satz, laut welchem lakunäre Fourierreihen beschränkter periodischer Funktionen auch ohne sonstige Bedingungen absolut konvergieren. Der Wert der Arbeit beruht nicht nur auf der Übertragung bekannter Sätze über periodische Funktionen auf eine Klasse von fastperiodischen, sondern auch auf Verallgemeinerungen, die für die periodischen Funktionen selbst Neues beisteuern.

S. Hartman.

Sendov, Blagovest: On the expansion of regularly monotonic functions into Goncharov series. Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 450—453 (1958) [Russisch].

Ein früherer Satz des Verf. (dies. Zbl. 72, 284) wird verallgemeinert, indem die den Ungleichungen $\varepsilon_n f^{(n)}(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ genügenden Funktionen $f(x)$ unter gewissen die Konstanten $\varepsilon_n = \pm 1$, $\varepsilon_0 = 1$ betreffenden Bedingungen in der Form $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x) + A R(x)$, $a_\nu \geq 0$, $A \geq 0$ dargestellt werden, wobei $P_\nu(x)$ die entsprechenden Gontscharoffschen Polynome sind und $R(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{P_n(1)}$ ist.

J. Tagamlitzki.

Il'in (Il'in), V. A.: Uniform convergence of expansions in characteristic functions for regions having an odd number of dimensions. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 650—652 (1957) [Russisch].

Verf. führt den folgenden Satz an: Es sei Ω_N (N ungerade) ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzschem Rande. Die Funktion f genüge folgenden Bedingungen: 1° $f \in W_p^{(N-1)/2}$, wobei $p > 2N/(N-1)$; 2° $\Delta^K f$, $K = 0, \dots, (N-2)/4$, genügen einer homogenen Randbedingung im Mittel. Dann konvergiert bei Summation in der Reihenfolge wachsender Eigenwerte λ_i ($\Delta u_i + \lambda_i u_i = 0$) die Fourierreihe $\sum (f, u_i) u_i$ gleichmäßig gegen f in jeder streng inneren Untermenge Ω'_n von Ω_n .

K. Maurin.

Il'in, V. A.: Über die gleichmäßige Konvergenz der Entwicklungen nach Eigenfunktionen in jedem abgeschlossenen Bereich. Mat. Sbornik, n. Ser. 45 (87), 195—232 (1958) [Russisch].

In dieser Abhandlung gibt Verf. die bestmöglichen Bedingungen für die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1} u_i^2(x)$, wo $\Delta u_i + \lambda_i u_i = 0$ (übliche Rand-

bedingungen) im abgeschlossenen beschränkten Gebiete $\Omega_N = \Omega_N \cup \partial\Omega_N$ mit dem Ljapunovschen Rande $\partial\Omega_N$. Die Konvergenz ist gleichmäßig für $\alpha > \frac{1}{4}N$ (für kleines α gibt es Gegenbeispiele!). Daraus folgen bekanntlich wichtige Korrolare für die Iteration $G^\alpha(\cdot, \cdot)$ der Greenschen Funktion G und die Abbildungseigenschaften des Integraloperators

$$G^\alpha \varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_N} G^\alpha(x, y) \varphi(y) dy.$$

Es wird eine Abschätzung für den Rest der Fourierreihe einer Funktion f , wo $f \in H_{[N/2]+1}(\Omega_N)$, und $\Delta^\kappa f$, $\kappa = 0, \dots, [N/2]$, Randbedingungen im verallgemeinerten Sinne genügen, gegeben, nämlich

$$\sum_{i=m}^{\infty} |(f, u_i) u_i(x)| = O(\lambda_m^{-\alpha}),$$

wo $\alpha < \frac{1}{2}$ für gerades N , $\alpha < \frac{1}{4}$ für ungerades N .

K. Maurin.

Spezielle Funktionen:

Chihara, T. S.: Nonlinear recurrence relations for classical orthogonal polynomials. Amer. math. Monthly **65**, 195—197 (1958).

Aus der Differentialgleichung $X p_n''(x) + K_1 p_1(x) p_n'(x) + \lambda_n p_n(x) = 0$ und den Rekursionen $p_{n+1}(x) = (A_n x + B_n) p_n(x) - C_n p_{n-1}(x)$, $X p_n'(x) = (\alpha_n + n X''(x/2)) p_n(x) + \beta_n p_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, denen die klassischen Polynome $p_n(x)$ genügen [siehe Erdelyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi, Higher transcendental functions, II (1953; dies. Zbl. **52**, 295), 10, 7, wird die Rekursion

$$\begin{aligned} & X^2(p_n'(x)^2 - p_n(x) p_n''(x)) \\ &= U_n(x) p_n(x)^2 - \beta_n^2 C_n^{-1} p_{n-1}(x) p_{n+1}(x) + \beta_n V_n(x) p_n(x) p_{n-1}(x) \end{aligned}$$

abgeleitet, wo $U_n(x)$, $V_n(x)$ von X, x und den oben auftretenden Konstanten abhängige Funktionen sind. Betrachtung des Spezialfalles der Jacobischen Polynome $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ (siehe W. A. Al-Salam, dies. Zbl. **79**, 95; M. S. Webster, dies. Zbl. **78**, 257). Druckfehler: In der ersten Formel von 2. muß es im letzten Gliede rechts $K_1 p_1 X p_n p_n'$ heißen.

O. Volk.

Ferrer Figueras, Lorenzo: Über die den erzeugenden Funktionen $u_{q,k} = [1 - x^q + (x - z)^q]^{-1/k}$ entsprechende partielle Differentialgleichung

$$\sum_{\omega=0}^s \sum_{r=0}^{\omega} A_{\omega r} z^r \frac{\partial^{\omega} u}{\partial x^{\omega-r} \partial z^r} = 0.$$

Collect. Math. **9**, 77—85 (1957) [Spanisch].

Suite de l'étude des polynomes $P_n(x)$ définis par la série génératrice

$$u = (1 - x^q + (x - z)^q)^{-1/k} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n$$

commencé dans l'appendice A d'un travail antérieur (v. ce Zbl. **53**, 254). Pour $q = k = 2$ ceci donne les polynomes de Legendre. Ici l'A. démontre le résultat suivant, déjà mentionné p. 267—269, loc. cit. Si l'entier s satisfait à l'inégalité

$$(s-1)(s-q) - \binom{s-2}{2} + 3 - q > 0,$$

alors il existe une équation aux dérivées partielles

$$\sum_{\omega=0}^s \sum_{r=0}^{\omega} A_{\omega r}(x) z^r \frac{\partial^{\omega} u}{\partial x^{\omega-r} \partial z^r} = 0,$$

qui est vérifiée par u . De cette équation découle immédiatement une suite d'équations différentielles $\sum_{i=0}^s \delta_i(x) P_n^{(i)}(x) = 0$ pour les polynomes $P_n(x)$. — Le travail contient un très grand nombre de fautes d'impression, par exemple k devient p en mi-chemin.

J. Horváth.

Carlitz, Leonard: On some polynomials of Tricomi. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **13**, 58—64 (1958).

Die Tricomischen Polynome $l_n(x)$ und $l_n^{(\alpha)}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ sind nicht orthogonal (s. F. G. Tricomi, dies. Zbl. **45**, 345). Verf. zeigt, daß die Polynome $f_n(x) = -(n+2)x^{n+2}l_{n+2}(x)$ und $f_n^{(\alpha)}(x) = x^n l_n^{(\alpha)}(x^{-2})$ ($\alpha > 0$) den Rekursionen

$$(n+1)(f_{n+1}(x) - x f_n(x)) + f_{n-1}(x) = 0$$

bzw.

$$(n+1)f_{n+1}^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)x f_n^{(\alpha)}(x) + f_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0$$

genügen und daher orthogonale Systeme bilden; das Intervall ist $(-\infty, +\infty)$ und die Gewichtsfunktionen sind Sprungfunktionen, die in beiden Fällen angegeben sind. — Druckfehler: In (1. 2) muß es $-x l_{n-1}(x)$ statt $x l_n(x)$ heißen; im Zitat [2] (S. 64) ist vol. 1 zu setzen. O. Volk.

Carlitz, L.: Some orthogonal functions in several variables related to theta functions. Duke math. J. **25**, 311—319 (1958).

The author defines functions

$$f_m(x; Q) = \sum_{r_i=0}^{m_i} A_m(r) e^{Q(\lambda r)/2} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_N^{r_N},$$

where $A_m(r)$ is a product of Heine binomial symbols $\begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}$. These functions satisfy several orthogonal relations with respect to thetafunctions on one hand, with respect to simple exponential weightfunctions on the other hand. The relations thus obtained are generalizations of the orthogonality relations of Hermite polynomials. In the last part of the paper the author introduces generating functions by his functions f_m . It is a pity that there are several serious misprints in the formulas, e. g. in the definitions of G_n and $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$. F. van der Blij.

Koschmieder, Lothar: Turánsche Determinanten, mit elliptischen Funktionen gebildet. Math. Nachr. **18**, H. L. Schmid-Gedächtnisband 265—273 (1958).

Die elementare Trigonometrie arbeitet mit 6 aus sin und cos gebildeten periodischen Quotienten 1. Ordnung. In Jacobis Aufbau der elliptischen Funktionen liefern die Grundfunktionen (1) sn, cn, dn dementsprechend 12 doppeltperiodische Quotienten 2. Ordnung. Daß für $l = 1, 2, \dots$ die Folgen (2) sn(ul); cn(ul); dn(ul) von Turánscher Art sind, wurde durch Verf. (dies. Zbl. **80**, 52) früher gezeigt. Die vorliegende Note vervollständigt unsere Kenntnis Turánscher Folgen dahin, daß neben (2) nur noch sn(ul)/dn(ul) und sonst keiner der oben erwähnten 12 Quotienten eine Turánsche Folge bildet. Wilk. Maier.

Ragab, F. M.: On the product of Legendre and Bessel functions. Proc. Amer. math. Soc. **9**, 26—31 (1958).

Darstellung der Integrale

$$\int_0^\infty \lambda^{\gamma-1} (1+\lambda)^{-\gamma/2} G_\nu(z(1+\lambda)^{1/2}) F(\alpha, \beta; \gamma; -\lambda) d\lambda, \quad G_\nu(\sigma) = J_\nu(\sigma) \text{ bzw. } K_\nu(\sigma),$$

durch zwei E -Funktionen; für $\alpha = -m-n$, $\beta = -m+n+1$, $\gamma = 1-m$ erhält man daraus Darstellungen der Integrale

$$\int_0^\infty \lambda^{-m/2} (1+\lambda)^{(m-\nu)/2} G_\nu(z(1+\lambda)^{1/2}) P_n^m(1+2\lambda) d\lambda$$

durch zwei E -Funktionen. O. Volk.

Spiegel, Murray R.: The Dirac delta function and the summation of certain Bessel series. J. Math. Physics **36**, 378—380 (1958).

Siehe Magnus-Oberhettinger, Formeln und Lehrsätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik (1948; dies. Zbl. **39**, 297), 2. 1. S. 59ff.: S. 226; Erdélyi-Magnus-Oberhettinger-Tricomi, Higher transcendental functions, II. (1953; dies. Zbl. **52**, 295), p. 103. O. Volk.

Miller, J. C. P.: Note on the general solution of the confluent hypergeometric equation. *Math. Tables Aids Comput.* **11**, 97—99 (1957).

Bemerkungen über die allgemeine Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung $x y'' + (\gamma - x) y' - \alpha y = 0$, insbesondere, wenn γ eine ganze Zahl ist, im Zusammenhang mit A. Webb u. Airey-Adams-Bateman-Olsson, *Math. Tables Aids Comput.* **2**, 352—353 (1947). [Vgl. Erdélyi-Magnus-Oberhettinger-Tricomi, *Higher transcendental functions. I.* (1953; dies. Zbl. **51**, 303), Chap. VI, insb. 6. 7. 1.]

O. Volk.

Funktionentheorie:

●Leja, Franciszek: *Theorie der analytischen Funktionen.* (Biblioteka mat. T. 14.) Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1957. 558 S. zł 47,— [Polnisch].

This book contains the classical material of the theory of analytic functions as well as the detailed study of some selected branches of the theory, for example: the best approximation of continuous functions by polynomials, the application of the transfinite diameter (the capacity), the method of extremal points due to the author and its applications to the solution of Dirichlet's problem and conformal mapping, the theory of harmonic functions, the conformal representation of multiply connected domains and the elements of the theory of analytic functions of several variables.

J. Górski.

Biernacki, M.: Sur les travaux de la théorie de fonctions en Pologne. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I* **251/1**, 11 p. (1958).

Tumarkin, G. C.: On simultaneous approximation in the mean of complex-valued functions given along several closed curves. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **114**, 710—713 (1957) [Russisch].

Énoncé sans démonstrations de résultats dont je cite le suivant, relatif à une courbe unique; γ est une courbe de Jordan rectifiable, dont l'intérieur g est représenté conformément par $w = \psi(z)$ sur $|w| < 1$; $\sigma(s)$ est une fonction croissante sur γ ; alors $\int_{\gamma} \log \sigma'(s) |\psi'(\zeta) d\zeta| = -\infty$ (intégrale au sens de Lebesgue-Stieltjes) est une condition nécessaire et suffisante pour que le système des polynômes soit total dans l'espace $L^p(d\sigma, \gamma)$ des fonctions définies sur γ avec $\int_{\gamma} |f|^p d\sigma$ fini.

G. Bourion.

Tichomirov (Tikhomirov), V. M.: On the ε -entropy of some classes of analytical functions. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **117**, 191—194 (1957) [Russisch].

Dans la classe $B_{\sigma}(M)$ des fonctions entières vérifiant $|f(z)| < M \exp(\sigma|y|)$, on introduit la métrique

$$\varrho_T(f_1, f_2) = \max |f_1(x) - f_2(x)|, \quad -T \leq x \leq T;$$

le nombre minimum d'éléments d'un recouvrement de $B_{\sigma}(M)$ par des ensembles de diamètre $< \varepsilon$ a, pour $T \rightarrow \infty$, un logarithme de l'ordre de $(2\sigma/\pi) \log(1/\varepsilon)$.

G. Bourion.

Evgrafov, M. A. and A. D. Solov'ev (Soloviev): On a certain general test of basis. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **113**, 493—496 (1957) [Russisch].

Les $\lambda_n(z)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$; $\lambda_n(0) = 0$) étant régulières dans $|z| < R$, on pose

$$\Delta_0(z) = \lambda_0(z), \quad \Delta_n(z) = \lambda_n(z) - \lambda_{n-1}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{nk} z^k$$

puis $\Delta_n^0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_{nk}| r^k$ et $l_n(r) = \sum_{k=1}^n \Delta_{nk}^0(r)$. Si $\lim_n l_n(r) = 0$ pour tout $r < R$, toute fonction $f(z)$ holomorphe dans $|z| < R$ admet un développement unique $\sum a_n z^n e^{-\lambda_n(z)}$ uniformément convergent dans l'intérieur de $|z| < R$.

G. Bourion.

Evgrafov, M. A.: Determination of the class of convergence in certain interpolation problems. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 31—33 (1957) [Russisch].

Au système de fonctionnelles linéaires $\{L_n(F)\}$ portant sur les fonctions entières $F(z)$ et définies par $L_n(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) u_n\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z}$ avec $u_n(z) = z^n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z^{n+k}$,

on associe le système biorthogonal de polynômes $\{P_n(z)\}$: $L_n(P_m) = \delta_{nm}$. Dans des hypothèses sur les u_n trop compliquées pour être reproduites, l'A. indique une classe de fonctions pour lesquelles le développement $F(z) = \sum L_n(F) P_n(z)$ est valable.

G. Bourion.

Kaz'min, Ju. A.: Über die Vollständigkeit von Funktionensystemen der Form $\{f(z + \alpha_n)\}$ und $\{f^{(n)}(z)\}$. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 2 (74), 151—154 (1957) [Russisch].

$f(z)$ étant holomorphe dans $|z| < R$, soit $\sup_n \alpha_n = \alpha < R$. Si l'un des deux systèmes $\{f(z + \alpha_n)\}$, $\{f^{(n)}(z)\}$ est total dans l'espace A_r des fonctions holomorphes dans $|z| < r$, $r = R - \alpha$ (topologie de la convergence uniforme à l'intérieur), l'autre l'est également. Cette propriété résulte de la considération de $L[f(z + u)]$ comme fonction de u , L étant une fonctionnelle linéaire continue sur A_r . G. Bourion.

Kaz'min, Ju. A.: Über das Spektrum von Systemen der Form $\{z^n + \lambda f_n(z)\}$. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 3 (75), 155—158 (1957) [Russisch].

Soit $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} z^k$ avec

$$\limsup_k \left[\sup_n |a_{kn}| \right]^{1/k} \leq \frac{1}{R} < 1 \text{ et } \limsup_n \left[\sup_k |a_{kn}| \right]^{1/n} \leq \frac{1}{\varrho} < 1;$$

on suppose de plus que le déterminant infini $\|\delta_{kn} + a_{kn}\|$ est absolument convergent et différent de zéro. L'étude de l'inversion de la matrice $(\delta_{kn} + a_{kn})$ montre que le système $\{z^n + f_n(z)\}$ est total dans l'espace A_r des fonctions holomorphes dans $|z| < r$, pour chaque r tel que $1/\varrho < r < R$; le même résultat vaut pour $\{z^n + \lambda f_n(z)\}$ en excluant les valeurs de λ qui annulent la fonction entière d'ordre zéro définie par le déterminant $\|\delta_{kn} + \lambda a_{kn}\|$. G. Bourion.

Hewitt, Edwin and J. H. Williamson: Note on absolutely convergent Dirichlet series. Proc. Amer. math. Soc. 8, 863—868 (1957).

Unter Benutzung der Theorie der l_1 -Algebren kommutativer Halbgruppen (E. Hewitt-H. S. Zuckerman, s. dies. Zbl. 72, 127) zeigen Verf.: $f(s)$, $s = \sigma + it$, sei für $\sigma \geq 0$ durch eine Dirichletsche Reihe (*) $\sum_1^{\infty} a_n n^{-s}$ mit $\sum_1^{\infty} |a_n| < \infty$ darstellbar. Dann folgt aus $|f(s)| \geq k > 0$ für $\sigma \geq 0$, daß auch $1/f(s)$ in der Form (*) darstellbar ist, d. h. es ist $\frac{1}{f(s)} = \sum_1^{\infty} b_n n^{-s}$ mit $\sum_1^{\infty} |b_n| < \infty$. Ein entsprechendes Resultat wird für Reihen der Gestalt $\sum_{r \in Q} a_r r^{-it}$, wo Q die Menge der positiven rationalen Zahlen bezeichnet, bewiesen. Vgl. nachstehendes Referat. H.-E. Richert.

Edwards, D. A.: On absolutely convergent Dirichlet series. Proc. Amer. math. Soc. 8, 1067—1074 (1958).

Der Satz von E. Hewitt und J. H. Williamson über die Umkehrung einer absolut konvergenten Dirichletreihe unter der Voraussetzung $\inf |f(s)| > 0$ (vgl. vorstehendes Referat) wird hier einfacher aus einem Satz von R. S. Phillips (s. dies. Zbl. 45, 215) hergeleitet und auf verallgemeinerte Dirichletreihen $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ ausgedehnt. H.-E. Richert.

Tanaka, Chuji: On the singularities of Dirichlet series. Commentarii math. Helvet. 31, 184—194 (1957).

Die Dirichletsche Reihe $F(s) = \sum_1^{\infty} a_n \exp(-\lambda_n s)$, $s = \sigma + it$, $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty$, habe die endliche Konvergenzabszisse σ_s . Dann beweist Verf.

1. Es existiert eine Folge $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, so daß die Reihe $\sum_1^\infty \varepsilon_n a_n \exp(-\lambda_n s)$ $\sigma = \sigma_s$ zur natürlichen Grenze hat. 2. Es existiert eine Dirichletsche Reihe $\sum_1^\infty b_n \exp(-\lambda_n s)$ mit $|b_n| = |a_n|$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |\arg(b_n) - \arg(a_n)| = 0$ oder $\arg(b_n) = \arg(a_n)$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n}{a_n} \right| = 1$, die $\sigma = \sigma_s$ zur natürlichen Grenze hat. Diese beiden Sätze waren mit der zusätzlichen Voraussetzung $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0$ durch O. Szász [Math. Ann. 85, 99—110 (1922)] und Verf. (s. dies. Zbl. 51, 56) bekannt. Der Beweis beruht auf einem Kriterium für die Singularitäten Dirichletscher Reihen von A. Ostrowski [S.-Ber. Math. Ges., Berlin 27, 32—47 (1928)]. H.-E. Richert.

Tietz, Horst: Funktionen mit Cauchy'scher Integraldarstellung auf nicht-kompakten Gebieten Riemannscher Flächen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 250/36, 9 S. (1958).

G sei ein Teilgebiet der nicht kompakten Riemannschen Fläche X derart, daß $G' = X - G$ kompakt ist. Sei dG der Rand von G , $H(dG)$ der Vektorraum der in Halbumgebungen $U(dG) \cap G$ von dG holomorphen Funktionen, $H(G)$ bzw. $H(G')$ die Unterräume von $H(dG)$, deren Elemente in G bzw. G' holomorph sind; die entsprechenden Räume holomorpher Differentiale werden mit $H^d(dG)$, $H^d(G)$, $H^d(G')$ bezeichnet. $\varphi \circ d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi d\sigma$ (C ein in G enthaltener und zu dG hinreichend benachbarter homologer Zyklus) ist eine Paarung von $H(dG)$ und $H^d(dG)$. Ein Paar (L, L') von Endomorphismen von $H(dG)$ heißt eine Laurentsche Trennung, falls neben $LH(dG) = H(G)$, $L'H(dG) = H(G')$, $L + L' = 1$, $L'^2 = L'$ noch einige andere naheliegenden Forderungen (wie Stetigkeitsforderungen) erfüllt sind. Verf. beweist nach einer Zusammenstellung elementarer Eigenschaften der Laurentschen Trennung, daß sich die Elementardifferentiale (in 2 Variablen) auf X und die Laurentschen Trennungen eindeutig entsprechen. $LH(G)$ und $LH^d(G)$ bestehen aus genau den Elementen, welche eine Cauchysche Integraldarstellung bez. des zugeordneten Elementardifferentials zulassen. Zu jedem Element f aus $H(G)$, das nicht in $H(X)$ liegt, gibt es ein Elementardifferential, bez. dessen f eine Cauchysche Integraldarstellung besitzt. Abschließend wird noch der Zusammenhang mit Fabergrößen (vgl. H. Tietz, dies. Zbl. 77, 288) besprochen. H. Röhrl.

Lavrentieff, M. M.: Uniqueness and stability of analytic functions. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 250/19, 6 p. (1958).

Es wird zunächst (ohne Beweis) eine obere Schätzung des Betrages einer im Einheitskreise holomorphen und unimodular beschränkten Funktion angegeben, deren Betrag auf einer gegebenen Punktmenge, die im Innern des Einheitskreises einen Häufungspunkt besitzt, unterhalb einer Schranke $\varepsilon < 1$ bleibt [Satz 1]. [Ein ähnlicher Satz wurde vom Verf. an anderer Stelle (s. dies. Zbl. 72, 70) bewiesen.] — Dann wendet sich Verf. Funktionen zweier Variabler $f(z_1, z_2)$ ($z_1 = x - iu$, $z_2 = y + iv$) zu, die in der Einheitskugel $D: |z_1|^2 + |z_2|^2 \leq 1$ holomorph und unimodular beschränkt, sowie auf der reellen Ebene reellwertig sind. Unter der Voraussetzung, daß $|f(z_1, z_2)|$ in einer hinreichend umfassenden Teilmenge des reellen Einheitskreises nicht größer als ε ist, wird eine obere Schranke für $|f(x, y)|$ angegeben [Satz 2]. Mit $\varepsilon \rightarrow 0$ strebt diese Schranke gegen 0, so daß der Satz einen Eindeutigkeitssatz für reelle analytische Funktionen von zwei Variablen als Grenzfall enthält. Die Zurückführung des Satzes 2 auf Satz 1 wird kurz skizziert.

P. Seibert.

Achiezer (Akhiezer), N. I. and B. Ja. (B. J.) Levin: Inequalities for derivatives analogous to Bernstein's inequality. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 735—738 (1958) [Russisch].

E est un ensemble parfait de mesure harmonique positive sur l'axe réel, G le domaine complémentaire, $f(z)$ une fonction holomorphe sur G ou sur une surface de Riemann portée par G , d'ordre fini: $\log |f(z)| = O(|z|)$, avec des valeurs limites sur E de module inférieur à un. Une majoration de $|f'(x)|$ sur E est annoncée, moyennant une limitation de croissance sur f , où la fonction de comparaison est définie à partir d'une propriété de représentation conforme. Quand E est un segment, on retrouve les inégalités de S. Bernstein et de Privalov. Les démonstrations ne sont pas données.

G. Bourion.

Clunie, J.: Inequalities for integral functions. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 9, 1—7 (1958).

Für alle hinreichend großen r sei $\psi(r)$ n -mal stetig differenzierbar. Man bezeichne (bei gegebenem ψ) mit H die Klasse derjenigen ganzen Funktionen $w(z)$, welche der Ungleichung

$$\max_{|z|=r} |w(z)| \leq \psi(r) \quad (r \geq r_0)$$

genügen. Dann gibt es eine Folge $\{r_n\}$ ($\lim r_n = \infty$) derart, daß

$$\max_{|z|=r} |w^{(n)}(z)| \leq k \psi^{(n)}(r).$$

mit einem festen $k > 1$ gilt. Hayman und Stewart (s. dies. Zbl. 48, 60; 56, 72) hatten (1) mit dem Faktor $kn! (e/n)^n$ bewiesen.

A. Dinghas.

Barry, P. D.: The minimum modulus of certain integral functions. J. London math. Soc. 33, 73—75 (1958).

Es sei $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ eine ganze Funktion, deren Koeffizienten für genügend großes n verschieden von Null sind und folgende Ungleichungen erfüllen:

$$(1) \quad |a_n/a_{n+1}| \geq \vartheta^2 |a_{n-1}/a_n|, \quad \vartheta > 1.$$

Ist $\vartheta > 2,2$, so hat S. M. Shah bewiesen, daß für diese Funktionen, die von der Ordnung null sind,

$$(2) \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, f)}{M(r, f)} \geq 1 - C(\vartheta)$$

gilt, wobei $0 \leq C(\vartheta) < 1$ ist. [Bull. Amer. math. Soc. 52, 1046—52 (1946)]. Verf. untersucht das asymptotische Verhalten des besten Wertes für $C(\vartheta)$: Ist $C_0(\vartheta) = \liminf C(\vartheta)$ für alle $C(\vartheta)$, so daß (1) die Ungleichung (2) nach sich zieht, so ist $C_0(\vartheta) \sim 4 \vartheta^{-1}$ ($\vartheta \rightarrow \infty$). Daraus folgt

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, f)}{M(r, f)} = 1, \quad \text{wenn} \quad \left| \frac{a_n^2}{a_{n-1} a_{n+1}} \right| \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty.$$

Verf. weist auf eine genauere Abschätzung für $C_0(\vartheta)$ hin.

C. Andreian-Cazacu.

Perry, R. L.: Real zeros of integral functions. J. London math. Soc. 32, 467—473 (1957).

Es sei $f(z, t) = \sum_{n=0}^\infty \chi_n(t) a_n z^n$ mit $a_n \geq 0$, wo $\chi_n(t)$ unabhängige Zufallsfunktionen im Intervall $0 \leq t < 1$ sind und $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ eine ganze Funktion endlicher Ordnung $\rho > 0$ bedeutet. Weiter wird vorausgesetzt, daß $\chi_n(t)$ für alle n dieselbe Verteilungsfunktion $F(u) = \Pr(\chi_n(t) < u)$ besitzen, wo $F(u)$ eine symmetrische Verteilungsfunktion mit verschwindendem Mittelwert und von Null verschiedener Streuung ist. Außerdem gelte für $g(z)$

$$\varrho' = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \log g(x)}{\log x} > 0.$$

Verf. beweist zwei Ungleichungen, in denen $\eta(t, R)$ die Anzahl der reellen Nullstellen von $f(z, t)$ im Intervall $(0, R)$ bezeichnet und A, B, D, A_1, D_1 und A_2 Konstanten

sind. Die erste Ungleichung lautet

$$(1) \quad \Pr [\eta(t, R) < A \log \log R] < B/(\log R)^D, \quad D > 0.$$

Gilt für $g(z)$ auch noch $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\log g(x)}{x^q} = \beta > 0$, so haben wir

$$(2) \quad \Pr \left(\eta(t, R) < \frac{A_1 \log R}{\log \log R} \right) < \frac{1}{R^{D_1 / \log \log R}}, \quad D_1 > 0.$$

Ungleichung (1) ist insofern die bestmögliche, als aus der Funktion $g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^{3^n}}$

($q=1, q'=\frac{1}{2}$) mit $x_n(t) = r_n(t)$, wo $r_n(t)$ die Rademacherschen Funktionen sind, eine Funktionenklasse gebildet werden kann, deren jedes Glied höchstens $A_2 \log \log R$ Nullstellen im Intervall $(0, R)$ hat.

B. Penkov.

Jurčenko (Yurchenko), A. K. and L. E. Dundučenko (Dunduchenko): On the boundary values of functions regular and schlicht in the circle $|z| < 1$, belonging to certain special classes. Ukrain. mat. Žurn. 9, 455—460 (1957) [Russisch].

Zmorovič (s. dies. Zbl. 37, 336) hat gezeigt, daß sich jede im Kreise $|z| < 1$ analytische, schlichte Funktion $f(z)$, welche diesen Kreis auf einen Stern abbildet, in der Form

$$(1) \quad f(z) = z \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - z e^{-i\theta}) d\mu(\theta) \right\}$$

darstellen läßt, wobei $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq r < 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ist und $\mu(\theta)$ eine nicht-abnehmende, im Intervall $[-\pi, \pi]$ definierte Funktion mit beschränkter Schwankung bedeutet, die durch die Gleichungen $\mu(-\pi + 0) = \mu(-\pi)$, $\mu(\pi) = 2\pi$ normiert ist. Verf. zeigt, daß die Funktion (1) dann und nur dann eine Unstetigkeitsstelle auf dem Kreise $|z| = 1$ besitzt, wenn die Funktion $\mu(\theta)$ eine nicht identisch verschwindende singuläre Komponente hat. Dabei ist der Punkt $\zeta \in (|z| = 1)$ eine Unstetigkeitsstelle der im Kreise $|z| < 1$ regulären und auf $|z| = 1$ stetigen Funktion $f(z)$, wenn $f(z)$ keinem Grenzwert zustrebt, falls $z \rightarrow \zeta$, $z \in (|z| \leq 1)$.

L. Ilieff.

Kuźmina, G. V.: Determination of the least radius of schlichtness for a certain class of analytical functions. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 751—754 (1958) [Russisch].

Man betrachte die Gesamtheit der Funktionen $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$, die im Kreise $|z| < 1$ regulär sind und der Bedingung $\sum_{k=0}^{\infty} |d_k|^2 = 1$ genügen. Die Funktionen der Form

$$f(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k \right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

für die bei festem α , $0 < \alpha \leq 1$, die Bedingung $|c_1| = 2|d_0||d_1| = \alpha$ gilt, sind im Kreise $|z| < R = \min(r_1, r_2)$ schlicht. Dabei bedeuten r_1 und r_2 resp. die kleinsten positiven Wurzeln der Gleichungen $\alpha^2 - 2\alpha r + 2\alpha r^3 - r^4 = 0$ und $\alpha^2 - (4 - \alpha^2)r^2 + 3r^4 - r^6 = 0$. Die Schranke R kann man durch keine größere ersetzen.

L. Ilieff.

Wintner, Aurel: The theorem of Eneström and the extremal functions of Landau-Schur. Math. Scandinav. 5, 236—240 (1958).

Bei der Bestimmung der Landauschen Konstanten G_n (E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1929, S. 26—29) treten als Extremalfunktionen rationale Funktionen der Form $f(z) = \frac{z^n p(1/z)}{p(z)} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ auf, wobei $p(z) = \sum_{m=0}^n a_m z^m$ ist mit $a_0 > a_1 > \dots > a_n > 0$; $f(z)$ ist in $|z| \leq 1$ regulär mit $|f(z)| = 1$ für $|z| = 1$. Verf. beweist hier für solche $f(z)$ allgemein $b_m > 0$ ($0 \leq m \leq n$), $b_{n+1} < 0$.

D. Gaier.

Ahlfors, Lars V.: *Extremalprobleme in der Funktionentheorie*. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 249/1, 9 S. (1958).

In einem Vortrag (Helsinki, 1957) gibt Verf. eine Übersicht über drei wichtige Variationsmethoden der Funktionentheorie: Extremallängen, lineare Methoden und innere Variationen. Besonders werden Beziehungen zu verwandten Methoden (Grötzsch, Teichmüller), sowie Verallgemeinerungen hervorgehoben. Verf. drückt seine Überzeugung aus, die Funktionentheorie werde weiter als „Miniaturbild der ganzen Mathematik“ eine wesentliche Rolle bei der Prüfung und Entwicklung neuer Methoden für andere Gebiete spielen; es sei aber unfruchtbar, die Funktionentheorie als ein „geschlossenes Ganzes“ zu betrachten. Es werden auch Erwartungen des Verf. über teilweise oder ganz unberührte Forschungsgebiete formuliert, insbesondere in Verbindung mit der Gebietsvariation von Schiffer. J. Hersch.

Smidt (Schmidt), V.: *A generalized Riemann-Hilbert problem in the case of a negative exponent*. Doklady Akad. Nauk SSSR 119, 893—895 (1958) [Russisch].

Verf. betrachtet im Einheitskreis die Gleichung (*) $dU/dz - A\bar{U} = 0$ mit der Randbedingung $\operatorname{Re}(t^{-n}U(t)) = \gamma(t)$ auf dem Einheitskreis. Die Zahl n heißt bekanntlich der Index des Problems. Betrachtet man die neue gesuchte Funktion $V(z) = z^{-n}U(z)$, so erscheint für $V(z)$ ein Randwertproblem der obigen Gestalt mit dem Index Null. Verf. nimmt $n < 0$ an und erhält die bekannten Sätze über die Lösbarkeit von (*) aus den Sätzen für das Randwertproblem mit dem Index Null. Dieser Weg ist von W. Haack bei analoger Problemstellung verwendet worden (s. dies. Zbl. 49, 190; 47, 340). G. Hellwig.

Collingwood, E. F.: *Cluster sets and prime ends*. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 250/6, 11 p. (1958).

Let us first quote a part of the introduction of the present paper: „In this lecture I give a summary account of a recent theory on the cluster sets of continuous functions which is essentially topological in character with some of its applications to analytic functions in a circle and in particular to the boundary correspondence under conformal mapping“. For meromorphic functions most of the results are included in his former papers (this Zbl. 72, 76; 77, 285). He proves that some of them are true even for general continuous functions. As an example we state Theorem 1: Let λ_0 be a monotonic path in $|z| < 1$ terminating at $z = 1$ and let λ_θ be the rotation of λ_0 about the origin $z = 0$ through the angle θ . If $f(z)$ is continuous in $|z| < 1$, then $C_{\lambda_\theta}(f, e^{i\theta}) = C(f, e^{i\theta})$ in a residual set of points $e^{i\theta}$ where $C(f, e^{i\theta})$ is the cluster set at $e^{i\theta}$ and $C_{\lambda_\theta}(f, e^{i\theta})$ is the cluster set at $e^{i\theta}$ obtained along λ_θ . M. Ohtsuka.

Tietz, Horst: *Zur Realisierung Riemannscher Flächen*. II. Math. Ann. 136, 41—45 (1958).

(Teil I s. dies. Zbl. 64, 77.) Verf. verallgemeinert einen von H. Behnke und K. Stein (s. dies. Zbl. 55, 75) bewiesenen Satz über Approximierbarkeit holomorpher Funktionen durch meromorphe und leitet daraus sein Hauptresultat her: Sind auf einer nicht kompakten Riemannschen Fläche X disjunkte Gebiete G_1, G_2, \dots gegeben, welche sich im Innern von X nicht häufen, und ist für jedes G_i eine holomorphe Funktion f_i gegeben, derart, daß die Wertmengen $f_i(G_i)$ disjunkt sind, so existiert zu gegebenen kompakten Teilmengen M_i von G_i , $i = 1, 2, \dots$, eine in X meromorphe Funktion f derart, daß für jede komplexe Zahl a die Anzahl der a -Stellen von f auf $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ kleiner oder gleich der Anzahl der a -Stellen von f_i auf M_i ist. Drei Anwendungen dieses Satzes beschließen die Arbeit. H. Röhrli.

Hällström, Gunnar af: *Übertragung eines Satzkomplexes von Weierstrass und Dinghas auf beliebige Randmengen der Kapazität Null*. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 250/12, 8 S. (1958).

Ref. hatte (s. dies. Zbl. 77, 78) in einer früheren Arbeit den Fragenkomplex

des Verhaltens einer eindeutigen analytischen Funktion $w(z)$ in der Umgebung einer wesentlichen, isolierten Singularität aufgegriffen und (neben einem neuen Beweis für den Weierstrass-Casoratischen Satz) für den Picard-Nevanlinnaschen Satz, für diesen einfachen, wichtigen Fall, einen direkten Beweis gegeben, der von der komplizierten, tiefergehenden Methode, die Verf. in seiner Dissertation (s. dies. Zbl. 24, 131) entwickelte, keinen Gebrauch macht. Verf. überträgt nun die Schlüsse für den Fall einer isolierten Singularität auf Randmengen von der Kapazität Null und gewinnt unter Heranziehung der Methode seiner Dissertation Verallgemeinerungen der Ergebnisse des Ref. Der interessante Vortrag schließt mit einigen Bemerkungen über die Tragweite der bewiesenen Sätze.

A. Dinghas.

Seibert, Peter: Typus und topologische Randstruktur einfach zusammenhängender Riemannscher Flächen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 250/34, 10 S. (1958).

Let $w = f(z)$ be a meromorphic function in $G: |z| < R \leq \infty$. We introduce a topology into the set of transcendental singularities of the inverse function of $f(z)$ (accessible boundary points of the corresponding Riemann surface) by means of the metric used by Mazurkiewicz, and denote this topological space by Z . For a complex value w , we denote by Z_w the elements of Z which lie over w . The natural cyclic order of asymptotic paths in G induces a cyclic order on Z . The author sketches a proof of the following theorem: Given a totally disconnected set A on a circle, there are parabolic and hyperbolic Riemann surfaces such that $Z = Z_0 \cong A$ where \cong means the order preserving isomorphism. After generalizing this theorem, he states Theorem 3: Given a closed set A on a circle there exist Riemann surfaces of both type such that $Z \cong A$. The last Theorem 4 is concerned with a subset of Z with special property in parabolic case.

M. Ohtsuka.

Jurchescu, Martin: L'invariance K -quasi conforme de la parabolicité d'un élément frontière. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 2997—2999 (1958).

Ein ideales Randelement einer abstrakten Riemannschen Fläche heißt parabolisch, wenn seine logarithmische Kapazität null ist (Sario, s. dies. Zbl. 55, 74). Verf. hat in seiner Dissertation einen Modulbegriff für solche Randelemente eingeführt, dessen Unendlichkeit mit dem Verschwinden der logarithmischen Kapazität äquivalent ist. Dieser Begriff erlaubt den Beweis folgenden Satzes, welcher in einer im Pacific J. Math. 8, 791—809 (1958) inzwischen erschienenen Arbeit dargestellt wird und hier kurz angedeutet ist: Bei jeder quasi-konformen Homöomorphie zwischen zwei Riemannschen Flächen entspricht jedem parabolischen Randelement ein ebensolches. Die sogenannten Riemannschen Flächen mit total diskontinuierlichem idealem Rand sind also quasi-konforme Invarianten.

S. Stoilow.

Haefeli, Hans Georg: Konformitätsbedingungen bei vierdimensionalen Abbildungen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 250/11, 8 S. (1958).

Verf. betrachtet Abbildungen $x = (x_0, \dots, x_3) \rightarrow w = (w_0, \dots, w_3)$ eines vierdimensionalen euklidischen Raumes in einen vierdimensionalen euklidischen Raum. Es wird angenommen, daß die partiellen Ableitungen über dem Körper der reellen Zahlen abhängig sind. Die Klasse dieser Abbildungen $x \rightarrow w$ ist im wesentlichen identisch mit Fueterschen rechtsanalytischen Quaternionenfunktionen. Da sich die W als harmonische Funktionen erweisen, wird abschließend noch der Zusammenhang mit holomorphen Abbildungen behandelt.

H. Röhrli.

Iwahashi, Ryōsuke: Domains spread on a complex space. J. math. Soc. Japan 9, 452—463 (1957).

Verf. betrachtet (normale) komplexe Räume, analytische Überlagerungen (analytic spreads) und die Garben $A(E, F)$, $\hat{A}(E, F)$ der Keime holomorpher bzw. algebroider Abbildungen eines komplexen Raumes E in einen komplexen Raum F . Ein komplexer Raum X heißt vermöge einer holomorphen Abbildung $\varphi: X \rightarrow E$ über E ausgebreitet, wenn φ offen und jedes Urbild $\varphi^{-1}(e)$, $e \in E$, eine diskrete

Menge in X ist (X ist also ein i. a. verzweigtes Gebiet über E). Verf. konstruiert zu holomorphen Abbildungen $f \in \Gamma(X, A(X, F))$ das Holomorphiegebiet (Theorem 1). Ferner versucht er zu einer gegebenen Menge von holomorphen Abbildungen $f_i \in \Gamma(X, A(X, F))$ die Existenz der Holomorphiehülle nachzuweisen (d. i. das größte gemeinsame Existenzgebiet der Abbildungen f_i). Der Beweis dieses Resultates (Theorem 2) scheint dem Ref. jedoch einige Lücken aufzuweisen (vgl. G. Scheja, Dissertation Münster 1958, wo zur Konstruktion der Holomorphiehüllen ein völlig anderes Verfahren herangezogen wird).

H. Grauert.

Grauert, Hans: Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen. *Math. Ann.* **135**, 263—273 (1958).

In der vorliegenden Note beweist Verf. früher angekündigte Resultate (s. dies. Zbl. **70**, 183). Aus einer früheren Arbeit (s. dies. Zbl. **80**, 292, 2. Referat) ergeben sich unmittelbar die beiden Hauptsätze: I. Zwei holomorphe topologisch äquivalente Faserbündel über einem holomorph vollständigen Raum sind stets holomorph äquivalent. II. Über einem holomorph vollständigen Raum gibt es zu jedem topologischen Faserbündel, dessen Faser ein komplexer Raum und dessen Strukturgruppe eine komplexe Liesche Gruppe ist, ein topologisch äquivalentes holomorphes Faserbündel mit derselben Faser und Strukturgruppe. Diese Sätze geben entsprechend wie im topologischen Fall zu einer Reihe interessanter Aussagen Anlaß (die Basis X ist stets als holomorph vollständig angenommen, die Strukturgruppe mit L bezeichnet): 1. Ist L_1 eine komplexe Liesche Untergruppe der Strukturgruppe und L/L_1 zusammenziehbar, so läßt sich die Strukturgruppe L holomorph auf L_1 reduzieren. 2. Ist L_1 in sich zusammenziehbar, so ist ein Hauptfaserbündel H (mit L als Faser) genau dann holomorph trivial, wenn H/L_1 eine stetige Schnittfläche besitzt. 3. Ist X zusammenziehbar, so ist jedes holomorphe Faserbündel über X holomorph trivial. Eine Reihe von Anwendungen zeigt die Schlagkraft der Sätze I und II in der Funktionentheorie.

H. Röhl.

Nastold, Hans-Joachim: Über meromorphe Schnitte komplex-analytischer Vektorraumbündel und Anwendungen auf Riemannsche Klassen. I, II. *Math. Z.* **69**, 366—394; **70**, 55—92 (1958).

I. Ausgangspunkt der Untersuchung sind Fuchssche Differentialgleichungen auf Riemannschen Flächen und Riemannsche Klassen, für welche eine Reihe von klassischen Eigenschaften zusammengestellt werden. Zu einer auf X definierten Riemannschen Klasse mit X' als der Menge der Verzweigungspunkte werden ähnlich wie in H. Cartan [*Séminaire Bourbaki* **1950**, 1—9 (1950), s. dies. Zbl. **67**, 154] bzw. H. Röhl [*Math. Ann.* **133**, 1—25 (1957)] ein Vektorraumbündel über $X - X'$ definiert und die wechselseitigen Beziehungen zwischen diesem Bündel und der gegebenen Riemannschen Klasse studiert. Das Vektorraumbündel ist nun über X' abzuschließen; Verf. diskutiert die Gesamtheit aller möglichen Abschließungen, insbesondere diejenigen Abschließungen, für welche die globalen meromorphen Schnitte (im abgeschlossenen Vektorraumbündel) in kanonischer Weise den Elementen der gegebenen Riemannschen Klasse zugeordnet sind. — II. Nach einer kurzen Definition der Garben und Cohomologiemoduln und des Cousin-Problems für meromorphe Differentialformen mit Koeffizienten in einem holomorphen Vektorbündel stellt Verf. bekannte Resultate über Cohomologiegruppen zusammen. Mit Hilfe des Serreschen Dualitätssatzes (s. dies. Zbl. **67**, 161) wird nochmals die Frage der Lösbarkeit des obigen Cousin-Problems behandelt; die entsprechenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen nehmen im 1-dimensionalen Fall eine besonders einfache Gestalt an, die explizit angegeben wird (es handelt sich um einen „Residuensatz“). In diesem Zusammenhang wird Kodairas Orthogonalzerlegung des Raumes der Differentialformen mit Koeffizienten in W erweitert zu einer entsprechenden Zerlegung des Raumes der Ströme (courants) mit Koeffizienten in W .

H. Röhl.

Salinas, Baltasar R.: Die Nullstellen der Funktionen einer nicht-quasianalytischen Klasse im R^n . Nicht-quasianalytische Fortsetzung. Collect. Math. 9, 65—76 (1957) [Spanisch].

Extension des résultats connus sur les classes quasi-analytiques (q. a.) au cas des fonctions de plusieurs variables. — Etant donné m_v ($v = 0, 1, 2, \dots$) on a par définition $f(x_1, \dots, x_n) \in C\{m_v\}$ si

$$|\partial^{p_1 + \dots + p_n} f / \partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}| \leq C k^v m_v$$

pour tout $p_1 + \dots + p_n = v$. $C\{m_v\}$ sera dite q. a. si toute fonction de cette classe, qui a toutes ses dérivées nulles en un point, est identiquement nulle. Les conditions classiques de Denjoy-Carleman portant sur la suite m_v sont nécessaires et suffisantes pour que $C\{m_v\}$ soit q. a. Bochner et Taylor (v. ce Zbl. 22, 156), Bochner (v. ce Zbl. 35, 331) et Lelong (v. ce Zbl. 42, 290) ont donné d'autres généralisations, moins immédiates, du théorème de Denjoy-Carleman. Kodama (v. ce Zbl. 22, 322) considère au lieu de m_v une suite multiple m_{p_1, \dots, p_n} , mais sa conclusion est manifestement incorrecte. — Ensuite l'auteur s'occupe des questions suivantes: 1. Existence dans une classe non q. a. d'une fonction qui a ses zéros dans un ensemble fermé donné à l'avance. 2. Prolongement d'une fonction analytique, définie sur un compact, par une fonction définie sur tout l'espace, appartenant à une classe non q. a. donnée et nulle pour $|x|$ suffisamment grand. 3. Existence dans une classe non q. a. d'une fonction dont les dérivées en un point prennent des valeurs prescrites. Ceci généralise des résultats de Bang (v. ce Zbl. 60, 151). J. Horváth.

Knobloch, Hans-Wilhelm: Integrale über Funktionen aus multiplikativen Klassen. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1957, 25—64 (1958).

Verf. führt eine Reihe von Arbeiten von R. König [J. reine angew. Math. 159, 67—81 (1928)], R. König-H. Schmidt [J. reine angew. Math. 162, 69—113 (1930)], H. Schmidt (s. dies. Zbl. 2, 344) und des Ref. (s. dies. Zbl. 43, 299; 46, 83; 50, 86) weiter; in diesen Arbeiten werden Integrale des Typs $\int_{\mathcal{C}} K(x, u) dx$ betrachtet,

wobei Kern $K(x, u)$ und Integrationsweg \mathcal{C} in wohlbestimmter Weise variieren. In der vorliegenden Arbeit wird der arithmetische Hintergrund (im Rahmen der Arithmetik des rationalen Funktionenkörpers) für beliebige Konstantenkörper der Charakteristik 0 entwickelt; dadurch erhält Verf. eine erhöhte Bewegungsfreiheit in der Auswahl von Klassenbasen, was im Hinblick auf die Integration gegebener linearer Differentialgleichungen von Interesse ist. Eine weitere Verallgemeinerung der früheren Ansätze — die umfangreichen Details seien hier unterdrückt — gestattet eine wesentlich glattere Formulierung des sog. Orthogonalitätstheorems, welches zu einer Reihe von Funktionalbeziehungen (Ergänzungssatz der Γ -Funktion, spezielle Darstellung der unvollständigen Γ -Funktion) Anlaß gibt. H. Röhrl.

Modulfunktionen. Automorphe Funktionen. Fastperiodische Funktionen:

Maak, W.: Zur Theorie der Modulgruppe. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 22, 267—275 (1958).

Verf. versucht eine unitäre Darstellung der Modulgruppe $\Gamma(2)$ mit Grad $s > 1$ zu konstruieren. Unitäre Darstellungen mit Grad 1 sind bekannt, man findet sie mit Hilfe eines Darstellungsmoduls von analytischen Funktionen, wie der Dedekindschen Funktion η . Im Falle $s > 1$ sucht man einen Darstellungsmodul. Verf. skizziert eine Untersuchung nach Darstellungsmoduln, bestehend aus fastautomorphen Funktionen (ganze fastautomorphe Funktionen sind zwar konstant). Es ist auch möglich, einen Darstellungsmodul zu konstruieren mit ganzen fastautomorphen Formen von der Dimension $-2n$ ($n \geq 2$). Mit Hilfe von Poincaréreihen wird,

wenn ein irreduzible unitäre Darstellung vorliegt, ein solcher Darstellungsmodul konstruiert.

F. van der Blij.

Newman, Morris: An inclusion theorem for modular groups. Proc. Amer. math. Soc. 8, 125—127 (1957).

Let R denote the ring of integers of an algebraic number field k of finite degree over the field of rationals, and G the group of matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ with $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. For two non-zero integral ideals $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ let $G(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ denote the subgroup of G for which $\beta \in \mathfrak{a}$, $\gamma \in \mathfrak{b}$. The author proves that if $(*)$ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}, (6)) = (\mathfrak{b}, (6)) = 1$, then any subgroup H of G containing $G(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ is necessarily of the form $G(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1)$, $\mathfrak{a}_1 | \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1 | \mathfrak{b}$. He also shows that the condition $(*)$ is necessary. This contains, as a special case, a theorem proved by the author recently (cf. this Zbl. 64, 327).

K. G. Ramanathan.

Lehner, Joseph: The Fourier coefficients of automorphic forms belonging to a class of horocyclic groups. Michigan math. J. 4, 265—279 (1958).

Verf. verallgemeinert das Verfahren der Kreisintegration von Hardy-Littlewood-Ramanujan auf automorphe Formen zu gewissen Grenzkreisgruppen Γ von erster Art. Es wird vorausgesetzt, daß ein Fundamentalbereich von Γ mit ∞ als einziger Spitze existiert; er hat dann von der reellen Achse eine positive Minimaldistanz. Die untersuchten automorphen Formen $f(\tau)$ haben reelle Dimension $-r$, Multiplikatoren des Betrages 1, sind in der oberen Halbebene holomorph, in ∞ meromorph mit nicht verschwindendem Hauptteil. Für $r < 0$ ergibt sich die (auch in der Bezeichnung) genaue Übertragung der Resultate von Rademacher-Zuckermann (s. dies. Zbl. 19, 22) auf automorphe Formen der genannten Art. Jedoch ist diese Übertragung gegenüber den Resultaten des Ref. (s. dies. Zbl. 58, 68) in mehrfacher Hinsicht speziell. Dagegen stellen die Ergebnisse des Verf. im Falle $r = 2$ einen erheblichen Gewinn dar, falls sich die Vermutung bestätigt, daß die Voraussetzung über die Spitzenzahl von Γ und die Beschränkung auf exakte Differentiale entbehrlich sind. Der methodische Fortschritt besteht in dem Nachweis, daß die speziellen, in der additiven Zahlentheorie bisher verwendeten arithmetischen Fixierungen der Farey dissection keinen erkennbaren Einfluß auf das Resultat des Verfahrens ausüben. Im vorliegenden Falle wird wie bisher der gesuchte Fourier-Koeffizient durch ein Integral bekannter Art über eine sich der reellen Achse annähernde Horizontalstrecke ausgedrückt. An die Stelle der Farey dissection tritt die (auch von anderer Seite bereits benutzte) Aufteilung der Integrationsstrecke durch das Netz der Fundamentalbereiche von Γ , und diese führt, wie Verf. zeigt, zu den zitierten Ergebnissen.

H. Petersson.

Shimura, Goro: Correspondances modulaires et les fonctions ζ de courbes algébriques. J. math. Soc. Japan 10, 1—28 (1958).

Vgl. hierzu auch G. Shimura, dies. Zbl. 78, 30. Es sei $\wp(z; \omega_1, \omega_2)$ die Weierstraßsche \wp -Funktion mit den Grundperioden ω_1, ω_2 und $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ ihre Differentialgleichung. Sei weiterhin $N > 1$ eine natürliche Zahl. Dann sind mit $\tau = \omega_1/\omega_2$ die absolute Invariante $j(\tau)$ und die N^2 Funktionen

$$f_{\alpha\beta}(\tau) = (g_2/g_3) \wp((\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)/N; \omega_1, \omega_2), \quad 0 \leq \alpha, \beta < N,$$

Modulfunktionen (zur Hauptkongruenzuntergruppe) der Stufe N , und alle diese Modulfunktionen werden durch j und die $f_{\alpha\beta}$ erzeugt. Es bezeichne Q den rationalen Zahlkörper. Dann ist $\mathfrak{K}_N = Q(j(\tau), f_{\alpha\beta}(\tau))$ (alle $f_{\alpha\beta}$ werden adjungiert) ein algebraischer Funktionenkörper mit $Q(\zeta)$ als genauem Konstantenkörper mit einer primitiven N -ten Einheitswurzel ζ . Die Galoissche Gruppe von $\mathfrak{K}_N/Q(j(\tau))$ ist die Multiplikationsgruppe aller nichtsingulären Matrizen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit Koeffizienten im Restklassenring mod N , genommen modulo der durch $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gebildeten Unter-

gruppe. Die Wirkung auf ζ eines solchen Automorphismus ist $\zeta \rightarrow \zeta^{x\delta - \beta\gamma}$. Verf. studiert Unterkörper \mathfrak{L}_N von \mathfrak{K}_N mit Q als genauem Konstantenkörper, speziell die zu den Gruppen $\mathfrak{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathfrak{H}_d = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ gehören mit $(a, N) = 1$, $d \in \mathfrak{h}$, wo \mathfrak{h} eine -1 enthaltende Untergruppe der zu N primen Restklassengruppe ist, und endlich $\mathfrak{H}'_d = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ mit $(d, N) = 1$, $a \in \mathfrak{h}$. Im ersteren Falle ist $\mathfrak{L}_N(\zeta) = \mathfrak{K}_N$. — Die Körper \mathfrak{L}_N werden nun modulo den rationalen Primzahlen p reduziert und gehen in Körper \mathfrak{L}_N mit dem Primkörper der Charakteristik p als Konstantenkörper über. Die Modularkorrespondenz T_p zur selben Primzahl p geht dabei in eine Korrespondenz \bar{T}_p von \mathfrak{L}_N über, die, von endlich vielen Ausnahmen abgesehen, die Gleichung (1) $\bar{T}_p = P + P' \bar{R}_p$ befriedigt. Hier bezeichnet P die Frobeniuskorrespondenz ($x \rightarrow x^p$) von \mathfrak{L}_N , P' die zu P konjugierte und R_p den durch die Restklasse $\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ mod N definierten Automorphismus von \mathfrak{L}_N (bzw. \bar{R}_p das Bild von R_p in \mathfrak{L}_N). In den oben genannten speziellen Fällen gilt ferner (2) $P' \bar{R}_p = \bar{U}' P' \bar{U}$ bzw. $P' \bar{R}_p = \bar{A}' P' \bar{A}$, wo U der durch $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ gelieferte Automorphismus von \mathfrak{L}_N und A ein Isomorphismus des zu \mathfrak{H}_d gehörigen Körpers auf den zu \mathfrak{H}'_d gehörigen ist. Sinngemäß gilt die erste Gleichung (2) für den Körper zur Gruppe \mathfrak{H} , die letztere für den Körper zur Gruppe \mathfrak{H}_d . — Die Gleichung (1) war in speziellen Fällen von Ref. bewiesen worden [Arch. der Math. 5, 355–366 (1954)]. Ebenso wie dort folgt hier aus (1), daß die Eigenwerte λ_p der Hecke'schen Matrizen, welche die Modularkorrespondenz T_p im Raum der Spitzenformen des Grades -2 zu den betr. Untergruppen der Modulgruppe darstellen, fast immer den Ungleichungen $|\lambda_p| \leq 2\sqrt{p}$ genügen. Bezeichnen wir diese Matrizen mit dem gleichen Buchstaben T_p , so ist endlich der in der Hecke'schen Theorie auftretende Ausdruck $L(s) = \det (1 - p^{-s} T_p + p^{1-2s})$ der Zähler der Zetafunktion des mod p reduzierten Körpers \mathfrak{L}_N .

M. Eichler.

Caracosta, Georges et Raouf Doss: Sur l'intégrale d'une fonction presque périodique. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 3207–3208 (1958).

For ordinary almost periodicity, the following two theorems are stated. Th. 1. In order that a function $F(x)$ can be uniformly approximated by functions which are indefinite integrals of almost periodic functions, it is necessary and sufficient that $F(x)$ is uniformly continuous, and $F(x + \delta) - F(x)$ is almost periodic for every δ .

Th. 2. It is also necessary and sufficient, that $F(x)$ can be written $\int_a^x f(t) dt + \varphi(x)$

where $f(x)$ and $\varphi(x)$ are almost periodic. Th. 3 and Th. 4 of the note deals with the questions which arise naturally from Th. 2, when Stepanoff and Riemann-Stepanoff almost periodicity (and corresponding limit notions) are brought into the picture.

E. Følner.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Bielecki, Adam: Remarque à propos de la note „Certaines propriétés topologiques des solutions des équations au paratingent“. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 10, 95–97, poln. u. russ. Zusammenfassg. 97 (1958).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 78, 73) wurde vom Verf. für den Beweis eines Satzes (Théorème 2 bis, p. 72) die Voraussetzung benutzt, daß eine gewisse Menge T abgeschlossen sei (oder, was damit gleichwertig, daß $\eta(P) = |P, T| > 0$ für $P \in S'$). Durch Konstruktion eines Beispiels wird gezeigt, daß das fragliche Theorem seine Gültigkeit verliert, falls besagte Voraussetzung nicht erfüllt ist.

Otto Haupt.

Hayashi, Kyuzo: On quasi-equicontinuous sets. Sets of solutions of a differential equation. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A **31**, 9—23 (1958).

L'A. fissa, accanto alle nozioni di equicontinuità in un punto o in un insieme, quelle di quasicontinuità in un punto o in un insieme e studia certe corrispondenze fra insiemi equicontinui e quasiequicontinui. Indi applica questi concetti e questi risultati per proseguire una ricerca (K. Hayashi, questo Zbl. **55**, 317; **65**, 76) su insiemi di soluzioni di equazioni differenziali topologicizzati mediante la topologia della convergenza compatta. Detto E un intervallo reale (limitato o non), R^n lo spazio vettoriale reale ad n dimensioni, S^n la ipersuperficie sferica unitaria di R^{n+1} e C^n lo spazio R^n reso compatto mediante l'aggiunta di un punto all'infinito, e denotata con $f(x, y)$ una trasformazione di $E \times R^n$ in R , dove f è misurabile rispetto ad x (variabile in E) è continua rispetto ad y (variabile in R^n) ed ha una norma che può essere maggiorata in ogni singola porzione compatta di $E \times R^n$ mediante una opportuna funzione sommabile, che dipende soltanto dalla x e dalla porzione, l'A. pone, per la $dy/dx = f(x, y)$, oltre al solito concetto di soluzione, quelli di soluzioni massimali e di soluzioni generalizzate; e dimostra che fra gli omeomorfismi di C^n su S^n ve ne son di quelli, che mutano omeomorficamente l'insieme delle soluzioni generalizzate (ed opportunamente prolungate) di $dy/dx = f(x, y)$ nell'insieme delle soluzioni coi valori in S^n di un'equazione $dY/dx = h(x, Y)$, dove la trasformazione $h(x, Y)$ di $E \times R^{n+1}$ in R^{n+1} è misurabile rispetto ad x (variabile in E), continua rispetto ad Y (variabile in R^{n+1}), soddisfa alla $h(x, 0, \dots, 0, 1) = 0$ per ogni x di E , nonché alla $(Y, h) = 0$ per ogni (x, Y) di $E \times R^{n+1}$, ed ha una norma maggiorata, in tutto il proprio insieme di definizione, da una funzione della sola x , sommabile in ogni sottointervallo limitato di E , quegli insiemi di soluzioni essendo appunto topologicizzati entrambi mediante la topologia della convergenza compatta.

G. Scorza Dragoni.

Luxemburg, W. A. J.: On the convergence of successive approximations in the theory of ordinary differential equations. Canadian math. Bull. **1**, 9—20 (1958).

Es ist wohl bekannt, daß die Stetigkeit der Funktion $f(t, x)$ und die Eindeutigkeit der Lösungen der Differentialgleichung (1) $x' = f(t, x)$ die Konvergenz der Folge der Approximationen (2) $x_n = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, x_{n-1}) dt$ noch nicht sichert. Verf. beweist, daß die Stetigkeit der Funktion $f(t, x)$ und die Krasnoselskij-Krejsche Bedingung:

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k |t - t_0|^{-1} |x_1 - x_2|, \quad |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq A |x_1 - x_2|,$$

für $(t, x_1), (t, x_2) \in R = \{|t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$, wo $0 < \alpha < 1$, $k(1 - \alpha) < 1$ und A eine von t nicht abhängige Konstante ist, die gleichmäßige Konvergenz der Folge (2) auf dem Intervalle $|t - t_0| \leq d$ gegen die Lösung $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, von (1) sichert. Dabei ist $d = \min(a, b/M)$, wo $M = \max_{(t, x) \in R} |f(t, x)|$. Er gibt zwei ver-

schiedene Beweise dieser Behauptung. Zum Schluß zeigt er an einem Beispiel, daß die Behauptung falsch sein kann, wenn $k(1 - \alpha) \geq 1$ ist.

M. Švec.

Cameron, R. H.: Differential equations involving a parametric function. Proc. Amer. math. Soc. **8**, 834—840 (1957).

The purpose of this paper is to find conditions under which the differential equation $dz/dt + f[t, y(t) + z(t)] = 0$ has a solution $z(t)$, such that $z(0) = 0$, valid for $0 \leq t \leq 1$, and this for almost all $y(t)$ (in the sense of Wiener) in the space of the continuous functions of $t \in (0, 1)$. A condition which according to the author is the simplest one is the following: $f(t, u)$ should have, for all real values of u , continuous first partial derivatives and be such that

$$f(t, u) \operatorname{sgn} u \geq -A_1 \exp(Bu^2), \quad f_u(t, u) + 4g_t \leq 2a^2 u^2 + A_2, \\ g(1, u) \geq -\frac{1}{2} \alpha u^2 \cot \beta - A_3$$

where $g(t, u) = \int_0^u f(t, v) dv$, $A_1, A_2, A_3, B, \alpha, \beta$ being positive constants such that $\alpha < \beta < \pi$, $B < 1$. The proof is based on results found in another paper by the same author and J. M. Shapiro (s. this Zbl. 65, 338). The „almost all in the sense of Wiener“ is shown to be a necessary condition in the statement by the counter example:

$$f(t, u) = \frac{3}{8} \frac{d}{du} (u^{4/3} \sin u^{4/3}).$$

In conclusion the author proposes weaker conditions under which his theorem still holds. But he points out that he has not been able to establish that these weaker conditions correspond to more general solutions of his problem. *C. Racine.*

Wasow, Wolfgang: Solution of certain nonlinear differential equations by series of exponential functions. Illinois J. Math. 2, 254—260 (1958).

In dieser Arbeit wird das System

$$(1) \quad y' = f(y) + \sum_{k=1}^m g_k e^{i\omega_k x}$$

betrachtet. Dabei bedeuten y einen n -dimensionalen Vektor, $f(y)$ eine Vektorfunktion, g_k konstante Vektoren und ω_k reelle Zahlen, die allgemein nicht die Vielfachen einer Zahl sind. Verf. beweist unter gewissen Voraussetzungen die Existenz einer fastperiodischen Lösung von (1), die sich in der Form einer Reihe

$$(2) \quad y = a_0 + \sum_{r=1}^{\infty} a_r e^{i\mu_r x}$$

darstellen läßt. Er macht folgende Voraussetzungen: 1. Die Gleichung $f(y) = 0$ hat die Lösung $y = a_0$. 2. Die Komponenten $f_i(y)$ der Vektorfunktion $f(y)$ sind holomorphe Funktionen der Komponenten y_1, y_2, \dots, y_n des Vektors y auf dem Gebiete $\|y - a_0\| \leq \varrho$, $\varrho > 0$. Die Norm eines Vektors $v = (v_1, \dots, v_n)$ ist $\|v\| = \sup |v_j|$. 3. Die Entwicklung der Funktion $f(a_0 + u)$

in eine Potenzreihe gibt die Gleichung $f(a_0 + u) = A u + \Phi(u)$, wo A eine quadratische konstante Matrix ist, und $\Phi(u)$ eine Vektorfunktion, deren Komponenten Potenzreihen in den Komponenten u_1, u_2, \dots, u_n des Vektors u sind, die mindestens mit der zweiten Potenz beginnen und für $\|u\| \leq \varrho$ konvergieren. Die Eigenwerte der Matrix A sollen rein imaginär sein. Folgender Satz wird bewiesen: Es seien die Bedingungen 1, 2, 3 erfüllt. Es sei $\|g_k\| \leq g_0$, $k = 1, 2, \dots, m$, wo g_0 eine Konstante ist, die nur von $f(y)$ abhängt. Dann hat das System (1) eine partikuläre Lösung, die man in der Form der Reihe (2) darstellen kann, welche für $-\infty < x < \infty$

gleichmäßig und absolut konvergiert. Die Zahlen μ_r sind in der Form $\sum_{k=1}^m n_k \omega_k$

darstellbar, wo die n_k nichtnegative ganze Zahlen und nicht alle zugleich Null sind. Die Koeffizienten a_r , $r > 1$, lassen sich schrittweise aus Systemen von linearen Gleichungen ausrechnen. Wenn die ω_k ganze Vielfache einer Zahl ω sind, so bleibt der Satz richtig, wie auch dessen Beweis, wenn die Matrix A nur rein imaginäre Eigenwerte $i\nu_j$ hat und ν_j nicht ganze Vielfache von ω sind. *M. Švec.*

Andreoli, Giulio: Equazioni e sistemi differenziali, operatori funzionali, funzioni nelle algebre. Giorn. Mat. Battaglini 86 (V. Ser. 6), 1—66 (1958).

Nachdruck der in diesem Zbl. 6, 403 besprochenen Arbeit.

Levinson, N.: Transform and inverse transform expansions for singular self-adjoint differential operators. Illinois J. Math. 2, 224—235 (1958).

Let $D = d/dt$ and $L = p_0 D^n + p_1 D^{n-1} + \dots + p_n$, where the p_k are complex-valued functions of class C^{n-k} on an open real interval $a < t < b$, $p_0(t) \neq 0$, and L coincides with its formal adjoint. Corresponding to every self-adjoint eigenvalue problem associated with L in $L^2(a, b)$ there exists an n by n matrix ϱ , called the spectral matrix, and an isometry of $L^2(a, b)$ into $L^2(\varrho)$. It is shown here that this mapping is actually onto all of $L^2(\varrho)$. In the process another proof of the expansion

theorem is given. The method used combines the procedure used by the author in a previous paper (s. this Zbl. 55, 316) with the boundary conditions obtained by the reviewer [Math. Scandinav. 4, 9—21 (1956)] which describe the problem.

E. A. Coddington.

Duffin, R. J. and W. D. Serbyn: Approximate solution of differential equations by a variational method. J. Math. Physics 37, 162—168 (1958).

Das Funktional $E(u) = \int_a^b (p(x) u'^2 + q(x) u^2) dx$ ($p > 0$; p, q stetig; u stückweise stetig differenzierbar) sei positiv definit. $y(x)$ löse die zugehörige Eulersche Differentialgleichung $(p y')' - q y = 0$ so, daß $y(a) \geq 0$ und $y(b) \geq 0$ ist. Mit zwei beliebigen positiven Konkurrenz-Funktionen v und w , für die jedoch $v(b) = w(a) = 0$ gilt, konstruieren die Verf. zu y eine Unterfunktion $y^*(x) \leq y(x)$. Mit

$$E^t(u) = \int_a^t (p u'^2 + q u^2) dx, \quad E_t(u) = \int_t^b (p u'^2 + q u^2) dx$$

ist

$$y^*(x) = y(a) \exp \left\{ - \int_a^x p^{-1} v^{-2} E_t(v) dt \right\} + y(b) \exp \left\{ - \int_x^b p^{-1} w^{-2} E_t(w) dt \right\}.$$

Ferner wird gezeigt: Ist $g(x)$ zweimal stetig differenzierbar, $I(x) = \int_x^b e^{g(x)} dx$ und

$$J(x) = e^{g(x)} \left\{ \frac{1}{v^2} \int_x^b \left(v'^2 + \frac{g'^2}{4} v^2 - \frac{g''}{2} v^2 \right) dx - \frac{g'}{2} \right\}^{-1}$$

(v wie oben!), dann gelten für $\Delta = I - J$ im Intervall $a \leq x \leq b$ die Abschätzungen $\Delta \geq 0$ und $d\Delta/dx \leq 0$. Im Falle $g \geq 0$ darf dabei $b = \infty$ sein. Die Anwendung

auf $I(x) = \int_x^\infty e^{-x^2} dx$ liefert gute Ergebnisse.

G. Bertram.

Bellman, Richard: On the determination of characteristic values for a class of Sturm-Liouville problems. Illinois J. Math. 2, 577—585 (1958).

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ die der Größe nach geordneten Eigenwerte von $u'' + \lambda a(t)u = 0$, $u(0) = u(1) = 0$. Dabei liege $a(t)$ in $\langle 0, 1 \rangle$ zwischen endlichen positiven Schranken. Die λ_j sind die Nullstellen einer transzendenten Gleichung

$f(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(1) \lambda^n = 0$, wobei die $u_n(t)$ sich rekursiv aus Anfangswert-

aufgaben bestimmen, in Integralgestalt angebar oder durch numerische Integration (z. B. nach Runge-Kutta) berechenbar sind. Aus den $u_n(1)$ sind wiederum die

Größen $b_r = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-r}$ ($r = 1, 2, \dots$) durch lineare Rekursionsformeln bestimmbar.

Dann konvergiert die Folge b_k/b_{k+1} monoton fallend gegen λ_1 und die Folge $b_k^{-1/k}$ monoton steigend gegen λ_1 . Durch Bildung von Determinanten aus den b_k lassen sich auch Ungleichungen für die Produkte aus den ersten R Eigenwerten gewinnen. Die Methode ist auch auf die Eigenwertaufgabe $u^{(4)} + \lambda a(t)u = 0$, $u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0$ anwendbar. Ausführliches Zahlenbeispiel: $u'' + \lambda(1+t)u = 0$, $u(0) = u(1) = 0$.

L. Collatz.

Wintner, Aurel: On the integration of ordinary linear differential equations by means of Fourier and related integrals. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 6, 289—310 (1958).

L'A. poursuit ici une étude déjà commencée précédemment (voir ce Zbl. 34, 367) sur les conditions sous lesquelles une équation (*) $x'' + q(t)x = 0$ possède une solution du type Laplace ou Fourier avec densité non négative. Appelons disconjugée une équation (*) avec $q(t)$ réelle continue dans $(0, \infty)$ et dont toute solution

autre que $x = 0$ possède un zéro au plus dans $(0, \infty)$. On établit alors un certain nombre de théorèmes tels que celui-ci: si (*) est disconjuguée et si $q(t)$ est monotone et positive sur $[0, \infty)$, alors toute solution $x(t)$ de (*), positive sur $[0, \infty)$, admet une représentation de la forme

$$x(t) = \exp \int_0^t \varphi(u) \frac{\sin t u}{u} du,$$

avec $\varphi(u) \geq 0$, continue dans $(0, \infty)$, $\int_0^\infty \varphi(u) du < \infty$. — D'autres théorèmes sont relatifs au cas $q(t) \leq 0$, ou bien aux cas où les hypothèses portent sur $(0, \infty)$ au lieu de $[0, \infty)$; des théorèmes plus précis sont également établis pour le cas où $q(t)$ est complètement monotone. Les résultats classiques (solution de Whittaker) sont ré-examinés à la lumière de cette étude.

Ch. Blanc.

Wintner, Aurel: Energy dissipation and linear stability. Quart. appl. Math. 15, 263—268 (1957).

Il sistema di equazioni differenziali lineari del secondo ordine $(') d^2x/dt^2 = F(t)x$ è detto stabile per $t \rightarrow +\infty$ se per ogni soluzione $x(t)$ ed ogni t_0 esiste una costante c tale che si abbia $|x(t)| + |dx/dt| < c$ per $t > t_0$. Supposta la matrice $F(t)$ reale, simmetrica, dotata di derivata $F'(t)$ continua e indicata con $F(y, y)$ la forma quadratica associata alla $F(t)$ e con $\beta(t)$ il più grande degli autovalori di $F'(t)$ l'A. prova i seguenti criteri di stabilità: (i) affinché $(')$ sia stabile è sufficiente che esista un $d < 0$ tale che $\max_{|y|=1} F(y, y) < d$ per t sufficientemente grande e che inoltre sia

$\beta(t) \leq 0$ od anche, più in generale, sia $\int_{t_0}^{+\infty} \max(0, \beta(t)) dt < +\infty$, (ii) se è $\beta(t) \leq 0$ e se il più grande autovalore della $F(t)$ tende a $-\infty$ per $t \rightarrow +\infty$ allora $(')$ è stabile ed inoltre $x(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$.

R. Conti.

Villari, Gaetano: Sul carattere oscillatorio delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari omogenee del terzo ordine. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 13, 73—78 (1958).

Es wird der oszillatorische Charakter der Lösungen der Differentialgleichung (1) $y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0$ betrachtet. Ausgehend von den Ideen des Ref. [Czechosl. math. J. 7 (82), 450—462 (1957)] beweist Verf. folgenden Satz: Wenn $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ stetige Funktionen auf dem Intervalle (ξ, ∞) sind und die Ungleichungen $p_2(x) \leq 0$, $p_3(x) \geq 0$ gelten, so haben alle Lösungen von (1) denselben Charakter, d. h. entweder sind alle oszillatorisch oder alle sind nicht oszillatorisch, mit der eventuellen Ausnahme derjenigen Lösungen von (1), die in jedem Punkt $x \in (\xi, \infty)$ die Bedingungen $y(x)y'(x) < 0$, $y'(x)y''(x) < 0$ zugleich erfüllen. Als Folgerungen dieses Satzes ergeben sich folgende Behauptungen: I. Wenn p_1, p_2, p_3 auf (ξ, ∞) stetig sind und noch $p_1 \leq -1$, $-p_2 \geq p_3 \geq 0$ gilt, so hat die Gleichung (1) keine oszillatorische Lösung. II. Wenn p_1, p_2, p_3 auf (ξ, ∞) stetig sind und $p_2 \leq 0$, $p_3 \geq 0$ sowie $|p_i| \leq K_i/x^{2+i+\lambda_i}$, $i = 1, 2, 3$, gilt, wo K_i und λ_i positive Konstanten sind, so hat die Gleichung (1) keine oszillatorische Lösung. M. Švec.

Sibuya, Yasutaka: Sur réduction analytique d'un système d'équations différentielles ordinaires linéaires contenant un paramètre. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I 7, 527—540 (1958).

Betrachtet wird das System $\varepsilon^\sigma \vec{y}' = A(x, \varepsilon) \vec{y}$. Dabei ist σ eine natürliche Zahl, \vec{y} ein komplexer Vektor, $A(x, \varepsilon)$ eine (n, n) -Matrix die für

$$|x| < \delta_0, 0 < |\varepsilon| < \varrho_0, |\arg \varepsilon| < \alpha_0$$

in bezug auf x und ε holomorph ist und für $\varepsilon \rightarrow 0$ die asymptotische Entwicklung $A(x, \varepsilon) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(x) \varepsilon^\nu$ besitzt. Nach der Transformation $\vec{y} = P(x, \varepsilon) \vec{z}$, wobei P

analoge Eigenschaften wie A besitzt und $P(0, 0) = E$ ist, möge das System $\varepsilon^s \ddot{z}' = B(x, \varepsilon) \ddot{z}$ lauten. In Verallgemeinerung eines Satzes von W. Wasow [Mathematische 10. 134–148 (1955)] wird bewiesen, daß sich B hierbei auf die Gestalt

$$B(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} B_1(x, \varepsilon) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2(x, \varepsilon) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_s(x, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

bringen läßt, wobei die B_j (n_j, n_j)-Matrizen sind, wenn die Matrix A ($0, 0$) genau s verschiedene charakteristische Zahlen mit den Vielfachheiten n_j besitzt. Dieses Ergebnis wird auch auf die Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$\varepsilon^n y^{(n)} + \sum_{k=1}^n p_k(x, \varepsilon) \varepsilon^{n-k} y^{(n-k)} = 0$$

übertragen, wodurch ein Satz von R. E. Langer (vgl. dies. Zbl. 71, 81) verbessert wird.

L. Berg.

Kuznak, G. E.: On the theory of non-autonomous quasilinear systems with many degrees of freedom. Ukrain. mat. Žurn. 10, 128–146, engl. Zusammenfassung 146 (1958) [Russisch].

Verf. betrachtet folgendes Differentialgleichungs-System:

$$\frac{dx_j}{dt} + \sum_{i=1}^p a_{ji} x_i = \varepsilon f_j(x_1, \dots, x_p; v_{p+1}(t), \dots, v_n(t); \varepsilon), \quad j = 1, \dots, p.$$

Es möge für $\varepsilon = 0$ in ein System mit konstanten Koeffizienten und lauter verschiedenen charakteristischen Wurzeln übergehen, so daß

$$x_j(t)|_{\varepsilon=0} = \sum_{k=1}^p y_{jk} e^{\lambda_k t}, \quad j = 1, \dots, p;$$

dabei sind λ_k die charakteristischen Wurzeln und y_{jk} die Komponenten der Eigenvektoren. Die Funktionen f_j sollen Polynome ihrer Argumente sein; die Funktionen $v_{p+1}(t), \dots, v_n(t)$ seien Lösungen eines Differentialgleichungs-Systems

$$dv_j/dt - \lambda_j v_j = \varepsilon \varphi_j(v_{p+1}, \dots, v_n; \varepsilon), \quad j = p+1, \dots, n;$$

$\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ mögen komplexe Zahlen sein und die Funktionen φ_j Polynome. Verf. führt zuerst die Gleichungen für die x_j in die kanonische Form über, indem er setzt $x_j =$

$\sum_{k=1}^p y_{jk} v_k$; dann ergibt sich $v_j' - \lambda_j v_j = \varepsilon \chi_j(v_1, \dots, v_n; \varepsilon)$ für $j = 1, \dots, n$. Damit ist

es ihm gelungen, das nichtautonome Ausgangssystem durch Erhöhung der Ordnung in ein autonomes System zu verwandeln. Um Näherungsausdrücke zu erhalten, nach denen man das Verhalten der Lösung in einem großen Zeitintervall beurteilen kann, setzt Verf. voraus, daß die Lösung über gewisse Hilfsveränderliche $z_j(t; \varepsilon)$ von t und ε abhängt: $v_j = v_j(z_1(t, \varepsilon), \dots, z_n(t, \varepsilon); \varepsilon)$. Das entscheidende Problem besteht nun darin, diese Hilfsvariablen z_j passend zu bestimmen; dadurch soll es möglich werden, auf einheitliche Art und Weise die aperiodischen, periodischen und fast-periodischen Vorgänge sowie die zugehörigen Übergangsprozesse zu untersuchen.

Für die v_j wird der Ansatz gemacht: $v_j = \sum_{q=0}^N v_j^{(q)} \varepsilon^q + V_j \varepsilon^{N+1}$, und für die z_j werden

Differentialgleichungen der Form $z_j' = \omega_j(z_1, \dots, z_n; \varepsilon) = \sum_{q=0}^{N+1} \omega_j^{(q)} \varepsilon^q$ vorgeschrieben.

Die $v_j^{(q)}, \omega_j^{(q)}$ werden nun in geeigneter Weise so ausgewählt, daß die Differentialgleichungen bis auf Glieder der Ordnung ε^{N-1} genau erfüllt werden. Verf. setzt $\omega_j^{(0)} = \lambda_j$ und findet $v_j^{(0)} = e^{z_j}$ sowie $z_j = \lambda_j t + O(\varepsilon)$. Bei der Bestimmung der $\omega_j^{(1)}$ spielt die Forderung, daß gewisse säkulare Glieder auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen für die $v_j^{(1)}$ verschwinden sollen, eine Rolle. Das gleiche gilt auch für die höheren Glieder $\omega_j^{(q)}$ und $v_j^{(q)}$. Schließlich ergibt sich $v_j^{(q)}(e^{z_1}, \dots, e^{z_n})$ und $\omega_j^{(q)}(e^{\sigma_1 z}, \dots, e^{\sigma_n z})$, wobei die $v_j^{(q)}$ und $\omega_j^{(q)}$ Polynome der Argumente

e^{z_1}, \dots, e^{z_n} sind und $\sigma_r z = \sum_{k=1}^n P_k^{(r)} z_k$ bedeutet; $\sum_{k=1}^n P_k^{(r)} \lambda_k = 0, r = 1, \dots, R$, sind alle möglichen unabhängigen Linearkombinationen der λ_k . Mit Hilfe der gewonnenen $\omega_j^{(q)}$ werden die Differentialgleichungen für die z_j aufgestellt und einige Sonderfälle diskutiert. Danach schätzt Verf. sehr ausführlich die Restglieder V_j ab. Zum Schluß werden Beispiele durchgerechnet.

R. Reißig.

Volosov, V. M.: Periodical solutions of a non-linear equation of autooscillations. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 20—22 (1957) [Russisch].

Vengono indicate formule per il calcolo approssimato dell'ampiezza e del periodo delle soluzioni periodiche dell'equazione $(') \ddot{x} - Q(x) = \varepsilon f(x, \dot{x}, \varepsilon)$, nell'ipotesi $\text{sign } Q = \text{sign } x, \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) dx = \infty$, supposte Q, f regolari rispetto a $(x, \dot{x}, \varepsilon)$ per tutti gli x, \dot{x} e per ε sufficientemente piccolo; viene indicato anche un criterio per la stabilità o instabilità di tali soluzioni periodiche.

R. Conti.

Volosov, V. M.: Solutions of second order non-linear differential equations with slowly varying coefficients. Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 1149—1152 (1958); Correction. Ibid. 117, 930 (1957) [Russisch].

In un lavoro precedente (questo Zbl. 70, 83) sono state studiate le oscillazioni non lineari rette da un'equazione $d[m(\varepsilon t)\dot{x}]/dt + \varepsilon f(\varepsilon t, x, \dot{x}) + Q(\varepsilon t, x) = 0$, dove ε è un piccolo parametro che rallenta la variazione di m, f, Q rispetto al tempo t . Nel presente lavoro vengono indicate valutazioni relative all'ampiezza ed al periodo (lentamente variabili con t) delle soluzioni oscillanti dell'equazione $\ddot{x} + \varepsilon f_1(\varepsilon t, x, \dot{x}) + \varepsilon^2 f_2(\varepsilon t, x, \dot{x}) + Q(\varepsilon t, x) = 0$. Le formule, alquanto complicate, contengono alcuni errori successivamente corretti dall'A.

R. Conti.

Volosov, V. M.: Non-linear oscillations with one degree of freedom of a system with slowly varying parameters. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 927—930 (1958) [Russisch].

Continuando nello studio delle equazioni del tipo $\ddot{x} + Q(\varepsilon t, x) + \varepsilon f(\varepsilon, \varepsilon t, x, \dot{x}) = 0$, nel quale rientrano quelle dei due lavori sopra recensiti, l'A. indica formule per il calcolo asintotico delle soluzioni.

R. Conti.

Papoulis, A.: Strongly non-linear oscillations. J. Math. Physics 37, 147—156 (1958).

Lösungen bzw. Näherungslösungen von $d^2x/dt^2 + g(x) + \varepsilon f(x, dx/dt, t) = 0$ ($|\varepsilon|$ klein) für $\varepsilon \neq 0$ werden durch die Lösung dieser Gleichung für $\varepsilon = 0$ dargestellt. Behandelte Fälle: (Ia) $f = f(x)$, f und g ungerade, (Ib) $f = f(t)$ und periodisch, (IIa) $f = f(x, dx/dt)$. (IIb) $\varepsilon f = -\varepsilon \sin(\omega t + \beta) + \varepsilon_1 f_1(x, dx/dt)$. Die Arbeit bildet einen Teil einer Untersuchung über magnetische Speicher bei elektronischen Rechenautomaten.

E. Kreyszig.

Ziembra, Stefan: Free vibration of systems of one degree of freedom with non-linear elastic characteristic and non-linear viscous-type damping. Arch. Mech. stosow. 10, 163—193 (1958).

Verf. behandelt die nichtlineare Schwingungsgleichung $m\ddot{x} + \mu\Phi(\dot{x}) - kF(x) = 0$, wobei $m, \mu, k > 0$ und $F(x), \Phi(\dot{x})$ folgendermaßen beschaffen sind: $F(x)$ ist eine analytische Funktion über $(-\infty, +\infty)$; $F(-x) = -F(x)$, $F(0) = 0$, $x F(x) > 0$ für $x \neq 0$, $F'(x) > 0$. (Das ortsabhängige Glied der Gleichung entspricht also einer echten Rückstellkraft.) $\Phi(\dot{x})$ ist eine analytische Funktion über $(-\infty, +\infty)$; $\Phi(-\dot{x}) = -\Phi(\dot{x})$, $\Phi(0) = 0$, $\dot{x}\Phi(\dot{x}) > 0$ für $\dot{x} \neq 0$, $\Phi'(\dot{x}) > 0$. (Demnach stellt das geschwindigkeitsabhängige Glied der Gleichung eine echte Dämpfung dar.) Verf. betrachtet nunmehr Schwingungen um die Gleichgewichtslage $x = 0$. Dazu verwendet er den Ausdruck für die Gesamtenergie

$$E(t) = \frac{m}{2} v^2 + \bar{F}(x) = E_0 - \int_{t_0}^t \mu \Phi(v(s)) v(s) ds, \text{ wobei } v = \dot{x}, \bar{F}(x) = \int_0^x k F(s) ds.$$

Er zeigt, daß die Lösung $x(t)$ der Grundgleichung im Intervall $[t_0, +\infty)$ definiert ist. Weiter schließt er, daß $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ über $[t_0, +\infty)$ beschränkt sind; dies folgt aus den Beziehungen $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow +\infty$. Um den Typ der Gleichgewichtslage zu studieren, stellt Verf. die Differentialgleichung des Phasenbildes auf und ersetzt sie in der Nachbarschaft des Ursprungs $x = v = 0$ in bekannter Weise durch eine projektive Differentialgleichung. Diese zeigt, daß der singuläre Punkt ein stabiler Knoten- oder Brennpunkt ist. Verf. untersucht danach die Form der Isoklinen und gibt ein graphisches Verfahren zur Konstruktion der Trajektorientangente in einem beliebigen Punkt der Phasebene an. Er betrachtet weiterhin die Beispiele $m\ddot{x} + l\dot{x}^\alpha + kx^\beta = 0$ und $m\ddot{x} + l x^\gamma \dot{x}^\alpha + kx^\beta = 0$, in denen er die Differentialgleichung für die Phasenbahnen in geschlossener Form integriert. Hierbei benutzt er eine Substitution $y = x^\alpha u(x)$, wo $y = v^2$ ist und der Exponent α passend bestimmt wird. Schließlich nimmt Verf. eine Klassifizierung der Federkennlinien $F(x)$ und Dämpfungscharakteristiken $\Phi(v)$ vor und erörtert in den verschiedenen möglichen Fällen ausführlich das qualitative Verhalten des frei schwingenden Systems. Es kommt vor, daß dieses höchstens einmal die Gleichgewichtslage passiert, daß diese höchstens endlich oft durchquert wird und daß von Anfang an oder erst nach einer willkürlichen Zeitdauer unendlich viele Schwingungen ausgeführt werden.

R. Reißig.

Littlewood, J. E.: On non-linear differential equations of the second order.

III: The equation $\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\mu k \cos(\mu t + \alpha)$ for large k , and its generalizations. IV: The general equation $\ddot{y} + kf(y)\dot{y} + g(y) = bkp(q)$, $q = t + \alpha$. Acta math. 97, 267—308; 98, 1—110 (1957).

In dem als Einführung bezeichneten Teil III behandelt Verf. Differentialgleichungen der Art $y'' + f(y)y' + g(y) = p(t)$, wobei p in t die Periode $\lambda = 2\pi/\mu$ hat. Über f setzt er $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f > 0$ für $y \rightarrow \pm\infty$ voraus, nimmt also an, daß die Dämpfung für große Geschwindigkeitsbeträge positiv ist. Die Funktion g soll eine Rückstell-Wirkung beschreiben, d. h. das Vorzeichen von y haben; im einfachsten Fall ist dann $g = ay$ mit positivem a . Verf. nimmt immer an, daß $g(0) = 0$ ist und g' eine positive untere Schranke besitzt. Unter den den Funktionen f und g auferlegten Bedingungen ist in der (y, y') -Phasebene jede Trajektorie für $t \rightarrow \infty$ beschränkt, so daß das maximale invariante Gebiet der zur Erregerperiode λ gehörigen Transformation T der Phasebene endlich ist. Folglich existiert mindestens ein Fixpunkt, dem eine Schwingung im Takt des Erregers entspricht. Verf. entscheidet sich nun für bestimmte Funktionen f, g und p . Die einfachsten Fälle sind: (i) $f > c > 0$ für alle y , während g passenden Bedingungen unterworfen wird, die für $g = y$ erfüllt sind; (ii) kleine Abweichung von der Linearität, $f = \varepsilon F$, $g = y + \varepsilon G$ bei kleinem ε . Verf. fragt nach der einfachsten Gleichung, die zu keinem dieser Fälle gehört, und findet: Da f kein konstantes Vorzeichen haben soll und für großes $|y|$ positiv sein muß, werden zwei Nullstellen vorhanden sein; wird Symmetrie um $y = 0$ verlangt, werden ferner möglichst einfache Funktionen g und p gewählt, so ergibt sich schließlich die Gleichung $y'' - k(1 - y^2)y' + y = b\mu k \cos(\mu t + \alpha)$, $\mu = 2\pi/\lambda$ (die van-der-Polsche Gleichung). Wenn k nicht klein sein soll (wie im Falle (ii)), bleibt noch als Möglichkeit zur Vereinfachung, große Werte k anzunehmen. Verf. steckt nun das Ziel seiner Einführung ab. Einer stabilen subharmonischen Bewegung der Ordnung m entspricht in der Phasebene ein Fixpunkt P der Transformation T^m mit einer Einflußsphäre, deren Punkte bei wiederholter Anwendung von T^m gegen P konvergieren. Übt man die sukzessiven Potenzen von T (statt T^m) aus, so zirkuliert P samt seiner Einflußsphäre durch eine m -gliedrige Folge, die als Gesamtheit unter T invariant ist. Bei zwei solchen Folgen erhebt sich die Frage nach der Natur der Punktmenge, die sie voneinander trennt, also der „Wasserscheide“-Linie, und insbesondere der nicht-stabilen Fixpunkte, die darauf liegen. An die Beantwortung dieser Frage geht Verf. mit nicht-topologischen Methoden heran und untersucht auf

analytischem Wege ausführlich die Eigenschaften der „Grenzbewegungen“, die teils periodisch nicht-stabil und teils nicht-periodisch sind. Er bringt erst eine Anzahl Lemmata über Einzelheiten der Bewegungen, die für sich ziemlich einleuchtend sind; danach sind die Grundzüge der Beweisführung klar zu überblicken. — Mit ähnlichem Ziele wie in Teil III wird in Teil IV die allgemeinere Gleichung $y'' + k f(y) y' + g(y) - b k p(q)$, $q = t + \alpha$, behandelt. b sei eine nicht-negative und k eine große positive Konstante. Über die Funktionen f , g und p wird folgendes vorausgesetzt: 1. p habe eine stetige zweite Ableitung p'' und sei periodisch mit der Periode 2π ; ferner sei p schief-symmetrisch, d. h. $p(q + \pi) = -p(q)$, und habe den Mittelwert 0. Dann ist jedes Integral $\int p dq$ periodisch; $p_1(q)$ sei dasjenige mit dem Mittelwert 0. Es ist ebenfalls schief-symmetrisch. Eine weitere wesentliche Annahme ist, daß p_1 seinen größten (und folglich auch den kleinsten) Wert nur einmal in der Periode erreicht. p wird so genormt, daß dieser Wert gleich 1 wird; er soll an der Stelle $\frac{1}{2}\pi$ vorliegen, $p_1(\frac{1}{2}\pi) = -p_1(-\frac{1}{2}\pi) = 1$, $p(\pm\frac{1}{2}\pi) = 0$. $p'(-\frac{1}{2}\pi)$ ist dann nicht-negativ und wird gleich $\alpha_2 > 0$ vorausgesetzt. 2. $f(y)$ soll gerade sein und eine stetige zweite Ableitung f'' besitzen. Es existiere genau ein Nullstellenpaar, das gleich ± 1 sein soll. $f'(1)$ sei eine positive Konstante a_1 . 3. $g(y)$ sei eine ungerade Funktion mit stetiger zweiter Ableitung g'' . g' habe eine positive untere Schranke, $g' \geq 1$. Unter den Voraussetzungen 1. bis 3. ist gewährleistet, daß in der Phasenebene jede Trajektorie letztlich gleichmäßig beschränkt ist. Dies ist wesentlich für die Existenz erzwungener Schwingungen. Verf. verfolgt die in der Einführung genauer dargelegte Aufgabenstellung; zu dem Zweck beweist er eine große Anzahl (35) Lemmata, die mehr oder weniger voneinander unabhängig sind und sich mit Einzelheiten gewisser Lösungen der Grundgleichung sowie zum Vergleich herangezogener Gleichungen befassen. Auf Grund dieser Einzelheiten soll eine Vorstellung vom Charakter der betreffenden Bewegungen gewonnen werden.

R. Reißig.

Brauer, George: Remarks on a paper by Utz. Proc. Amer. math. Soc. 9, 34—36 (1958).

Verf. studiert das Verhalten der Lösungen der Differentialgleichung

$$x'' + \alpha(x, x') + \beta(x, t) = 0$$

für $t \rightarrow +\infty$ und verallgemeinert einige Resultate von Utz (vgl. dies. Zbl. 77, 90). Er beweist die folgenden Sätze: I. Wenn die reellen Funktionen $\alpha(x, y)$ und $\beta(x, t)$ die Bedingungen $\alpha(x, 0) = 0$; $\beta(x, t)x > 0$ für $x \neq 0$, $t > T$ erfüllen, dann verhält sich eine Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung, die für alle großen t -Werte definiert ist, entweder oszillatorisch oder letzten Endes monoton. II. Wenn die Voraussetzungen von I. gelten, $x(t)$ schließlich monoton verläuft und

$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{x'(s)}^{\lambda(x(s), x'(s))} ds < \infty$ ausfällt, dann nimmt $x(t)$ letzten Endes zu oder ab,

je nachdem ob für alle hinreichend großen t -Werte $x(t)$ positiv oder negativ ist. III. Seien $c(t)$ und $g(y)$ differenzierbare Funktionen, so daß $c(t) > 0$, $c'(t) \geq 0$ für $t \geq T$; $g(0) = 0$, $g'(y) \leq 0$. Ist dann $x(t)$ eine für alle großen t -Werte definierte Lösung der Differentialgleichung $x'' + g(x') + c(t)x = 0$, so ist sie entweder oszillatorisch, oder es gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = +\infty$ bzw. $-\infty$.

R. Reißig.

Utz, W. R.: Properties of solutions of certain second order nonlinear differential equations. Proc. Amer. math. Soc. 8, 1024—1028 (1958).

The author proves that every solution $x(t) \not\equiv 0$ of $x'' + f(x, x')x' + g(x) = 0$ that exists for all large t either is bounded and oscillatory as $t \rightarrow \infty$ or tends to zero monotonically as $t \rightarrow \infty$ if one of the following conditions is satisfied. (I)

$f(x, x') \geq 0$, $xg(x) > 0$ for $x \neq 0$, $\int_0^x g(s) ds \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow \infty$; (II) $f(x, x') \equiv$

$dh(x)/dx$, $xg(x) > 0$ for $x \neq 0$, $g(x)/x \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow \infty$, and there are constants b , $B > 0$ such that $|h(x) - b g(x)| \leq B|x|$; (III) $f(x, x') \equiv dh(x)/dx$, and there are constants $\mu > 0$, $\lambda > \mu^2$ such that $\lambda + 4\mu^2 \geq \mu h(x)/x \geq g(x)/x \geq \lambda$. Further, if $f(x, x') > 0$ except at a discrete set of points and $g(x)$ is odd, then the amplitudes of the oscillations of an oscillatory solution decrease monotonically as $t \rightarrow \infty$; and if $f(x, x') \equiv dh(x)/dx$, $xh(x) > 0$ and $xg(x) > 0$ for $x \neq 0$, $g(x)/x \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow \infty$, then any solution $x(t) \neq 0$ that exists for all large t is oscillatory or tends to zero monotonically as $t \rightarrow \infty$. *H. A. Antosiewicz.*

Massera, J. L.: Erratum: Contributions to stability theory. *Ann. of Math.* II. Ser. **68**, 202 (1958).

Verf. zeigt durch ein Beispiel, daß totale Stabilität bei autonomen Differentialgleichungen nicht notwendig gleichmäßige asymptotische Stabilität bedingt, und widerlegt damit den Satz 29 der im Titel genannten Arbeit (s. dies. Zbl. **70**, 310).

W. Hahn.

Montaldo, Oscar: Sui sistemi autonomi che godono delle proprietà di Kasner. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* **27**, 107—113 (1958).

E. Kasner (Differential geometric aspects of dynamics. New York 1913) avait caractérisé, par des propriétés géométriques locales, les trajectoires dynamiques d'un champ de forces: $\ddot{x} = \varphi(x, y, z)$, $\ddot{y} = \psi(x, y, z)$, $\ddot{z} = \chi(x, y, z)$, φ, ψ, χ étant des fonctions de classe C^2 , dans chaque point du domaine considéré. (Les plans osculateurs en un point P à toutes les courbes par P forment des faisceaux; les sphères osculatrices aux courbes par P , dans une direction donnée, forment un faisceau, etc.). L'A. démontre que les trajectoires du système

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \varphi(x, y, z) \dot{x}^n, & \ddot{y} &= \psi(x, y, z) \dot{x}^n + \left(\frac{1}{2}n\right) \varphi(x, y, z) \dot{x}^{n-1} \dot{y}; \\ \ddot{z} &= \chi(x, y, z) \dot{x}^n + (n-2) \varphi(x, y, z) \dot{x}^{n-1} \dot{z}\end{aligned}$$

jouissent des mêmes propriétés, pourvu que, dans l'énoncé de Kasner, on remplace dans chaque point, la direction (φ, ψ, χ) par la direction $\left(\frac{2-n}{2}\varphi, \psi, \chi\right)$.

M. Haimovici.

Rechlickij (Rekhlitsky), Z. I.: Boundedness tests for solutions of linear differential equations with variable lag of argument. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **118**, 447—449 (1958) [Russisch].

L'A. énonce quatre théorèmes concernant les équations de la forme $dy/dt - A(t)y(t - \alpha(t)) = x(t)$, $dy/dt - A(t)y(t - a) - B(t)y(t) = x(t)$, $\alpha(t) \geq 0$, $a > 0$, où la fonction y a les valeurs dans un espace de Banach. A la fonction α et aux opérateurs $A(t)$ on impose des conditions telles que:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha_1(t) + \alpha_2(t) \geq 0, & \lim \alpha'_1(t) &= \lim \alpha_2(t) = 0, \\ A(t) &= A_1(t) + A_2(t), & \lim \|A'_1(t)\| &= \lim \|A_2(t)\| = 0.\end{aligned}$$

Les résultats suivent l'ordre d'idées de M. A. Rutman (v. ce Zbl. **64**, 119; **65**, 106; **70**, 319).

G. Marinescu.

Leon'tev, A. F.: Über gewisse Lösungen einer linearen Differenzengleichung mit linearem Koeffizienten. *Mat. Sbornik, n. Ser.* **45 (87)**, 323—332 (1958) [Russisch].

Verf. betrachtet Differenzengleichungen der Gestalt

$$\sum_{k=0}^n (a_k z + b_k) f(z + h_k) = 0 \quad (h_0 < h_1 < \dots < h_k)$$

und sucht die Lösungen durch Laplacesche Integrale vom Typ $\int \gamma(t) e^{tz} dt$ darzustellen. Er gibt notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß unter den Lösungen solche Funktionen auftreten, die in einer Halbebene bis auf Pole regulär sind. — Ref. bemerkt, daß sich diese Ergebnisse auch aus allgemeineren Sätzen entnehmen lassen, die in der bekannten Monographie von Nörlund bewiesen sind.

W. Hahn.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Castoldi, Luigi: Attorno a un teorema Pfaffiano di Carathéodory. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **27**, 204—209 (1958).

Nach C. Carathéodory ist die Pfaffsche Gleichung

$$D(v, dP) = \sum_{i=1}^n v_i dx^i = 0$$

(vollständig) integrabel, sobald man zu einem Ausgangspunkt P_0 in der (topologischen) Mannigfaltigkeit X_n , über welcher das Vektorfeld v definiert ist, in noch so kleinen Umgebungen von P_0 stets Punkte P angeben kann, welche durch keine

Integralkurven der Pfaffschen Gleichung $\sum_{i=1}^n v_i dx^i = 0$ erreicht werden können.

Die Integralkurven sind dann notwendig „ X_{n-1} -bildend“, d. h. ihre Punkte genügen den Bedingungen

$$f(x^i) = f(x_0^i), \quad \partial_i f = p v_i.$$

Nach verschiedenen Beweisen dieses Satzes, die man H. A. Buchdahl (s. dies. Zbl. **35**, 261) und M. Born [Natural Philosophy of Cause and Chance (1949; dies. Zbl. **32**, 244)] verdankt, gibt Verf. nunmehr einen neuen Beweis dieses Sachverhalts auf Grund der charakteristischen Formulierung: die Pfaffsche Gleichung ist vollständig integrabel oder nicht, je nachdem die von P_0 aus erreichbaren Punkte (in dem früher angegebenen Sinne) eine durch P_0 hindurchgehende X_{n-1} erfüllen oder das Innere der X_n . Die Beweisführung beschränkt sich der Anschaulichkeit halber auf den dreidimensionalen Fall und diskutiert die beiden Fallunterscheidungen: $\text{rot } v \times v \neq 0$ in X_3 , bzw. $\text{rot } v \times v = 0$ in X_3 . Zum Schluß werden Anwendungen auf Thermodynamik und Mechanik gegeben.

M. Pinl.

Teleman, C.: Sur les systèmes mecaniques nonholonomes. An. Univ. C. I. Parhon București, Ser. Ști. Natur. Nr. **13**, 45—51, russ. und französ. Zusammenfassg. **52** (1957) [Rumänisch].

L'A. démontre le théorème suivant: si dans un voisinage R de l'espace euclidien E_n on définit un système S de m équations de Pfaff de classe C^1 qui n'a pas de combinaisons intégrables, alors, dans tout domaine $A \subset R$ il y a un sous-domaine $A_1 \subset A$ connexe par des arcs intégraux du système S de classe C^1 par morceaux. Ce résultat, prévu par Gh. Vranceanu, constitue la généralisation du cas particulier $m = 1$ démontré par C. Carathéodory.

T. Hangan.

Roždestvenskij (Rozhdestvensky), B. L.: On systems of quasilinear equations. Doklady Akad. Nauk SSSR **115**, 454—457 (1957) [Russisch].

L'A. introduce una classificazione dei sistemi di equazioni quasilineari

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n a_{ij}(u_1, \dots, u_n, t, x) \frac{\partial u_j}{\partial x} = b_i(u_1, \dots, u_n, t, x) \quad (i = 1, \dots, n)$$

distinguendoli in conservativi e non conservativi secondo la possibilità di rappresentarli o no nella forma

$\varepsilon \varphi_i(u_1, \dots, u_n, t, x)/\varepsilon t + \partial \varphi_i(u_1, \dots, u_n, t, x)/\varepsilon x = f_i(u_1, \dots, u_n, t, x) \quad (i = 1, \dots, n)$. In particolare viene considerato il sistema delle equazioni che regolano il flusso unidimensionale di un gas.

R. Conti.

Redheffer, R. M.: A Sturmian theorem for partial differential equations. Proc. Amer. math. Soc. **8**, 458—462 (1957).

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung des Sturmschen Vergleichskriteriums auf partielle Differentialausdrücke der Form

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left(x_k, \frac{\partial \log u}{\partial x_k} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Das Resultat hat Ähnlichkeit mit demjenigen von Hartman und Wintner (dies. Zbl. **67**, 79) ist jedoch weder in demselben enthalten noch als Verallgemeinerung zu bezeichnen.

H. O. Cordes.

Blondel, Jean-Marie: Sur le comportement des solutions d'une équation linéaire hyperbolique du second ordre, au voisinage de la singularité d'un coefficient. C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 36—38 (1958).

Sono enunciati, senza dimostrazione, alcuni risultati che completano quelli enunciati in due Note precedenti (questo Zbl. **70**, **90**, **319**) relativi al comportamento delle soluzioni di $(x-y)^n \partial^2 z / \partial x \partial y = A(x, y) z$ per $x-y \rightarrow +0$, di $x^n \partial^2 z / \partial x \partial y = A(x, y) z$ per $x \rightarrow +0$, $y > 0$ e di $\partial^2 z / \partial x \partial y + A(x, y) z = 0$ per $x \rightarrow +\infty$, $y > 0$. R. Conti.

Hopf, Eberhard: The temporal behaviour of a wave packet. Duke math. J. **24**, 477—480 (1957).

Soit (1) $F(x, t) = \int f(\alpha) \exp [i(\alpha x + g(\alpha) t)] d\alpha$ où $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha x = \sum \alpha_v x_v$, $d\alpha = d\alpha_1 \cdots d\alpha_n$. (i) x, α, t ainsi que les valeurs de $g(\alpha)$ sont réels, (ii) f est une fonction intégrable au sens de Lebesgue dans l'espace α , (iii) l'espace α se laisse diviser en trois ensembles A_1, A_2, A_3 tels que la mesure de A_1 est égale à zéro, $f = 0$ dans A_2 , A_3 est un ensemble ouvert, $g(\alpha)$ y est une fonction de classe C^2 dont les dérivées secondes ne s'annulent pas simultanément. Voici le théorème établi par l'A.: dans les hypothèses (i), (ii), (iii) on a (2) $\sup_x F(x, t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. L'A. fait remarquer qu'il suffit de démontrer (2) dans le cas où l'intégrale (1) est étendue sur un cube C de l'espace α dans lequel $\sum_{v, \mu} g_{\alpha_v \alpha_\mu}(\alpha) \lambda_v \lambda_\mu > 0$ pour un certain système de nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum \lambda_v^2 = 1$. Choissant la direction λ comme celle d'une des axes du nouveau système des coordonnées l'A. ramène le cas général à celui de $n = 1$. Dans le théorème démontré par lui dans le cas $n = 1$, l'hypothèse concernant l'ensemble A_3 est remplacée par une plus faible à savoir par celle que l'ensemble A_3 soit une somme d'intervalles dans chacun desquels la fonction $g(x)$ est strictement convexe ou bien strictement concave.

Z. Szyndt.

Lax, P. D.: Hyperbolic systems of conservation laws. II. Commun. pure appl. Math. **10**, 537—566 (1957).

Unter einem Erhaltungssatz wird eine Gleichung in Divergenzform, d. h. $u_t + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} f_j = 0$ verstanden, welche die Tatsache ausdrückt, daß eine Größe u sich in einem Gebiet G entsprechend dem Fluß eines gegebenen Vektorfeldes (f_1, f_2, f_3) in dieses Gebiet ändert. Im folgenden sollen nur eindimensionale Erhaltungssätze der Form $u_t + f_x = u_t + A(u) u_x = 0$ untersucht werden, die dann als hyperbolisch bezeichnet werden, wenn die Matrix $A = \text{grad } f$ reelle und verschiedene Eigenwerte für alle Werte des Arguments u besitzt. Das Anfangswertproblem besteht dann darin, Lösungen $u(x, t)$ zu bestimmen, wenn $u(x, 0)$ vorgegeben ist. Hyperbolische Systeme von Erhaltungsgesetzen treten insbesondere bei den stationären und instationären Gleichungen einer kompressiblen Strömung auf. Aber auch die Gleichungen der Hydromagnetik mit unendlich großer Leitfähigkeit (Lundquist-Modell) liefern Beispiele für Systeme von Erhaltungsgesetzen. Es ist aus der Theorie kompressibler Strömungen bekannt, daß quasilineare hyperbolische Systeme nach einer gewissen Zeit zu Diskontinuitäten führen, die in einer allgemeinen Form untersucht werden. Es zeigt sich auch, daß „schwache“ Lösungen nicht allein durch die Anfangswerte bestimmt sind, so daß zusätzliche Prinzipien herangezogen werden müssen, um die tatsächlich auftretende Lösungsform zu charakterisieren. Die sogenannte „Zähigkeitsmethode“ wird kurz gestreift und Ergebnisse anderer Autoren werden herangezogen. Bei diesem Verfahren werden Lösungen von Systemen von Erhaltungssätzen als Grenzfälle von Lösungen parabolischer Gleichungen erhalten, wenn der Koeffizient des dissipativen Gliedes gegen Null strebt. In vorausgehenden Arbeiten hat Verf. ein Differenzenverfahren für schwache Lösungen von Systemen von Erhaltungsgesetzen vorgeschlagen. Für einen speziellen Fall gibt er jetzt einen strengen

Konvergenzbeweis. Das asymptotische Verhalten der Lösungen eines beliebigen Erhaltungsgesetzes wird diskutiert und mit Ergebnissen anderer Autoren verglichen. Eine Verallgemeinerung der Entropiebedingung wird dazu benutzt, eine Theorie der Stoßwellen zu entwickeln. Eine im nächsten Abschnitt entwickelte Theorie einfacher Wellen für quasilineare Systeme wird auf die Lösung des Riemannschen Anfangswertproblems für den Fall angewandt, daß die Anfangsverteilung stückweise konstant ist. Viele Ergebnisse dieses zusammenfassenden Berichtes sind bereits auf dem Symposium für partielle Differentialgleichungen in Kansas 1954 vorgetragen worden und in den Berichten dieser Tagung enthalten (University of Kansas. Techn. Rep. 14, 1955).

W. Wuest.

Copson, E. T.: On the Riemann-Green function. Arch. rat. Mech. Analysis 1, 324—348 (1958).

In diesem Bericht werden sechs Methoden als die wichtigsten zur Aufstellung der Riemann-Greenschen Funktion V besprochen, welche die Lösung der Anfangswertaufgabe $Lu = u_{xx} - u_{yy} + 2a u_x - 2b u_y - cu = 0$ (mit gegebenen Werten von u und seinen ersten Ableitungen auf einer gewissen Anfangskurve C) in Integralgestalt liefert (a, b, c sind dabei gegebene Funktionen von x und y): 1. Die klassische Riemannsche Methode, 2. die Methode von Hadamard (in seiner Elementarlösung ist der Koeffizient des logarithmischen Termes gleich der Riemann-Greenschen Funktion der adjungierten Gleichung), 3. Aufstellung einer Integralgleichung für V , 4. Chaundys Konstruktion von V mit Hilfe symbolischer Operatoren und Potenzreihen, 5. Mackies Methode mit Hilfe von Kontur-Integralen, 6. Titchmarshs Methode für die Gleichung gedämpfter Wellen mit Hilfe eines komplizierten Fourier-Integrals. Es wird jeweils an Beispielen die Reichweite und die Brauchbarkeit der Methoden erläutert und auf diese Weise zugleich eine Liste der bisher bekannten Riemann-Greenschen Funktionen mit Besselschen und hypergeometrischen Funktionen zusammengestellt.

L. Collatz.

Copson, E. T.: On a singular boundary value problem for an equation of hyperbolic type. Arch. rat. Mech. Analysis 1, 349—356 (1958).

Betrachtungen über die allgemeine Euler-Poisson-Darbouxssche Gleichung führen auf die Aufgabe, eine Lösung $u(x, y)$ von $u_{xx} + 2\alpha x^{-1} u_x = u_{yy} + 2\beta y^{-1} u_y$ mit positiven Konstanten α, β so zu finden, daß u, u_x, u_y in $x \geq 0, y \geq 0$ stetig, u_{xx}, u_{yy} in $x > 0, y > 0$ stetig sind und die Anfangswerte $u = f(x)$ für $y = 0, x \geq 0, u = g(y)$ für $x = 0, y \geq 0$ mit $f(0) = g(0)$ angenommen werden. Da $u_y = 0$ für $y = 0$ und $u_x = 0$ für $x = 0$ folgen, liegen zu viele Daten vor, und die Aufgabe ist nur lösbar, wenn f und g eine Verträglichkeitsbedingung erfüllen; es kann höchstens eine Lösung der Aufgabe geben. Wenn f und g Polynome sind, und die Bedingung

$$\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) t^{\beta-1/2} g(\sqrt{t}) = \Gamma(\beta + \frac{1}{2}) I^{\beta-\alpha} t^{\alpha-1/2} f(\sqrt{t})$$

erfüllt ist (dabei bedeutet $I^{\beta-\alpha}$ den Integrationsoperator gebrochener Ordnung $\beta - \alpha$), so ergibt sich für $\alpha + \beta > 1$ eine allen Stetigkeitsforderungen genügende Lösung. Bei nur stetigem f und g wird die Riemannsche Methode herangezogen. Die Verträglichkeitsbedingung wird angegeben, hat aber hier eine etwas kompliziertere Form. Die Lösung wird für $0 < y \leq x$ und für $0 < x \leq y$ jeweils durch einen Ausdruck in geschlossener Form mit Integralen über hypergeometrische Funktionen dargestellt. Für $\alpha > \frac{1}{2}, \beta > \frac{1}{2}$ folgt die Stetigkeit von u und seinen Ableitungen bis zur 2. Ordnung bei $x = y$. Die Voraussetzungen über α und β lassen sich noch etwas mildern.

L. Collatz.

Szmydt, Z.: Sur l'existence de solutions de certains nouveaux problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes. Ann. Polon. math. 4, 40—60 (1957).

This is an interesting complement to a paper published in Bull. Acad. Polon.

Sci. (this Zbl. 70, 92). In this paper the author considers a slight generalization of the problem T defined in the previous one and develops a detailed demonstration of it. Let U denote a vector of coordinates u_i , $i = 1, 2, \dots, n$, the u_i 's being twice continuously differentiable functions of the independent variables x, y . The vectors U_x, U_y, U_{xy} have then obvious definitions. If $F(x, y, U, P, Q)$ denoted a function continuous in a certain closed region of its arguments, it is required to prove the existence of a solution of the system $U_{xy} = F(x, y, U, U_x, U_y)$ under either of the following conditions: (I) $U(x_0, y_0) = \bar{U}$, $(x_0, y_0) \in D$, D being the rectangle $x_1 \leq x < \infty$, $y_1 \leq y < \infty$,

$U_x = G[x, U(x, \gamma(x)), U_y(x, \gamma(x))]$, $U_y = H[y, U(\lambda(y), y), U_x(\lambda(y), y)]$ where $\gamma(x)$ and $\lambda(y)$ define two continuous curves in D ; (II) the same conditions as under (I) to the exception of the last one which is replaced by

$$U(\lambda(y), y) = \bar{U} + \int_{y_0}^y B[t, U(\lambda(t), t), U_x(\lambda(t), t)] dt,$$

B denoting a function continuous in its arguments. If λ is not differentiable the problem under (II) is more general than under (I). The method of proof is the following: under (I) the existence of a solution results from the existence of a fixed point relative to a certain functional transformation $\bar{U} = L(U)$, where L is an operator which it is not difficult to define; however one must assume that $\partial G / \partial Q = 0$ or that $\gamma(x)$ is a constant, and that (A) $|F| \leq N < \infty$ when $(x, y) \in D$, $|U| \leq r$, $|P| \leq r$, $|Q| \leq r < \infty$,

(K) $|F(x, y, U, P, Q) - F(x, y, U, \bar{P}, \bar{Q})| \leq \omega_1(x, y, |P - \bar{P}|) + \omega_2(x, y, |Q - \bar{Q}|)$ where ω_1 and ω_2 are functions subject to simple conditions. A fixed point exists when the transformation is applied to a convex domain R of the functions $U(x, y)$, continuously differentiable in D , R being defined by the inequalities:

$$\begin{aligned} |U| &\leq r, \quad |U_x| \leq r, \quad |U_y| \leq r, \quad |U_x(x, y + \varepsilon) - U_x(x, y)| \leq N\varepsilon \\ |U_y(x + \varepsilon, y) - U_y(x, y)| &\leq N\varepsilon, \quad |U_x(x + \varepsilon, y) - U_x(x, y)| \leq \psi(x, y, \varepsilon), \\ |U_y(x; y + \varepsilon) - U_y(x, y)| &\leq \varphi(x, y, \varepsilon). \end{aligned}$$

The most important part of the proof consists in defining suitably the functions φ and ψ ; they depend naturally on the continuity modulus common to F, G, H, λ and γ . Their definition is too complicated to be explained in this review. Another version of this existence theorem is obtained by replacing the first condition by $\partial H / \partial P = 0$ or $\lambda(y)$ is a constant. This, or the first condition, are unnecessary if the condition (K) is replaced by a Lipschitz condition relative to P and Q . The other existence theorem namely under condition (II), is proved by an altogether similar method. In a last paragraph the author shows how to derive from his theorems an existence theorem in the case of the classical problems set for a single function U by Cauchy, Darboux, Picard and Goursat.

C. Racine.

Szmydt, Z.: Sur l'existence d'une solution unique de certains problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes. Ann. Polon. math. 4, 165—182 (1958).

This paper is devoted to the problems considered in the paper reviewed above; but whereas the latter aimed at existence theorems the present one establishes, under certain conditions, uniqueness theorems. These additional conditions are such that the so-called Banach-Caccioppoli-Tichonov theorem may be applied. The solutions thus obtained are the limits of sequences got by successive approximations. One of these conditions is that the function denoted $\lambda(y)$ in the previous paper should be differentiable and with a bounded derivative in the rectangle D . The other conditions are expressed by certain inequalities and the functions F, B, G (or H) must be Lipschitz-continuous with respect to their arguments other than x and y . The method

of proof utilizes the same functional transformation as previously. But now it is shown that under the conditions imposed this transformation maps a complete metric space into a proper subset of it. Then the theorem just mentioned applies. The author shows on an example that the restrictive conditions imposed by him, if relaxed in a certain manner, define a problem which has no longer a unique solution. Under another set of restrictive conditions it is shown that the rectangle D can be subdivided into non overlapping rectangles in such a manner that, a unique solution being obtained in one of these subdivisions, it can be continued to all the other rectangles of the subdivision, yielding a uniqueness theorem for the whole of D . Applications to the problems of Cauchy, Darboux and Picard are made and uniqueness theorems obtained in all these cases. *C. Racine.*

Szmydt, Z.: Sur l'existence de solutions de certains problèmes aux limites relatifs à un système d'équations différentielles hyperboliques. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. **6**, 31—36 (1958).

This note proposes a uniform method of solution of two problems already studied in three previous notes (see in particular the last but one review.) With the vectorial notation utilized in the reviews of these notes, these problems are about the differential system: $U_{xy} = F(x, y, U, P, Q)$ $P = U_x$, $Q = U_y$. One is required to prove the existence of a solution in a bounded rectangle D of the (x, y) -plane. This solution must be regular, its value at a given point (x_0, y_0) of D is given and denoted U_0 , further on two curves Γ and Λ of D whose equations are $y = \gamma(x)$ and $x = \lambda(y)$ respectively; conditions of the form $P = G(x, U, Q)$ on Γ , $Q = H(y, U, P)$ on Λ must be satisfied. F is assumed to be Lipschitz-continuous with respect to P and Q ; H is Lipschitz-continuous with respect to Q and H is Lipschitz-continuous with respect to P . Further

$$|F| \leq a |U| + b (|P| + |Q|) + d, \quad |G| \leq \alpha_1 |U| + K_1 |Q| + d, \\ H \leq a_2 |U| + k_2 |P| + d$$

and the constants utilized in these various conditions are satisfying some inequalities. The author shows that there is equivalence between such a problem and that of solving a system of integro-differential equations. Once some estimates have been obtained the existence of a solution to such a system is a direct consequence of Schauder's fixed point theorem. The most important of the estimates are about the moduli of continuity of P (resp. Q) considered as function of x (resp. y). These depend on the modulus of continuity common to the functions γ, λ, F, G and H . A generalization of the problem just mentioned consists in replacing the last condition on Q by the following:

$$U(\lambda(y), y) = U_0 + \int_{y_0}^y B[t, U(\lambda(t), t), P(\lambda(t), t)] dt.$$

C. Racine.

Chiffi, Antonio: Estensione del teorema di convergenza del metodo dei momenti di S. Faedo. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **12**, 591—595 (1957).

Soit $L[u] = -u_{xx} + a_1 u_{xt} + a_2 u_{tt} + a_3 u_x + a_4 u_t + a_5 u$, où a_i ($i = 1, \dots, 5$) sont des fonctions de x et t définies dans S : $0 \leq x \leq c$, $t \geq 0$. On considère le problème de déterminer une solution $u(x, y)$ de l'équation (1) $L[u] = f(x, t)$ (f définie dans S), continue dans S avec ses dérivées partielles des deux premières ordres et satisfaisant aux conditions (2) $u(x, 0) = g(x)$, $u_t(x, 0) = g_1(x)$, $0 \leq x \leq c$, (3) $u(0, t) = f_1(t)$; $u(c, t) = f_2(t)$, $t \geq 0$ ((1), (2), (3) compatibles). En admettant (4) $a_2(x, t) > 0$ dans S et certaines hypothèses de régularité des fonctions a_i ($i = 1, \dots, 5$), f, f_1, f_2, g, g_1 , S. Faedo a démontré l'unicité d'une solution du problème en question et a construit une suite de fonctions qui converge vers la solution cherchée uniformément dans chaque ensemble S_T : $0 \leq x \leq c$, $0 \leq t < T$ (S. Faedo, cf. ce Zbl. **33**, 275). L'A. démontre que les mêmes résultats subsistent dans le cas

plus général (5) $a_2(x, 0) > 0$, $a_1^2 + a > 0$ dans S . La méthode de la démonstration consiste dans l'emploi d'une transformation des variables x et t convenablement choisie, qui permet de réduire le problème dans le cas plus général (5) à celui considéré par Faedo (4). Elle nécessite certaines hypothèses supplémentaires sur la régularité de la fonction a_1 .

Z. Szmýdt.

Ždanovič (Zhdanovich), V. F. (W. F.): Solution by the Fourier method of non-self-adjoint mixed problems for hyperbolic systems on a plane. Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 934—937 (1957) [Russisch].

Si considera il sistema iperbolico $(') u_t - A(x) u_x = B(x) u$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T < +\infty$, nel vettore incognito $u = (u_1, \dots, u_n)$ a componenti complesse, con $A(x)$, $B(x)$ matrici $n \times n$ definite in $[0, l]$ derivabile due volte la A e con $\det A(x) \neq 0$ in $[0, l]$, derivabile la B . Col metodo della separazione delle variabili e della sovrapposizione l'A. costruisce una serie che risolve formalmente il sistema $(')$ con le condizioni accessorie $('') Mu|_{x=0} + Nu|_{x=0} + Pu|_{x=l} + Qu|_{x=l} = \omega$, $\omega = (0, \dots, 0)$, $u|_{t=0} = f(x)$, dove M, N, P, Q sono matrici costanti complesse, $\text{rango} \begin{pmatrix} M & P \\ N & Q \end{pmatrix} = n + \text{rango} (MP)$, e dove $f(x)$ è un vettore misurabile in $(0, l)$, appartenente allo spazio di Banach di norma $\left(\int_0^l \|f(x)\|^2 dx + \|Mf(0) + Pf(l)\|^2 \right)^{1/2}$.

Supposto che le condizioni accessorie $('')$ siano regolari in un certo senso che non è possibile precisare in breve e la f soddisfi a certe restrizioni, l'A. afferma che la serie costruita, sommata convenientemente, converge uniformemente in $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ verso una soluzione u di $(')$, $('')$ continua con le derivate u_t, u_x . Sotto ipotesi meno restrittive si può affermare soltanto la convergenza della serie detta nella norma di un certo spazio verso una soluzione generalizzata di $(')$, $('')$. *R. Conti.*

Prudnikov, A. P.: A solution of a mixed problem in the integral form for a system of two parabolic differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 869—871 (1957) [Russisch].

L'A. cherche une solution du système

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + b \frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = a' \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + b' \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right),$$

$$(a + a' + b b')^2 \neq 4 a a',$$

avec les conditions initiales $U(x, y, 0) = F_1(x, y)$, $V(x, y, 0) = F_2(x, y)$ et les conditions aux limites $U'_x(0, y, t) = U'_y(x, 0, t) = V'_x(0, y, t) = V'_y(x, 0, t) = 0$, $U'_x(c, y, t) = \psi_1(y, t)$, $U'_y(x, d, t) = X_1(x, t)$ ($t \geq 0$), $V'_x(c, y, t) = \psi_2(y, t)$, $V'_y(x, d, t) = X_2(x, t)$. Les coefficients a, a', b, b' sont constants. En appliquant aux fonctions inconnues U et V , considérées comme fonctions de x et y , la transformation de Fourier

$$F\{\Phi(x, y)\} = \iint_R \exp\left(-im \frac{\pi}{c} \xi - in \frac{\pi}{d} \eta\right) \Phi(\xi, \eta) d\xi d\eta = \varphi(m, n)$$

qui fait correspondre à une fonction $\Phi(x, y)$ une fonction $\varphi(m, n)$ des arguments entiers, l'A. ramène le problème posé à un problème aux limites relatif à un système d'équations différentielles ordinaires. Celui-ci se ramène à son tour à un système algébrique par les méthodes du calcul opératoire. L'A. détermine ensuite la solution du problème posé sous la forme intégrale.

M. Krzyżański.

Isakova, E. K.: The asymptotic behaviour of the solution of a second order parabolic partial differential equation with a small parameter in the highest derivative term. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 935—938 (1958) [Russisch].

È data l'equazione $(') \varepsilon u_{xx} + b(x, t) u_x + c(x, t) u - u_t = 0$ dove x è un punto dell' R^1 euclideo, $t \in [0, T]$. L'A. dà una rappresentazione asintotica in funzione del parametro ε della soluzione $u^\varepsilon(x, t)$ di $(')$ che soddisfa la condizione iniziale

$u^\varepsilon(x, t)|_{t=0} = \psi(x)$, nell'intorno della caratteristica dell'equazione limite ($\varepsilon = 0$):
 (') $b v_x + c v - v_t = 0$ uscente dal punto $(0, 0)$, supponendo, accanto a varie ipotesi su b, c, ψ che sarebbe troppo lungo elencare, che sia $\psi(+0) \neq \psi(-0)$ cosicchè tale caratteristica è una linea di discontinuità per la $v(x, t)$ soluzione di (') tale che $v(x, t)|_{t=0} = \psi(x)$. R. Conti.

Isakova, E. K.: The asymptotic behaviour of the solution of a parabolic type of differential equation involving a small parameter. Doklady Akad. Nauk SSSR 119, 1077—1080 (1958) [Russisch].

È data l'equazione

$$(\prime) \quad \varepsilon \sum A_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + \sum B_i(x, t) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} + C(x, t) u^\varepsilon - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = 0$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n)$ è un punto dell' R^n euclideo, $t \in [0, T]$, ed è $\sum A_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum \xi_i^2$, $\alpha > 0$; le A_{ij}, B_i, C sono supposte limitate insieme a tutte le loro derivate di ordine $2n$ rispetto alle x_i ed insieme alle derivate $\partial A_{ij}/\partial t, \partial B_i/\partial t$. Sia $F(x) = 0$ una varietà regolare come le A_{ij}, B_i, C , la quale incontri ciascuna retta parallela all'asse x_1 in un sol punto. Per la soluzione u^ε della (') che soddisfa la condizione iniziale (') $u^\varepsilon(x, t)|_{t=0} = \psi(x)$ [con $\psi(x)$ dotata di derivate di ordine $2n$ limitate in tutto R^n , salvo su $F(x) = 0$ dove ψ e le sue derivate di ordine $\leq n$ hanno discontinuità di prima specie], l'A. indica, senza dimostrazione, una rappresentazione asintotica in funzione del parametro ε , valida nell'intorno di ciascuna caratteristica dell'equazione limite ($\varepsilon = 0$): $\sum B_i \partial v/\partial x_i + C v - \partial v/\partial t = 0$ che incontri $F(x) = 0$. Tale rappresentazione richiede l'impiego dei risultati del caso particolare studiato nel lavoro sopra recensito. Risultati analoghi vengono poi indicati per i casi in cui la condizione iniziale (') venga sostituita dalle $u^\varepsilon(x, t)|_{t=0} = \psi_1(x)$, $u^\varepsilon(x, t)|_{x_1=0} = \psi_2(x_2, \dots, x_n, t)$, ovvero dalle $u^\varepsilon(x, t)|_{t=0} = \psi_1(x)$, $u^\varepsilon(x, t)|_S = \psi_2$, dove $t \in [0, T]$ mentre x varia in una certa regione di R^n avente S come frontiera. R. Conti.

Karmanov, V. G.: Über die Existenz von Lösungen einiger Randwertaufgaben für eine Gleichung vom gemischten Typus. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 22, 117—134 (1958) [Russisch].

Proseguendo gli studi di A. V. Bicadze (questo Zbl. 52, 97) relativi all'equazione di tipo misto (') $u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0$, l'A. determina valendosi del metodo delle differenze finite la soluzione (unica) del seguente problema T^* (analogo al problema di Tricomi per l'equazione $y u_{xx} + u_{yy} = 0$). Sia D una regione del piano x, y avente per frontiera nel semipiano $y > 0$ una linea σ di estremi $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $a < b$, e nel semipiano $y < 0$ due segmenti $[AC]$, $[BC]$ delle caratteristiche $y = a - x$, $y = x - b$, rispettivamente. Supposto $f(P)$, $P \in \sigma$, continua, $\varphi(P)$, $P \in [AC]$ due volte derivabile, $f(A) = \varphi(A)$, e supposto che la linea σ sia regolare nel senso di Perron rispetto al problema di Dirichlet, si cerca una funzione $u(x, y)$ soluzione di (') in D eccetto $y = 0$, continua nella regione chiusa D , dotata di derivate u_x, u_y continue in D , tale che (') $u|_\sigma = f$, $u|_{[AC]} = \varphi$. L'A. osserva che il metodo seguito vale anche a provare l'esistenza di una u continua in D insieme con u_x, u_y , soddisfacente la (') in D per $y \neq 0$, tale che $u|_{[AC]} = \varphi$ e tale che $\lim_{P \rightarrow Q} f(P) \leq \lim_{P \rightarrow Q} u(P) \leq \lim_{P \rightarrow Q} u(P) \leq \lim_{P \rightarrow Q} f(P)$, $Q \in \sigma$, risultato questo

più generale del precedente se, ferme restando le altre ipotesi su σ e φ , la f si suppone continua soltanto in A e B , anzichè su tutta la linea σ . Infine l'A. considera estensioni del problema T^* quali la seguente. Sia D una regione limitata nel semipiano $y > 0$ da una linea σ_1 di estremi $A_1 = (a_1, 0)$, $B_1 = (b_1, 0)$, $a_1 < b_1$, e da altre linee $\sigma_2, \dots, \sigma_m$ di estremi $A_k = (a_k, 0)$, $B_k = (b_k, 0)$, ($k = 2, \dots, m$), $a_{k-1} < b_k < a_k < b_1$, e limitata nel semipiano $y < 0$ dai segmenti $[A_i, C_i]$ ($i = 1, \dots, m$) di caratteristiche $y = -x + a_i$ e dai segmenti $[B_1, C_m]$ della caratteristica $y = x - b_1$ e $[B_k, C_{k-1}]$ delle caratteristiche $y = x - b_k$ ($k = 2, \dots, m$). Si cerca una funzione $u(x, y)$ soluzione della (') in D per $y \neq 0$, continua nella regione chiusa D .

dotata di derivate u_x, u_y continue in D , tale che $u|_{\sigma_i} = f_i$, $u|_{[A_i C_i]} = \varphi_i$. Una tale funzione esiste se le σ_i sono regolari nel senso di Perron, le $f_i(P)$, $P \in \sigma_i$, sono continue, le $\varphi_i(P)$, $P \in [A_i C_i]$, sono due volte derivabili ed è $f_i(A_i) = \varphi_i(A_i)$.

R. Conti.

Pul'kin, S. P.: The Tricomi problem for the general equation of Lavrentiew-Bitzadze. Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 38—41 (1958) [Russisch].

Verf. untersucht das Tricomi-Problem für die Gleichung

$$(*) \quad u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} + A(x, y) u_x + B(x, y) u_y + C(x, y) u = 0.$$

Dabei wird $C(x, y) \leq 0$ für $y > 0$ vorausgesetzt. Da der Hauptteil von (*) für $y > 0$ die Potentialgleichung, für $y < 0$ die Wellengleichung ergibt, können die in dem Bericht von W. A. Bicadse (s. dies. Zbl. 78, 85) benutzten Methoden gekoppelt mit der Theorie der Integralgleichungen verwendet werden. Ein explizites Koeffizientenkriterium für die Lösbarkeit des Tricomi-Problems zu (*) gelingt nicht, da Verf. an einer Stelle das Nichtvorhandensein des Eigenwertes 1 bei einer Integralgleichung voraussetzen muß.

G. Hellwig.

Morrey jr., Charles B.: On the analyticity of the solutions of analytic non-linear elliptic systems of partial differential equations. I, II. Amer. J. Math. 80, 198—218, 219—237 (1958).

S. Bernstein, E. Hopf and others have proved the analyticity of solutions of a non linear analytic elliptic equation and recently similar results have been obtained for linear elliptic systems, in particular by the author and L. Nirenberg [Commun. pure appl. Math. 10, 271—290 (1957)]. The present paper considers non linear analytic elliptic systems of the form

$$(1) \quad \bar{\Phi}_j(x, u, \dots, \nabla^{s_j+t_k} u, \dots) = 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$x = (x^1, \dots, x^n), \quad u = (u^1, \dots, u^N), \quad \nabla^p u = (\nabla^p u^1, \dots, \nabla^p u^N)$$

where $\nabla^p u^k$ stands for the tensor $u^k_{x_1 \dots x_p}$. Such systems have been already considered by A. Douglis and L. Nirenberg (this Zbl. 66, 80). It is assumed that $\max s_j = 0$, $j = 1, \dots, N$ and that only derivatives of order $\leq s_j + t_k$ occur. The equations of variation yield in the usual manner the linear operators $L_{jk}(x, D)$. If $L_{jk}^0(x, D)$ denotes the terms of order exactly $s_j + t_k$ in them and $L(x, \lambda)$ stands for the determinant $|L_{jk}^0(x, \lambda)|$, the system is called elliptic if and only if $L(x, \lambda)$ is $\neq 0$ for real λ . Finally one puts $m = \sum_{j=1}^N s_j + t_j \geq 0$

and one defines the operators L^{pj} by the condition that $L_{jk} L^{kl} F_l = \delta_j^l L F_l$. Let us assume that one has obtained a solution u of (1) such that the u^k 's are t_k -times Hölder-differentiable, the Hölder exponent being $\mu < 1$. The study of such a solution in the vicinity of a point x_0 may be easily reduced to the same study in the vicinity of the origin 0. Such a solution may be written near 0 in the form $u^k = P^k + v^k$, P^k being a polynomial such that $\nabla^p v^k(0) = 0$, $0 \leq p \leq t_k$. About the origin, (1) may now be written in the form (2) $L_{jk} v^k = M_{jk} v^k + \psi_j$ where the M_{jk} 's are linear operators whose coefficients, as well as those of the L_{jk} 's, are constant and which contain only derivatives of order $< s_j + t_k$. The method of the author is as follows: he first studies a system of the form (3) $L_{jk} u^k = f_j$ in a real sphere B_R of centre 0 and of radius R . It is assumed that in \bar{B}_R : $f_j \in C^{\mu-s_j}$ (i. e. $-s_j$ -times Hölder-differentiable with exponent $\mu < 1$) and that $\nabla^p f_j(0) = 0$, $0 \leq p \leq -s_j$. A first theorem establishes the existence of a solution $u = P(f)$ defined in \bar{B}_R where $u^k \in C^{\mu+t_k}$, $\nabla^p u^k(0) = 0$, $0 \leq p \leq t_k$ and

$$\max_k h_\mu(\nabla^{t_k} u^k) \leq K \max_k (V^{-s_j} f_j); \quad k = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, N$$

($h_\mu(\dots)$ denotes the Hölder constant of its argument when the exponent is μ). This relation suggests to introduce the space E of the vectors u ($u^k \in C^{\mu+t_k}$ on \bar{B}_R)

with the norm $|u| = \max_k h_{\mu}(\Gamma^{t_k} u^k)$. The existence of $P(f)$ is established by introducing the kernels

$$G_{1n}(u) = (u^n/n!) (\log |u| - C_n), \quad C_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + 1/n,$$

$$G_{2n}(u) = u^n |u|/(n+1)!$$

and, if $m > 0$, the dot indicating the usual scalar product, defining

$$J^*(y) = C_{1v} \int_{|\lambda| \leq 1} G_{1m}(y \cdot \lambda) L^{-1}(\lambda) d\lambda \text{ if } v \text{ is even,}$$

$$J^*(y) = C_{2v} \int_{|\lambda| \leq 1} G_{2m}(y \cdot \lambda) L^{-1}(\lambda) d\lambda \text{ if } v \text{ is odd;}$$

$$J(y) = \Delta^{v/2} J^*(y) \text{ if } v \text{ is even, } = \Delta^{(v+1)/2} J^*(y) \text{ if } v \text{ is odd,}$$

where Δ denotes the Laplacian. Putting $F_j(x) = \int_{B_R} J(x - \xi) f_j(\xi) d\xi$ it is not

difficult to show that $L F_j(x) = f_j(x)$, $x \in \bar{B}_R$. It follows that, if we set $U^v = L^{vj} F_j$, the operator $P(f)$ is determined, its expression being $P^k(f) = U^k - Q^k$ where the Q^k 's are suitable polynomials. Now let H^k denote a solution of the homogeneous system $L_{jk} H^k = 0$ and, using a condensed notation easily understood, set $W = P[f(H)]$ and $V = P[f(v)]$ where f denotes the right hand member of (2). Then, if $v = V + H$ is a solution of (2), under the conditions stated above, V will be a solution of the functional equation (5) $V - T(V, H) = W$ where

$$T(V, H) = P[M_{jk} V^k - \psi_j(\dots, H + V, \dots) - \psi_j(\dots, H, \dots)].$$

All the vectors in this equation may be considered as vectors in the Banach space E . It is easily shown that $T(0, H) = 0$ and that

$$\|T(V_1, H) - T(V_2, H)\| \leq \varepsilon_1(R) \|V_1 - V_2\|, \quad \|W\| \leq \varepsilon_2(R), \quad \lim_{R \rightarrow 0} \varepsilon_i(R) = 0, \quad i = 1, 2,$$

when $\|H\|, \|V_1\|, \|V_2\|$ are $\leq M < \infty$. From these inequalities known theorems about Banach spaces yield the existence of a unique solution V of (5) such that $\|V\| \leq M$. Now it is proved that, if a solution of class C^{n+tk} on \bar{B}_R of the system $L_{jk} H^k = 0$ is obtained, it can be extended to a function analytic in the domain B_{hR} : $|x_1| < R$, $|x_2| < h(R - |x_1|)$ where $x = x_1 + i x_2$. The elements of E which can be extended to elements analytic on B_{hR} , being Hölder-differentiable with the same indices on \bar{B}_{hR} , form obviously a vector space E^* which, normed in a natural manner, is a Banach space. Similarly the vectors f such that $f_j \in C^{n-s_j}$ on \bar{B}_R , $V^p f_j(0) = 0$, $0 \leq p \leq -s_j$, form a vector space F and a Banach space F^* may be determined as a vector subspace of F exactly as E^* is deduced from E . Now it is proved that if f belongs to F^* , $P(f)$ defines an element of E^* . It follows that, if H is an element of E^* W belongs to the same space. Now (5) determines uniquely $V \in E^*$. This shows that v belongs to E^* ; therefore that a solution of (1) can be extended to an analytic vector throughout each of the vicinities B_{hR} , for h sufficiently small, of every one of the points of its domain of definition.

In Part II the author completes the study of solutions of a non linear elliptic system of equations. He considers analytic Dirichlet data on an analytic portion of the boundary and shows that there is also analyticity about points of this portion. To establish this result the system under consideration must be not only elliptic but strongly elliptic in the sense of Nirenberg (cf. this Zbl. 67, 76). The method of proof is, one the whole, similar to that developed in the first paper. As the system under consideration remains analytic and strongly elliptic under an analytic change of variables the portion of the boundary across which the solution must be continued analytically may be, without any loss of generality, assumed to be a linear manifold.

Then a hemisphere

$$G_R: |x|^2 + y^2 < R^2, y > 0, \quad |x|^2 = \sum_{\alpha=1}^r (x^\alpha)^2$$

is introduced. The independent variables are x^1, \dots, x^r, y forming the vector $X = (x, y)$ where $x = (x^1, \dots, x^r)$. One considers the system as defining a solution analytic in G_R , with zero Dirichlet data on the manifold $y = 0$ inside of G_R . The zero Dirichlet data are substituted for other analytic data by subtracting from the solution corresponding to them a certain analytic function. Exactly as in the first paper, the operators L_{jk} are introduced and the problem is to prove the analyticity on the boundary of the solution v of the system

$$(1) \quad L_{jk} v^k = M_{jk} v^k + \psi_j$$

which vanishes along with a certain number of its partial derivatives at $X = 0$. The existence of such a solution in the real domain is once more established by proving that the functional equation $V - T(V, H) = W$ where V, H and W are defined in the same manner, has a unique solution V . The method of proof differs from the first in that new expressions are required for the operator $P(f)$ on the one side and for the vector H on the other. These expressions are very complicated and necessitate lengthy developments. It will suffice to say that: (1) operators $B^\alpha(u, v)$, $\alpha = 1, \dots, r+1$, are introduced so that a generalized Green's formula holds, namely (D : a sufficiently smooth domain and $L^*_{jk} = (-1)^{s_j+s_k} L_{jk}$ where $s_j + s_k$ is the order of the derivatives in L_{jk})

$$\int_D \sum_{j,k}^{1,\dots,N} [v^j L_{jk} u^k - u^k L^*_{jk} v^j] dx dy = \int_{\partial D} \sum_1^{r+1} B^\alpha(u, v) n_\alpha dS$$

(2) the fundamental formula of Potential Theory is extended to solutions of the system $L_{jk} u^k = f_j$ by introducing suitable kernels $G^{ij}, G^i = (G^{i1}, \dots, G^{iN})$. One obtains:

$$u^k = \int_{G_a} G^{kj}(X, \Xi) f_j(\Xi) d\Xi - \int_{\partial G_a} B^\alpha[G^k(X, \Xi), u(\Xi)] n_\alpha dS.$$

Let now

$$U^k = \int_{G_a} G^{kj}(x - \xi, y, \eta) f_j(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

where $f_j(x, y)$ is Hölder-differentiable up to a certain order with exponent $\mu < 1$ and vanishes outside of G_a , let F^k denote suitable polynomials. Then the operator P is defined as follows: $P^k(f) = U^k - F^k$. Lastly if H^k is solution of the homogeneous system $L_{jk} H^k = 0$ in G_{2a} and vanishes, along with its partial derivatives up to a certain order, on $y = 0$, one has

$$H^k(X) = \int_{\Sigma_{2a}} B^\alpha[G^k(X, \Xi), H(\Xi)] n_\alpha d\Sigma$$

where Σ_{2a} denotes the portion of ∂G_{2a} (boundary of G_{2a}) where $y > 0$. The same theorems as in the first part, namely that $P(f)$ is analytic when f is analytic and that the real solutions of the homogeneous system denoted H can be extended to an analytic vector are then easily proved. The analyticity of v on the portion of the boundary of G_a on which $y = 0$ follows at once.

C. Racine.

Hörmander, Lars: Local and global properties of fundamental solutions. Math. Scand. 5, 27–39 (1957).

Die Arbeit beschäftigt sich mit Eigenschaften von Grundlösungen partieller Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten. Es wird gezeigt, daß jeder Differentialoperator L mit konstanten Koeffizienten eine Grundlösung E besitzt, die folgenden Eigenschaften genügt: 1) E ist eine Distribution im Sinne von L. Schwartz, a fortiori, $E/\cosh(\varepsilon(x^2 + 1)^{1/2})$ ist für jedes $\varepsilon > 0$ eine gemäßigte Distribution (distribution tempérée) im Sinne von Laurent Schwartz (Théorie des Distributions, Vol. II; dies. Zbl. 42, 114). 2. $LE = \delta(x)$, wobei $\delta(x)$ die Diracsche Deltafunktion bezeichnet. 3. $M \int E(x - y) f(y) dy$ ist lokal quadratisch integrierbar

für jedes quadratisch integrierbare $f(y)$ mit kompaktem Träger, und für jeden schwächeren Differentialoperator M . Die Bezeichnung „ M ist schwächer als L “ wird dabei in dem vom Verf. früher (s. dies. Zbl. 67, 322) definierten Sinne verwendet. Ein entsprechendes Resultat mit der Bedingung (3) in abgeschwächter Form war früher von Malgrange (dies. Zbl. 71, 90) und Ehrenpreis (dies. Zbl. 56, 106) bewiesen worden. Die Beweismethode des Verf. stützt sich auf den Malgrangeschen Beweis. Ferner wird an Gegenbeispielen dargetan, daß es nicht möglich ist, die Bedingung (1) durch die schärfere Bedingung zu ersetzen, E solle selbst eine gemäßigte Distribution sein.

H. O. Cordes.

Burčuladze, T. V.: Über die Fundamentallösungen eines Differentialgleichungssystems. Soobščeniija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR 20, 391—398 (1958) [Russisch].

E. Levy proved the existence of fundamental solutions of a sufficiently large class of elliptic systems of differential equations with variable coefficients in two independent variables. These results were generalized by Lopatinskij to n ($n > 2$) independent variables. In the present work the author proposes a construction of the fundamental solutions of the following elliptic system of partial differential equations (which belong to the class treated by Levy):

$$(I) \quad \sum_{l=1}^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 A_{ik}^{jl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_k} + \omega^2 u_j = 0 \quad (j = 1, 2).$$

It is shown that a simplified system of type (I) refers to a particular case of vibration of a solid body. The author introduces a fourth order elliptic differential operator (equivalent to a product of two second order differential operators) with the use of which the original system (I) is associated with an algebraic system. The determinant of the algebraic system may possess only complex roots. As a particular problem the author attempts to find a solution of the system in question which would possess a singularity of the type of a logarithmic singularity. To this end the sought functions are expressed by means of double integrals whose integrands are Hankel functions of order zero and first degree. The formal manipulations, which lead to a matrix, representing the fundamental solution of the original system, show that the matrix possesses as a particular value a logarithmic singularity. Hence all the requirements are satisfied. As a particular case the author considers the system with $\omega = 0$. A repetition of the same technique with the integrand of a logarithmic form in place of the Hankel function leads quickly to the sought solution. M. Z. v. Krzywoblocki.

Ladyženskaja, O. A.: Über instationäre Operatorgleichungen und ihre Anwendungen auf lineare Probleme der mathematischen Physik. Mat. Sbornik, n. Ser. 45 (87), 123—158 (1958) [Russisch].

In früheren Abhandlungen (vgl. u. a. dies. Zbl. 64, 95—96) hat die Verf. hinreichende Bedingungen für Lösbarkeit des Cauchyproblems für nichtstationäre Operatorgleichungen der Typen:

$$(1) \quad du/dt + S(t)u = f, \quad (2) \quad d^2u/dt^2 + S(t)u = f, \quad (3) \quad du/dt + iS(t)u = f$$

im Hilbertschen Raume $L^2(0, l) \otimes H$ (dem Raume der Funktionen auf $(0, l)$ mit Werten in einem Hilbert-Raume H) gegeben. In dieser Arbeit wird gezeigt, daß in dieses abstrakte Schema viele wichtige gemischte Rand- und Anfangswertaufgaben des parabolischen (1), hyperbolischen (2) und Schrödingertypus (3) hineinpassen. Das Hauptmittel bilden die bekannten integralen Ungleichungen für elliptische Operatoren $S(t)$. Zuletzt wird die Methode der Fortsetzung nach einem Parameter auf das Dirichlet-Problem für (reelle) stark elliptische Gleichungssysteme und das entsprechende Rand- und Anfangswertproblem für stark parabolische Systeme:

$\partial \tilde{u} / \partial t + L_1 \tilde{u} = \tilde{f}$ (L_1 starkelliptisch) eingehend erörtert. [Bemerkung des Ref.: Die hier entwickelte Methode ist auf Zylinder-Raum-Zeitgebiete beschränkt. In letzter Zeit gelang es J. L. Lions, Ann. Inst. Fourier 7, 143—182 (1958) sich von dieser Einschränkung teilweise zu befreien.] K. Maurin.

Agmon, Shmuel: Multiple layer potentials and the Dirichlet problem for higher order elliptic equations in the plane. I. Commun. pure appl. Math. **10**, 179—239 (1957).

Soit Ω un ouvert de R^n ; soit Γ la frontière de Ω . Soit A un opérateur elliptique d'ordre $2m$. On considère le problème de Dirichlet pour l'opérateur A dans l'ouvert Ω (1) $Au, \Omega = 0, D^p u|_{\Gamma} = f^p$ ($|p| \leq m-1$). Pendant les derniers dix ans plusieurs auteurs (Višik, Gårding, Browder, Lions, ...) ont étudié le problème de Dirichlet dans le cas $m =$ quelconque en utilisant la théorie des espaces Hilbertiens. Cependant, dans le cas $m = 1$ et, en particulier, dans le cas de l'opérateur de Laplace, il y a classiquement une autre méthode, la méthode de Neumann-Poincaré-Fredholm (voir, par exemple, Miranda, Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, v. ce Zbl. **65**, 85). Dans cet article l'A. généralise cette méthode au cas $m =$ quelconque, $n = 2$, A homogène à coefficients constants, Ω relativement compact et simplement connexe. Il dit que la théorie ne va pas dans le cas $n > 2$ parce que, en général, les „noyaux de Poisson“ ne s'expriment pas comme une somme des dérivées de la solution élémentaire distinguée, ce qui est décisif dans la deduction. [Une autre généralisation, dans le cas le plus général, a été donnée par Lopatinskiĭ (ce Zbl. **52**, 102), mais la théorie de l'A. semble être plus proche à la forme classique.] Citons ici seulement le résultat final: Théorème. Supposons que Ω appartienne à la classe C_β ($\beta > \frac{1}{2}$) et que les f^p soient les restrictions à Γ des dérivées d'une fonction dans la classe $C_{(m-1)+\alpha}$ ($\alpha < \beta$) dans Ω . Alors, il existe une solution et une seule de (1) et cette solution u appartient à la classe $C_{(m-1)+\alpha}$. J. Peetre.

Koševlev (Koshelev), A. I.: On the boundedness in L_p of derived solutions of elliptic equations and elliptic systems. Doklady Akad. Nauk SSSR **115**, 542—544 (1957) [Russisch].

Verf. kündigt folgendes wichtige Ergebnis an: Es sei u eine verallgemeinerte Lösung (v. L.) des elliptischen Gleichungssystems

(1)
$$\sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x), \quad u = (u_1, \dots, u_n)$$

(d. h. $u \in W_p^{(2m)} = W_p^{(2m)}(\Omega_N)$, $\partial^\alpha u / \partial n^{\alpha-1} = 0$, $\alpha = 0, \dots, m-1$ und u genügt f. ü. der Gl. (1)); wobei $a_\alpha \in C^0(\bar{\Omega}_N)$, $f \in L^p(\Omega_N)$, der Rand $\partial\Omega_N$ von Ω_N ist einfach zusammenhängend und hinreichend glatt. Dann gilt die Ungleichung:

(2)
$$\|u\|_{W_p^{(2m)}} \leq c_1 \|f\|_{L^p} + c_2 \|u\|_{L^p}, \quad p > 1.$$

Aus (2) folgt die Existenz der v. L. des quasilinearen Gleichungssystems

$$\sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha^*(x, u; D^1 u, \dots, D^{2m-1} u) D^\alpha u = f^*(x, u, \dots, D^{2m-1} u)$$

[wo $a_\alpha^*(x, \dots, D^{2m-1} u) \stackrel{\text{def}}{=} a_\alpha(x) + \lambda b_\alpha(x, \dots, D^{2m-1} u)$, $f^*(x, \dots, D^{2m-1} u) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + \lambda q(x, \dots, D^{2m-1} u)$, b_α, q stetig, $f \in L^p(\Omega_N)$] für hinreichend kleines λ für $p > N$. K. Maurin.

Littman, Walter: Remarks on the Dirichlet problem for general linear partial differential equations. Commun. pure appl. Math. **11**, 145—151 (1958).

Mit der geläufigen Technik des Hilbertschen Raumes formuliert Verf. das Dirichletsche Problem für gewisse Differentialoperatoren von beliebigem Typus. Es wird ein Lösbarkeitskriterium angeführt. Diese Note verallgemeinert die Untersuchungen von Louhivaara (vgl. dies. Zbl. **78**, 84) und deckt sich im wesentlichen mit derjenigen von F. E. Browder [Rend. circ. mat. Palermo, II. Ser. **6**, 249—253 (1958)]. K. Maurin.

Dymkov, S. S.: The first boundary problem for quasilinear elliptical equations. Doklady Akad. Nauk SSSR **115**, 220—222 (1957) [Russisch].

Verf. skizziert die Beweisidee des folgenden Satzes: Die Randaufgabe:

$$\sum a_{ik}(x, u) \partial^2 u / \partial x_i \partial x_k + \sum a_i(x, u) \partial u / \partial x_i + a(x, u) = 0,$$

$u|_{\partial\Omega_N} = 0$, wobei $\partial\Omega_N$ hinreichend regulär ist, besitzt eine Lösung in $H_{2,\delta}$ (zweite

Ableitungen genügen einer Hölderbedingung mit Exponenten δ) falls: 1. $\partial a(x, u)/\partial u \geq \beta > 0$ für $x \in \Omega_N$ und alle u , 2. die Koeffizienten stetige beschränkte erste Ableitungen haben für $x \in \Omega_N$, $|u| \leq \beta^{-1} \max |a(x, 0)| = c_1$, 3. $\sum a_{ik}(x, u) \xi_i \xi_k \geq \alpha \sum \xi_i^2$; $\max |\partial a_{ik}/\partial u| \leq \alpha \alpha \sqrt{3}/(12 N c_1)$ für $x \in \Omega_N$, $|u| \leq c_1$. K. Maurin.

Jaenicke, Joachim: Nullstellenvorgaben für Lösungen linearer Randwertprobleme elliptischer Differentialgleichungssysteme. Math. Nachr. 18, H. L. Schmid-Gedächtnisband 106—119 (1958).

Betrachtet wird das Randwertproblem

$u_x - v_y = a(x, y)u + b(x, y)v + c(x, y)$, $u_y + v_x = a(x, y)u + b(x, y)v + c(x, y)$ in einem Gebiet der (x, y) -Ebene mit der Vorgabe $\alpha(s)u(s) + \beta(s)v(s) = \gamma(s)$ auf der Berandung. Der Index κ der Randbedingung sei positiv. Die allgemeine Lösung des homogenen Problems ($c = c = 0$, $\gamma = 0$) enthält dann bekanntlich $2\kappa + 1$ willkürliche Konstanten. Nach W. Haack (s. dies. Zbl. 47, 340) können diese durch Vorgabe geeigneter Nullstellen der Lösung festgelegt werden. In dieser Arbeit wird zugelassen, daß das Vektorfeld (α, β) auf der Berandung eine endliche Anzahl von Sprüngen besitzt, sowie die Vorgabe solcher Nullstellen für die Lösung im abgeschlossenen Gebiet diskutiert. Dies ist naturgemäß, da gezeigt wird, daß man in den Sprungstellen von (α, β) gerade geeignete solche Nullstellen für die Lösung vorschreiben muß.

G. Hellwig.

Zacharov (Zakharov), V. K.: Imbedding theorems for a space having its metric degenerating at a finite number of interior points within a bounded domain. Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 938—941 (1957) [Russisch].

In dieser Note setzt Verf. seine Untersuchungen (vgl. dies. Zbl. 79, 119) über Einlagerungssätze von Sobolev'schen Typus für quadratische Metriken, die in gewisser Weise ausarten, fort. Hier werden untersucht Räume der Funktionen im 2-dimensionalen beschränkten Gebiete, wobei die Metrik in einem inneren Punkte ausartet. Die hier angeführten Sätze sind zur Lösung von Randaufgaben für ausartende Differentialoperatoren geeignet.

K. Maurin.

Hô, Jun-iti: Properties of subharmonic functions in the half-plane. Duke math. J. 25, 499—504 (1958).

Sei $u(z)$ subharmonisch auf $Rz \geq 0$ mit Ausnahme des Punktes $z = 0$, aber unter Einschuß von $z = \infty$. Verf. beweist u. a., daß gewisse Wachstums Voraussetzungen für u die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(re^{i\theta})/r \cos \theta = \beta$$

für $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$ mit Ausnahme einer Menge von θ -Werten von verschwindender äußerer logarithmischer Kapazität nach sich ziehen. Dabei ist β unabhängig von θ . Die Arbeit schließt sich den Untersuchungen von L. Ahlfors und M. Heins (dies. Zbl. 36, 47) und J. Lelong-Ferrand (dies. Zbl. 33, 373) an. Die Abschätzungsmethoden sind analog; neu ist vor allem eine gewisse Lockerung der Randbedingungen.

A. Huber.

Gegelia, T. G.: Das fundamentale Lemma I. I. Privalovs für räumliche Potentiale. Soobščeniia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 18, 257—264 (1957) [Russisch].

Let S be a closed regular surface in 3-dimensional space, $M(Q, R)$ a given function, $Q \in S$, $R \in G(S)$, where $G(S)$ denotes some neighbourhood of S ; $\varphi(Q)$ a summable function on S . The purpose of this paper is to find some limits of the integral $\int_S \frac{M(Q, R) \varphi(Q)}{r^2(Q, R)} d\sigma_Q$, where r is the distance between Q and R , under as general as possible assumptions on $M(Q, R)$.

J. Górski.

Bugrov, Ja. S.: Eigenschaften der polyharmonischen Funktionen. Izvestiia Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 22, 491—514 (1948) [Russisch].

Soit Ω une boule ouverte dans R^2 et soit Γ le bord de Ω . On considère le pro-

blème de Dirichlet pour l'opérateur Δ^m (Δ = Laplacien):

$$\Delta^m u|_{\Omega} = 0, \quad \partial^k u / \partial r^k|_{\Gamma} = q_k \quad (k = 0, 1, \dots, m-1).$$

Désignons par H_p^s les espaces de Nikolskij (voir Trudy mat. Inst. Steklov. Nr. 38, 244—278 (1951)). Théorème: Si $q_k \in H_p^{r-m-k-1}(\Gamma)$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$; $1 \leq p \leq \infty$; $r > 0$), alors on a $u \in H_p^{r+m-1 \cdot (1,p)}(\Omega)$. Ce théorème généralise des résultats antérieurs de Nikolskij (cas: $p = 2$, $m = 1$; v. ce Zbl. 80, 85) et d'Amanov (cas: $p = 2$, $m = 2$; v. ce Zbl. 50, 324). Dans le cas $m = 1$, résultat analogue pour le problème de Neumann. J. Peetre.

Huber, Alfred: Correction to the paper „The reflection principle for polyharmonic functions“. Pacific J. Math. 7, 1731 (1957).

Betrifft dies. Zbl. 65, 91.

Variationsrechnung:

Signalov, A. G.: Variationsprobleme mit zulässigen Flächen von beliebigem topologischen Typus. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 1 (73), 53—98 (1957) [Russisch].

The problem attacked by the A. may be considered to be a generalization of the following classical problem: to find a surface T of the minimal area bounded by a simple closed curve Γ . Put in this form the problem presents one of the many possibilities of the Plateau problem, whose usual formulation is: to find a minimal surface bounded by a given curve. The work is divided into a few parts. In the first part the author collects some definitions of curves and surfaces expressed in parametric forms. The parametric formulation of a surface is given in terms of vector functions defined on a two-dimensional domain of a specific topological type. The description of the parametric elements collected in this part is far from being a systematic, geometric representation of the items in question with the logical transition from one into another. The A. intentionally collects only those definitions which are necessary for the existence proofs of the minimum. Between others there is given the definition of a „degenerated“ surface and of the asymptotic „degeneracy“ of a sequence of surfaces. On the base of that the A. derives the fundamental theorem I, stating the existence of the extremum surface of a given topological type, and the fundamental theorem II referring to the conditions under which the problem has a solution. In the next part the A. presents some criteria referring to the continuous sequence of successive vector functions defined on the canonical geometrical forms of the specific topological type. Here he establishes the existence of the parametric representation of the successive polyhedrons and quotes the (ε, δ) -theorem of Young. In the last part the A. describes the smoothing of the procedure of the minimizing sequence which differs from the analogous one used in one of his previous works (s. this Zbl. 44, 101). Next the proofs of the theorems I and II are given. The main difficulty here lies in showing that improvements in the asymptotic process of a non-degenerated minimizing sequence cannot introduce an asymptotic degeneracy. This is followed by a demonstration of how to obtain a solution of the problem of Douglas which is stated in the form: to find a minimal surface bounded by a given set of Jordan curves and possessing the characteristics of a prescribed topological type. M. Z. v. Krzywoblocki.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Coz, Marcel: Équations intégrales subordonnées à une condition de prolongement analytique. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 2715—2717 (1958).

Es werden verschiedene Typen von Integralgleichungen erster Art untersucht und miteinander verglichen. Verf. bestimmt die notwendigen und hinreichenden

Bedingungen dafür, daß diese Integralgleichungen die Indikatrix einer gewissen Variationsmetrik bestimmen.

A. Móór.

Bouligand, Georges: Un type de groupement en continu linéaire d'équations intégrales. C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 2701—2705 (1958).

Verf. und Marcel Coz haben Integrale von der Form $J_n(x, y) = \int_0^{2\pi} K_n(x, y, t) df(t)$

(s. dies. Zbl. **78**, 146; **80**, 151) untersucht und mit der Indikatrix einer gewissen Variationsmetrik in Zusammenhang gebracht. Wird n als Parameter betrachtet, so bekommt man eine Familie von Integralgleichungen der angegebenen Form. Das gibt die Idee für weitere Untersuchungen der Gleichungen von der Form $J_n = \Omega(K_n, f)$. Verf. skizziert einen Weg in der Richtung der Theorie der harmonischen Funktionen. Es werden dann weitere mögliche Verallgemeinerungen des Problems angedeutet.

A. Móór.

Doetsch, Gustav: Über den Konvergenzbereich von Laplace-Integralen mit komplexem Integrationsweg. Math. Nachr. **18**, H. L. Schmid-Gedächtnisband 129—135 (1958).

Verf. betrachtet Laplace-Integrale $\int_C e^{-st} F(t) dt = f(s) = L_C(F)$, wobei

der Integrationsweg eine Kurve C in der komplexen Ebene mit folgenden Eigenschaften ist: Ihre Parameterdarstellung in Polarkoordinaten sei $t(l) = r(l) e^{i\varphi(l)}$ (l = Bogenlänge), ferner gelte $\lim_{l \rightarrow \infty} \varphi(l) = \varphi_1$, $\lim_{l \rightarrow \infty} \varphi(l) = \varphi_2$. Voraussetzung A:

$\varphi_2 - \varphi_1 < \pi$, Voraussetzung B: Für jedes $\delta > 0$ soll $\int_{l_0}^{\infty} e^{-\delta r(l)} dl$ mit einem gewissen l_0 , das von δ abhängen kann, konvergieren. $F(t)$ sei längs C lokal lebesgue-integrierbar. Verf. beweist die folgenden Sätze: Satz 1. Wenn $L_C(F)$ für s_0 konvergiert, so konvergiert es unter den Voraussetzungen A und B für alle $s = s_0 + \rho e^{i\theta}$ mit $\rho > 0$, $-\frac{1}{2}\pi - \varphi_1 < \theta < \frac{1}{2}\pi - \varphi_2$ d. h. in einem Winkelraum mit dem Scheitel s_0 und der Öffnung $\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)$, und läßt sich unter Verwendung

der Funktion $\psi(t) = (C) \int_{t_0}^{t_1} e^{-s_0 \tau} F(\tau) d\tau$ in der Form $f(s) = (s - s_0) \int_C e^{-(s-s_0)t} \psi(t) dt$

darstellen. Dieses Integral ist in dem Winkelraum absolut konvergent. Satz 2. Das Innere des Bereichs absoluter Konvergenz von L_C ist konvex. Der Logarithmus des absolut genommenen Integrals ist auf jeder Geraden im Konvergenzbereich eine konvexe Funktion.

W. Saxer.

Wintner, Aurel: Stable distributions and the transforms of Stieltjes and Le Roy. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **13**, 24—33 (1958).

Mit Hilfe von Eigenschaften der Funktion

$$G_b(x) = \int_0^{\infty} e^{-xs} \sin(s^b) ds$$

gibt Verf. einen neuen Beweis für einen Satz von P. Lévy betreffs Vorzeichen der Funktion

$$F_a(x) = \int_0^{\infty} e^{-ta} \cos(xt) dt$$

sowie für einen Satz von W. Feller betr. das Vorzeichen der Ableitungen der Mittag-Lefflerschen Funktion $E_\alpha(z)$.

W. Saxer.

Devinatz, A.: Two parameter moment problems. Duke math. J. **24**, 481—498 (1957).

Let $\mu(m, n)$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$) be a double sequence of real numbers. Write $\mu(m \div p, n \div q) \gg 0$ if for all finite sets of real numbers ζ_i and positive lattice points (m_i, n_i) we have $\sum_{i,j} \zeta_i \zeta_j \mu(m_i + m_j, n_i + n_j) \geq 0$. Write $\mu(m \div p, n \div q) \gg$

$v(m-p, n+q)$ if $\mu(m+p, n+q) - v(m-p, n+q) \gg 0$. The following conditions are sufficient for the existence of a uniquely determined solution $d\alpha(x, y) \geq 0$ of the moment problem

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} x^m y^n d\alpha(x, y) = \mu(m, n) \quad (-\infty \leq a_k < b_k \leq \infty, \quad k = 1, 2).$$

(a) $\mu(m+p, n+q) \gg 0$, (b) $a_1 \mu(m+p, n+q) \ll \mu(m+p+1, n+q) \ll b_1 \mu(m+p, n+q)$, $a_2 \mu(m+p, n+q) \ll \mu(m+p, n+q+1) \ll b_2 \mu(m+p, n+q)$, (c) for every fixed m_0 and n_0 the Hamburger moment sequences $\mu(m, 2n_0)$ and $\mu(2m_0, n) + \mu(0, n)$ are determined. — If $a_k = -\infty$ or $b_k = \infty$, the corresponding inequality in (b) is redundant. Conditions (a) and (b) are analogous to the necessary and sufficient conditions for the existence of a solution in the one-dimensional moment problem, where they ensure determinacy only if the interval is finite. Here in case $-\infty < a_k < b_k < \infty$ for either $k = 1$ or $k = 2$, the condition (c) may be removed, but $d\alpha(x, y)$ will no more be necessarily unique. The proof uses very essentially Aronszajn's theory of reproducing kernels (this Zbl. 37, 207). In the appendix the same theory is applied to give a new proof of Hamburger's necessary and sufficient condition for the determinacy of the one-dimensional moment problem in $(-\infty, \infty)$ [see Shohat and Tamarkin, The Problem of Moments (this Zbl. 41, 433, 664), p. 70].

J. Horváth.

Gregorini, Giovanna: Un'osservazione sui coefficienti di Legendre-Stieltjes di una funzione non decrescente. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 12, 655—657 (1957).

Ghizzetti (this Zbl. 72, 63) a démontré qu'étant donné b_k ($k = 0, 1, \dots$), il existe une fonction croissante $\alpha(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$), telle que $b_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T_k(x) d\alpha(x)$ où les $T_k(x)$ sont les polynômes de Tchebycheff, si et seulement si les déterminants $D_n = |b_{|i-k|}]_0^n$ sont positifs. Si $D_n > 0$ ($n = 0, \dots, m-1$), $D_n = 0$ ($n = m, m+1, \dots$), alors $\alpha(x)$ est une pure fonction de sauts et l'on a les quatre cas: (1) m pair, $\alpha(x)$ fait $\frac{1}{2} m$ sauts, dont aucun en $x = \pm 1$, (2) m pair, $\alpha(x)$ fait $\frac{1}{2} m + 1$ sauts, dont un en chacun des deux points $x = \pm 1$, (3) (resp. (4)) m impair, $\alpha(x)$ fait $\frac{1}{2} (m+1)$ sauts, dont un au point $x = 1$, aucun au point $x = -1$ (resp. un au point $x = -1$, aucun au point $x = 1$). L'A. donne un critère, portant sur les secondes différences des b_k , qui permet de distinguer entre ces quatre cas.

J. Horváth.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

• Taylor, Angus E.: Introduction to functional analysis. New York: John Wiley & Sons, Inc.; London: Chapman & Hall, Ltd. 1958. XVI, 423 p. \$ 12.50.

Das Buch stellt eine ausgezeichnete Einführung in die moderne Funktionalanalysis dar. In präzisiertem und durchsichtigem Stil geschrieben, führt es den Leser an die grundlegenden Ideen und Sätze über lineare Räume und lineare Operatoren heran und zeigt ihm, wie zugkräftig die funktionalanalytischen Methoden beim Studium von Problemen der Algebra, der klassischen Analysis, der Maß- und Integraltheorie und der Differential- und Integralgleichungen sind; sie gestatten, scheinbar weit auseinander liegende Gebiete der Mathematik einheitlich zu behandeln. — Obwohl das Buch in erster Linie für reifere Studierende gedacht ist, bietet es durch zahlreiche Beispiele, durch Anwendungen der abstrakten Theorie sowie durch eine große Fülle von zusätzlichen Problemstellungen auch dem Kenner wertvolle Anregungen. — Nachdem in einer Einführung die ständig benötigten Begriffe und Bezeichnungen erklärt worden sind, behandelt das 1. Kapitel die grundlegenden Tatsachen über lineare Räume, lineare Operatoren und lineare Funktionale sowohl für den endlich-dimensionalen als auch für den unendlich-dimensionalen Fall. Beim

Beweis des Fortsetzungssatzes für lineare Funktionale wird natürlich das Zornsche Lemma herangezogen. Sätze über Nullmannigfaltigkeiten und Wertebereiche linearer Operatoren und deren zugehörige Transponierte beschließen das Kapitel, in welchem außerdem noch die operatorentheoretische Formulierung sehr instruktiver Beispiele der klassischen Analysis zu finden ist. — Das 2. Kapitel enthält die für die weiteren Untersuchungen benötigten Definitionen und Sätze der allgemeinen Topologie. Besonders klar wird die gegenseitige Abhängigkeit der verschiedenen topologischen Begriffe herausgearbeitet, wie etwa im Spezialfall der metrischen Räume. — Obwohl im 3. Kapitel das Schwergewicht auf der Behandlung normierter linearer Räume liegt, werden auch die Grundzüge der Theorie der topologischen Vektorräume entwickelt, da diese gerade beim Studium der schwachen Topologien in linearen normierten Räumen und in den zu ihnen dualen Räumen wichtig ist. Ein Teil der Sätze über lineare normierte Räume benützt die Vollständigkeit, jedoch wird diese nur dann herangezogen, wenn sie zur Gewinnung von wesentlichen Resultaten wirklich benötigt wird. Gleichzeitig wird die spezielle Theorie der Skalarprodukt-Räume dargestellt, jedoch in einer solchen Form, daß der eigenständige Charakter klar hervortritt. — Ferner wird im Zusammenhang mit den topologischen Vektorräumen die Geometrie der konvexen Mengen und linearen Mannigfaltigkeiten untersucht und anschließend der Begriff der Halbnorm eingeführt und seine Bedeutung für die lokalkonvexen Räume aufgezeigt. Ein Abschnitt über metrische lineare Räume mit einem Satz über die Charakterisierung invarianter Metriken auf linearen Räumen beschließen das 3. Kapitel. — Das Hauptthema des 4. Kapitels ist das Studium stetiger linearer Operatoren in normierten linearen Räumen. Bez. der Voraussetzung der Vollständigkeit gilt das zum 3. Kapitel Gesagte. Nach Einführung des Raumes $[X, Y]$ der stetigen linearen Operatoren von X in Y (wobei X und Y topologische Vektorräume darstellen) wird im speziellen Fall, daß X ein Banach-Raum ist, die „Neumannsche Reihe“ für $(I - A)^{-1}$ ($A \in [X, X]$, $\|A\| < 1$) hergeleitet und auf Integralgleichungen 2. Art, speziell auf solche mit Q^2 -Kernen, angewandt. Zur Illustration der Bedeutung der linearen Integralgleichungen werden Anfangs- und Randwertprobleme bei linearen Differentialgleichungen auf (Volterrasche und Fredholm'sche) Integralgleichungen 2. Art zurückgeführt. Sodann werden die gerade für die Anwendungen in der Analysis wichtigen abgeschlossenen linearen Operatoren betrachtet und aus einer Reihe von einzelnen Resultaten ein zentraler Satz für den Fall metrischer linearer Räume gewonnen, aus dem viele der wichtigsten Sätze der Theorie der linearen Räume folgen. Insbesondere sei erwähnt das „closed-graph theorem“, dessen Wirksamkeit an Hand instruktiver Beispiele gezeigt wird, und das „Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit“, das überdies in mehreren, der jeweiligen Situation angepaßten Fassungen formuliert wird. Eine Anwendung auf die Frage der Lokal-Analytizität vektor-wertiger Funktionen einer komplexen Variablen demonstriert seine Zugkraft. Als unerläßliches Hilfsmittel erweist sich der Satz von Hahn und Banach, der hier für den Fall normierter Räume bewiesen wird. Als Illustration für seine direkte Anwendungsmöglichkeit wird mit seiner Hilfe die Existenz der Greenschen Funktion für das Dirichletsche Problem bewiesen. Im Zusammenhang mit dem Satz von Hahn und Banach wird die Frage der Reflexivität eines normierten linearen Raumes, seiner Unterräume und des zu ihm dualen Raumes erörtert. Von besonderer Bedeutung für lineare normierte Räume sind schwache Topologien, insbesondere der hiermit verknüpfte Begriff der Schwach-Kompaktheit, der es z. B. gestattet, die Reflexivität Banachscher Räume zu charakterisieren. Umfangreiche Untersuchungen sind den beschränkten linearen Operatoren und den zu ihnen konjugierten Operatoren gewidmet. Die erzielten Resultate, insbesondere die über Nullmannigfaltigkeiten, Wertebereiche und Inverse, werden — unter Benutzung von Sätzen über abgeschlossene Operatoren — zusammengefaßt in einem sehr klaren, äußerst instruktiven „Zustands-Diagramm“, aus dem alle Beziehungen, welche — im

Hinblick auf Wertevorrat sowie Existenz und Beschaffenheit der Inversen eines Operators — zwischen diesem und seiner Konjugierten bestehen, abzulesen sind. Von Interesse ist die Frage der Darstellung linearer Funktionale auf normierten linearen Räumen, die hier an Hand einiger wichtiger konkreter Räume beleuchtet wird. Die hier gewonnenen Resultate werden zusammen mit einem sehr umfassenden Theorem benutzt, um auch Darstellungssätze für beschränkte lineare Operatoren herzuleiten. Eine wichtige Rolle beim systematischen Studium linearer Operatoren spielen die Projektionen, die eng mit dem Begriff der direkten Summe linearer Mannigfaltigkeiten verknüpft sind. Im speziellen Falle des Skalarprodukt-Raumes gelangt Verf. im Zusammenhang mit dem Begriff der direkten Summe zu dem Begriff der paarweisen orthogonalen linearen Mannigfaltigkeiten, welcher seinerseits in enger Beziehung steht zu dem Darstellungssatz für lineare Funktionale in einem vollständigen Skalarprodukt-Raum und dem daraus resultierenden Satz über orthogonale Komplemente, dem sogenannten „Projektionssatz“. Sehr instruktiv sind die hieran geknüpften Betrachtungen über Lösbarkeit des Dirichletschen Problems mit einer kurzen Skizze der Hermann Weylschen Methode der Orthogonalprojektionen. — Das 5. Kapitel behandelt die Spektralanalyse linearer Operatoren. Es werden zunächst die Resolventenmenge und das Spektrum eines (nicht notwendig beschränkten) linearen Operators eingeführt und in Verbindung gebracht mit der Resolvente eines Operators. Die erzielten Resultate werden dann zur Untersuchung beschränkter Operatoren benutzt. Im Hinblick auf spätere Betrachtungen erweist es sich als notwendig, die Punkte des Spektrums noch zu klassifizieren, und zwar geschieht das mittels der im 4. Kapitel eingeführten „Zustände“ eines Operators. Für nachfolgende Untersuchungen wird der Begriff der Reduzibilität eines Operators eingeführt und mit der Frage der „Zustände“ und des Spektrums eines Operators verknüpft. — Nun können unter Benutzung des Begriffes der Kompaktheit (Vollstetigkeit) eines linearen Operators große Teile der Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen 2. Art auf Gleichungen in Banach-Räumen übertragen werden. Zu diesem Zwecke werden zunächst der „ascent“ und der „descent“ eines Operators eingeführt und die darüber gewonnenen Sätze auf $\lambda I - T$ angewandt, für den Fall, daß T kompakt ist. Man gelangt so zu den Riesz-Schauderschen Resultaten. Unter Beachtung der Tatsache, daß die Resolvente R_λ eines abgeschlossenen linearen Operators (mit Definitionsbereich und Wertevorrat in einem komplexen Banach-Raum X) eine analytische Funktion von λ ist, werden nun wichtige Resultate mittels Kontur-Integralen in der komplexen Ebene gewonnen und damit ein Operator-Kalkül begründet; genannt sei insbesondere ein sich auf die Relation $f(T) = \frac{1}{2\pi i} \oint f(\lambda) R_\lambda d\lambda$ stützender Satz, der einen Homomorphismus der Algebra gewisser Äquivalenzklassen lokalanalytischer Funktionen in die Banach-Algebra $[X, X]$ der beschränkten linearen Operatoren liefert und dessen Verallgemeinerung für abgeschlossene Operatoren. Erwähnt sei ferner die instruktive Anwendung des Operator-Kalküls zur Lösung eines Anfangswertproblems bei der linearen Differentialgleichung $y^{(n)}(s) + a_1 y^{(n-1)}(s) + \dots + a_n y(s) = x(s)$. Durch Aufspaltung des (im Falle nicht beschränkter Operatoren) „erweiterten“ Spektrums in „Spektralmengen“ gelingt es, einen Operator vollständig zu reduzieren durch Konstruktion von passenden, mit den Spektralmengen assoziierten Projektionsoperatoren. Auch hier bilden wieder Anwendungen auf Operatoren in l^p und $C[0, 2\pi]$ eine gute Illustration der vorangehenden Betrachtungen. Es werden sodann — unter Heranziehung des sogenannten „Spektralabbildungssatzes“ — isolierte Punkte des Spektrums, speziell Pole der Resolvente, untersucht. Das Kapitel schließt mit einem Abschnitt über Operatoren, deren Resolvente eine „rationale“ Funktion ist; hierunter fällt die determinantenfreie Behandlung für den Fall, daß der betrachtete Vektorraum endlich-dimensional ist. — Das 6. Kapitel bringt die Standard-Theorie der selbst-adjungierten, normalen

und unitären Operatoren im Hilbert-Raum. Die Theorie der kompakten Operatoren wird entwickelt, ohne die Vollständigkeit des Raumes zu benutzen; sie wird angewandt auf die Hilbert-Schmidtsche Theorie der Integralgleichungen mit symmetrischem Kern und die Theorie der klassischen Differentialoperatoren mit kompakter Resolvente, insbesondere auf Fragestellungen, die mit der Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichung zusammenhängen. Für die Spektralanalyse der beschränkten selbstadjungierten und unitären Operatoren wird der Rieszsche Darstellungssatz für linearstetige Funktionale (auf einem Raum stetiger Funktionen) herangezogen. Eine kurze Diskussion der Spektralzerlegung unbeschränkter (selbstadjungierter) Operatoren — mittels der Cayleyschen Transformierten — beschließt das 6. Kapitel. — Das 7. (Schluß-) Kapitel behandelt den Zusammenhang zwischen Integration und linearen Funktionalen. Es kann als Vorbereitung angesehen werden für das Verständnis von Entwicklungen in der Theorie der Banach-Algebren, die sich im Anschluß an die Spektraldarstellungen von Operatoren ergeben. Zunächst wird (in expositorischer Form) die Lebesguesche Theorie verallgemeinert. Sodann wird der Raum L^p behandelt und im Anschluß daran der wichtige Darstellungssatz für linearstetige Funktionale auf L^p bewiesen. Der nächste Teil des 7. Kapitels ist dem Studium von Maßen in lokalkompakten Hausdorff-Räumen und der Darstellung linear-stetiger Funktionale, die auf gewissen Räumen stetiger Funktionen erklärt sind, gewidmet. Wichtig für das folgende ist der normierte lineare Raum $C_\infty(T)$ aller auf einem lokalkompakten Hausdorff-Raum T stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. Eine Diskussion der sowohl positiver als auch negativer Werte fähiger („signed“) Borel-Maße und der Vektorverbände führt zu dem Fundamentalsatz, der den normierten, zu $C_\infty(T)$ dualen Raum identifiziert mit dem Vektorverband der endlichen regulären „signed“ Borel-Maße auf T . Das Kapitel schließt mit Darstellungssätzen für linear-stetige Funktionale, die erklärt sind auf Räumen beschränkter bzw. „wesentlich“ beschränkter Funktionen. Hierzu werden Integrale benötigt, die bez. spezieller endlichadditiver Mengenfunktionen („charges“) gebildet sind. — Jedem Kapitel ist ein ausführlicher Literaturhinweis beigegeben. *H. Pachale.*

Plans, Antonio: Ein Axiomensystem für den Ring der reellen beschränkten unendlichen Matrizen. Collect. Math. 9, 35—40 (1957) [Spanisch].

L'A. démontre que l'anneau \mathfrak{M} des matrices A réelles bornées peut être défini par le système suivant d'axiomes: I. si, dans chaque ligne (resp. chaque colonne) de A , tous les éléments sont nuls, excepté au plus un seul élément, qui dans ce cas est égal à 1, alors $A \in \mathfrak{M}$; II. si $A \in \mathfrak{M}$, alors $\lambda A' \in \mathfrak{M}$ pour tout nombre réel λ ; III. si $A, B \in \mathfrak{M}$, on a aussi $AB \in \mathfrak{M}$ (les éléments c_{ik} du produit étant définis comme des séries $\sum_j a_{ij} b_{jk}$ absolument convergentes); IV. si $A'A \in \mathfrak{M}$, alors $A \in \mathfrak{M}$; V. l'ensemble \mathfrak{M} est maximal par rapport aux axiomes I—IV. *J. Sebastião e Silva.*

Plans, Antonio: Eine Verbandsstruktur des Ringes der reellen beschränkten unendlichen Matrizen. Collect. Math. 9, 87—104 (1957) [Spanisch].

L'A. commence par définir dans l'anneau \mathfrak{M} des matrices réelles bornées (voir la revue ci-dessus) deux relations d'équivalence ϱ_c et ϱ_l : deux matrices sont dites équivalentes selon ϱ_c (resp. ϱ_l) si elles ne diffèrent que par l'ordre des colonnes (resp. lignes) ou par des colonnes (resp. lignes) de zéros; le quotient de \mathfrak{M} par ϱ_c est désigné par \mathfrak{M}_c et la classe d'équivalence déterminée par une matrice A est noté $\{A\}_c$ (conventions analogues pour la relation ϱ_l). Cela étant, l'A. définit dans \mathfrak{M}_c des notions naturelles de réunion, \cup , et d'intersection, \cap , par rapport auxquelles \mathfrak{M}_c est une algèbre de Boole (et de même pour \mathfrak{M}_l). Ensuite, il définit le produit $\{A\}_c B = \{AB\}_c \in \mathfrak{M}_c$ de $\{A\}_c \in \mathfrak{M}_c$ par $B \in \mathfrak{M}$, et une notion correspondante d'idéal; l'A. démontre qu'un ensemble $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_c$ est un „idéal à droite“ de \mathfrak{M}_c , si, et seulement si, quels que soient $\{A\}_c, \{B\}_c \in \mathfrak{M}$, et $M, N \in \mathfrak{M}$, on a encore $\{A\}_c M + \{B\}_c N \in \mathfrak{M}$ (définitions et résultats analogues pour \mathfrak{M}_l). Il en résulte des notions correspondantes

de „idéal engendré par un sous-ensemble quelconque“ de \mathcal{A}_c ou \mathcal{A}_l , de „idéal principal“, etc. Dans chacun des cas, l'ensemble de tous les idéaux est un réticulé, avec un premier élément et un dernier élément. L'A. étudie en détail une classe importante d'idéaux, qu'il appelle „idéaux fermés“, et qui permet de faire une classification des matrices bornées, coïncidant essentiellement avec celle de Toeplitz.

J. Sebastião e Silva.

Komura, Yukio: On a theorem of A. Grothendieck. Sci. Papers College general Educ. Univ. Tokyo 7, 169—170 (1957).

Soient E un espace vectoriel localement convexe, \mathfrak{S} un recouvrement filtrant croissant de E par des parties convexes équilibrées bornées. Alors la complétion du dual de E pour la topologie de la \mathfrak{S} -convergence est l'ensemble des formes linéaires sur E dont les restrictions aux éléments de \mathfrak{S} sont continues. [Grothendieck (ce Zbl. 34, 374) a obtenu la même conclusion sans supposer \mathfrak{S} filtrant croissant, mais en supposant les éléments de \mathfrak{S} fermés.]

J. Dixmier.

Hukuhara, Masuo et Yasutaka Sibuya: Théorie des endomorphismes complètement continus. II. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I 7, 511—525 (1958).

Suite d'un mémoire antérieur (ce Zbl. 77, 309). Rappelons que les A.A. s'intéressent aux espaces vectoriels E dans lesquels une topologie est définie par la donnée de suites convergentes. Dans l'espace des endomorphismes continus de E , ils définissent une topologie du même type, ce qui leur permet d'étudier les propriétés analogues à la continuité de la résolvante, etc. Ils adaptent aussi à leur point de vue la notion d'espaces vectoriels en dualité et les propriétés des endomorphismes transposés, en particulier dans le cas où ceux-ci sont complètement continus.

J. Dixmier.

Weston, J. D.: A topological characterization of L -spaces. J. London math. Soc. 32, 473—476 (1957).

Ein abstrakter L -Raum kann charakterisiert werden als ein Banach-Raum, der teilweise geordnet ist als Vektorverband, derart, daß der positive Kegel abgeschlossen ist und daß gilt: (1) $x \leq |y| \curvearrowright \|x\| \leq \|y\|$, (2) $x \geq 0, y \geq 0 \curvearrowright \|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Verf. gibt eine Kennzeichnung dieser Räume durch topologische Bedingungen, indem er zeigt: Die Topologie eines Hausdorffschen Vektorverbandes kann dann und nur dann durch eine Norm $\|x\|$ gegeben werden, für die (1) und (2) gilt, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind: (3) $|x|$ ist eine stetige Funktion von x in einer Umgebung des Nullpunktes. (4) Es existiert ein stetiges lineares Funktional f , so daß die Menge $F = \{x : x \geq 0, f(x) = 1\}$ beschränkt und nichtleer ist. Ein L -Raum ist also ein vollständiger, Hausdorffscher Vektorverband mit abgeschlossenem positiven Kegel, für den (3) und (4) gilt. *H. G. Tillmann.*

Orlicz, W.: Contribution to the theory of Saks spaces. Fundamenta Math. 44, 270—294 (1957).

Dans la section 1, l'A. complète des résultats antérieurs (ce Zbl. 41, 436; 67, 89) sur les espaces de Saks. Par exemple, il étudie les espaces de Saks X_s possédant la propriété suivante: si U est une application linéaire de X dans un espace normé Y et si, pour toute forme linéaire continue η sur Y , la forme linéaire $\eta \circ U$ est continue sur X_s , alors U est continue sur X_s . Soit M^+ l'espace des fonctions mesurables bornées x sur $(-\infty, +\infty)$ telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^p dt < +\infty$, dont la boule unité M_A^p pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ est de manière naturelle un espace de Saks; dans la section 2, l'A. donne par exemple les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence faible sur M_s^p d'une suite de formes linéaires continues. Exemple de résultat de la section 3: soit (y_n) une suite d'éléments de $L^p(-\infty, +\infty)$; si $\sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n$ converge

en mesure sur tout intervalle compact quels que soient les t_n égaux à 0 ou à 1. alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ est commutativement convergente dans $L^p (-\infty, +\infty)$.

J. Dixmier.

Fernández Avila, Francisco Javier: Eine Verallgemeinerung der Vektorräume mittels des Stieltjes-Integrals. I—IV. *Revista mat. Hisp.-Amer.* **17**, 22—37. 150—160, 209—223, 278—290 (1957) [Spanisch].

Verf. bemerkt, daß die endlich- und unendlich-dimensionalen separablen Hilbert-Räume Spezialfälle des Raumes $L^2(\mu)$ der quadratisch-integrierbaren Funktionen sind, wenn hierbei μ ein positives Radonsches Maß auf einem Intervall der Zahlengeraden ist, und entwickelt die Theorie dieser Räume in aller Breite. Moderne Lehrbücher über Funktionalanalysis und Maßtheorie, in welchen diese Dinge unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen entwickelt werden, sind im Literaturverzeichnis nicht aufgeführt. Die eine Hälfte des einleitenden Theorems auf S. 25 ist falsch, wie leicht angebbare Beispiele zeigen.

H. Bauer.

Vinograd, R. É.: Conjugate Lyapunov norms. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **119**, 415—417 (1958) [Russisch].

Bogdanov (this Zbl. **80**, 105) introduced Lyapunov norms (λ -norms) in abstract linear spaces. The present author calls two λ -norms $\omega(x)$, $\gamma(x)$, defined on conjugate Euclidean spaces E^n , \bar{E}^n , conjugate λ -norms if $\omega(x_i) + \gamma(z_i) \geq 0$ for all pairs of conjugate bases $\{x_i\}$, $\{z_i\}$ of E^n , \bar{E}^n . He states without proof a number of theorems for such norms and cites, as illustration, the case of a system $x' = A(t)x$ and its adjoint $z' = -A^*(t)z$.

H. A. Antosiewicz.

Taylor, Angus E.: The norm of a real linear transformation in Minkowski space. *Enseignement math.*, II. Sér. **4**, 101—107 (1958).

Cette note est une mise au point de quelques résultats indiqués brièvement par M. Riesz [*Acta Math.* **49**, 465—497 (1927)]. Soient $l^p(n)$ l'espace normé (réel) d'éléments $x = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ et norme $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^p\right)^{1/p}$, A une application linéaire de $l^p(n)$ dans $l^q(m)$. Désignons par $l^p(n)$ et $l^q(m)$, respectivement, les complexifiés de $l^p(n)$ et $l^q(m)$ et par \bar{A} le prolongement linéaire de A à $l^p(n)$. On montre que

$$\|\bar{A}\| = \|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_p},$$

moeynnant le lemme suivant: s et t étant des variables réelles, fixons $a, b \in l^p(n)$ linéairement indépendants et $c, d \in l^q(m)$ non tous les deux nuls; si $0 < p < q$, la fonction $F(s, t) = \|e + (s + it)d\|_q / \|a + (s + it)b\|_p$ ne peut pas avoir de maximum relatif au point $s = 0$, $t = 1$.

A. Pereira Gomes.

Ringrose, J. R.: Complete continuity conditions on linear operators. *Proc. London math. Soc.*, III. Ser. **8**, 343—356 (1958).

The paper deals with the interrelations of the notion of compact operators to the complete continuity. Let E, F be linear topological spaces (non-necessarily locally convex), let A be a linear continuous operator from E to F . The operator A is called precompact if it carries a certain neighbourhood into a precompact set: if it maps a neighbourhood into a relatively compact set, A is called compact. If $A(S)$ is precompact whenever S is bounded, then A is called boundedly precompact. A is called completely continuous if it is continuous from E equipped with the weak topology to F . Given a set $V \subset E$ let $\sigma_V(E)$ denote the topology on E determined by the polar sets of finite sets of continuous linear functionals bounded on V . The operator A is called locally completely continuous if a neighbourhood V exists such that A is continuous from V equipped with the topology $\sigma_V(E)$ to F . A is called boundedly completely continuous if, for every bounded set S , the restriction of A to S

equipped with the topology induced by the weak topology is continuous. The space F is called completely Hausdorff if its completion is a Hausdorff space with respect to the weak topology. The following results are proved. (1) Let F be locally convex, then A is completely continuous if and only if the weak topology of F and its initial topology are equivalent on the range of A . (2) If A is boundedly completely continuous, A is boundedly precompact. (3) If F is completely Hausdorff and A is boundedly precompact, then A is boundedly completely continuous. (4) If A is locally completely continuous, it is precompact. (5) If the completion of F is a Hausdorff space with respect to the weak topology and A is compact, then A is locally completely continuous. (6) Let F be completely Hausdorff, then A is locally completely continuous if and only if it is precompact. (7) If E, F are Banach spaces, then A is compact if and only if it is continuous as operator from the unit ball under the weak topology. (8) Let T be a linear operator from F to a linear topological space G , let G be bounded on a certain open set, and let A be precompact. Then the superposition $A' T'$ of adjoint operators is a compact linear operator from G' to E' . (9) Let A be precompact from E to E : then $(A')^2$ is compact. *A. Alexiewicz.*

Kurepa, Svetozar: On the (C)-property of functions. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. **13**, 33—38 (1958).

Es seien R ein Hilbertscher Raum und B die Menge aller beschränkten linearen Transformationen von R in R . Es bezeichne Φ eine Funktion, die auf einem abgeschlossenen Intervall $\delta = [\alpha, \beta]$ der Zahlengerade definiert ist mit Werten in B . Φ heißt schwach stetig auf einer Teilmenge S von δ bzw. meßbar auf δ , wenn das skalare Produkt $(\Phi(t)f, g)$, für jedes Paar f, g von R , stetig auf S bzw. Lebesguemeßbar auf δ ist. Man sagt: Φ besitzt die (C)-Eigenschaft auf δ , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine perfekte Menge $P \subseteq \delta$ existiert, derart daß: (a) $m P > m \delta - \varepsilon$ und (b) Φ schwach stetig auf P ist. Ist R eindimensional, so ist die (C)-Eigenschaft die bekannte Luzinsche (C)-Eigenschaft [N. N. Luzin, C. r. Acad. Sci., Paris, **154**, 1688—1690 (1912)]. Verf. verallgemeinert einige Sätze, die Luzin bereits für komplexwertige Funktionen bewiesen hat [N. N. Luzin, Gesammelte Werke Band I (1953; dies. Zbl. **51**, 41)]. Weiter zeigt er: für einen separablen Hilbertschen Raum ist die (C)-Eigenschaft einer Funktion charakteristisch für ihre Meßbarkeit: ist dagegen der Raum nicht separabel, so existiert stets eine meßbare Funktion, die die (C)-Eigenschaft nicht besitzt. *A. Mallios.*

Arsove, Maynard G.: Proper bases and linear homeomorphisms in spaces of analytic functions. Math. Ann. **135**, 235—243 (1958).

In this paper the author considers the relation between proper bases and linear homeomorphisms in the space of power series with a finite radius of convergence and solves problems similar to those already discussed by him in his two previous papers for the space of entire functions [this Zbl. **77**, 314; Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **9**, 40—54 (1958)]. For a fixed $R > 0$, F denotes the space of all power series in z with radius of convergence not less than R topologised by uniform convergence on compact subsets of the circle $|z| < R$. The space F is a locally convex complete metric space. A sequence (α_n) of functions of F is said to be linearly independent if whenever $\sum c_n \alpha_n$ converges to zero (the zero function) in F , $c_n = 0$ for $n = 0, 1, \dots$. If F_0 is the set of all functions representable uniquely as $\sum c_n \alpha_n$, the sequence (α_n) is called a basis in F_0 . The basis (α_n) is said to be proper if whenever $\sum c_n \alpha_n$ converges so does $\sum c_n \delta_n$ ($\delta_n = z^n$) and conversely. If $M_r(f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, the author shows that a basis (α_n) of the subspace F_0 is proper if and only if (i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} [M_r(\alpha_n)]^{1/n} < R$ for $r < R$ and (ii) $\lim_{r \rightarrow R} \liminf_{n \rightarrow \infty} [M_r(\alpha_n)]^{1/n} \geq R$. The second main result in the paper is that if T is a linear homeomorphic mapping of F into itself, then $T(\delta_n)$ is a proper basis in some closed subspace F_0 of F and conversely any proper basis in a closed subspace F_0 of F determines a linear homeo-

morphism of F onto F_0 such that $T(\delta_n)$ constitutes this proper basis. Results similar to these are proved for the space of all power series $\sum a_n z^n$ with $\sum a_n R^n$ convergent — the space being a Banach space with this expression as the norm.

V. Ganapathy Iyer.

Arsove, Maynard G.: Similar bases and isomorphisms in Fréchet spaces. Math. Ann. **135**, 283—293 (1958).

The notion of proper bases discussed in the preceding review and the papers referred to therein are now considered in this paper in a general setting. By a Fréchet space is meant a metrisable, complete, locally convex, topological linear space so that the topology could be specified by a sequence of semi-norms. Let U and V be Fréchet spaces. A sequence (y_n) of V is said to be similar to the sequence (x_n) of U if the convergence of the series $\sum a_n y_n$ is equivalent to the convergence of the series $\sum a_n x_n$ for every sequence (a_n) of scalars. A sequence (x_n) in U is said to be a basis in U if every element x of U can be uniquely represented as a convergent series $x = \sum a_n x_n$. The main result of this paper is that if T is an isomorphism of U onto V (that is a linear homeomorphism of U onto V), then for every basis (x_n) of U , $y_n = T x_n$ is a similar basis in V and conversely to every basis (y_n) of V similar to (x_n) there is an isomorphism T of U onto V such that $y_n = T x_n$. In the course of the proof, conditions for similar bases are obtained in terms of the semi-norms defining the topologies in U and V . If, in the result above, one considers a linear homeomorphic mapping of U into V (instead of onto V), the assertions remain true with V replaced by closed subspaces of V . The author next introduces the notions "absolutely convergent basis" and "absolutely similar sequences" and proves that isomorphisms preserve these notions. An absolutely convergent basis (x_n) in a Fréchet space U being a basis such that if $x = \sum a_n x_n$ the series of semi-norms $\sum u(a_n x_n)$ converges for every semi-norm u defining the topology of U . A similar definition holds good for absolutely similar sequences in two Fréchet spaces. The paper concludes with some remarks when U and V are Banach spaces and an example to show that absolutely similar sequences need not be similar though this is true when the sequences are also absolutely convergent bases.

V. Ganapathy Iyer.

Wada, Junzo: Stonian spaces and the second conjugate spaces of AM spaces. Osaka math. J. **9**, 195—200 (1957).

Soit X un espace compact. S'il existe un isomorphisme latticiel isométrique de $C(X)$ (espace des fonctions continues sur X) sur le bidual d'un AM -espace, X est hyperstonien. Si de plus toute famille de parties ouvertes et fermées non vides de X mutuellement disjointes est dénombrable, X est la compactification de Stone-Čech d'un espace discret dénombrable.

J. Dixmier.

Kaplan, Samuel: On the second dual of the space of continuous functions. Trans. Amer. math. Soc. **86**, 70—90 (1957).

Gegenstand der Untersuchung ist die verbandsalgebraische Struktur des topologischen Biduals M des (wie üblich normierten) Banach-Raumes C der stetigen reellen Funktionen auf einem kompakten Raum X , also des topologischen Duals des Raumes L der Radonschen Maße auf X (normiert durch $\|\mu\| = \int d|\mu|$), sowie ferner die Beziehung zwischen der durch die Dualität auf $M \times L$ definierten Bilinearform $f, \mu \mapsto \int f d\mu$ und dem üblichen Integral $\int f d\mu$ für integrierbare beschränkte Funktionen auf X . Der Raum C kann und soll hierbei als linearer Unterraum von M aufgefaßt werden: C , L und M sind bezüglich der üblichen Ordnungsrelationen vollständige Vektorverbände und zugleich Banach-Verbände. Eine entscheidende Rolle für das Studium von M spielt eine Zerlegung $M = M_0 + M_1$, bezüglich welcher M zugleich direkte topologische und ordnungstreue Summe ist: und zwar ist die Zerlegung $M = M_0 + M_1$ orthogonal zur Zerlegung von L in das (Rieszsche) Band L_0

der atomaren und das Band L_1 der diffusen Maße, genauer: $M_0 = (L_1)^\perp$ und $M_1 = (L_0)^\perp$. Das Band M_0 ist hierbei als normierter geordneter Vektorraum isomorph zum Raum aller beschränkten reellen Funktionen auf X , wird aber nicht mit diesem identifiziert, da die Restriktion des natürlichen Isomorphismus auf C nicht mit dem Einbettungsisomorphismus von C in M identisch ist. Somit entspricht jeder beschränkten reellen Funktion f auf X eine Restklasse mod M_1 von Elementen aus M . Es wird gezeigt, daß jeder solchen Funktion f zwei Elemente f^* und f_* dieser Restklasse zugeordnet werden können derart, daß $\langle f^*, \mu \rangle$ bzw. $\langle f_*, \mu \rangle$ stets das Ober- bzw. Unterintegral von f bezüglich eines jeden $\mu \in L$ ist. Die beschränkten Funktionen f auf X mit $f^* = f_*$ sind genau die universell integrierbaren (beschränkten) Funktionen auf X ; der Vektorraum dieser Funktionen besitzt vermöge der Abbildung $f \rightarrow f^* = f_*$ ein in M gelegenes isomorphes Bild U . Durch diese Betrachtung erfahren zwei Phänomene der Integrationstheorie eine Klärung. Erstens: Die üblichen Konvergenzsätze der Form „ $\lim \int f^n d\mu = \int \lim f^n d\mu$ “ (wie z. B. der Konvergenzsatz von Lebesgue) gelten i. a. nur für Folgen und nicht für beliebige gerichtete Systeme (f^α) . Anders in M : Aus $\lim f^\alpha = f$ folgt stets $\lim \langle f^\alpha, \mu \rangle = \langle f, \mu \rangle$, sofern das gerichtete System (f^α) in M im Sinne der Ordnungstopologie konvergiert. — Zweitens: Es ist auf X jede beschränkte reelle Funktion Limes (im Sinne der Ordnungstopologie) eines gerichteten Systems von Funktionen aus C . Also können die integrierbaren beschränkten Funktionen nicht als Limiten stetiger Funktionen erklärt werden. Anders in M : Ein Element $f \in M$ liegt genau dann in U , wenn ein gerichtetes System von Funktionen aus C im Sinne der Ordnungstopologie gegen f konvergiert. — Den Schluß der Arbeit bildet der Nachweis, daß der Raum C in M dicht liegt bezüglich der sog. Dieudonné-Topologie auf M , welche durch das System der Halbnormen $\|f\|_\mu = \langle f, |\mu| \rangle$ ($\mu \in L$) definiert ist. Ferner wird skizziert, wie für ein gegebenes Maß $\mu \in L$ eine Integrationstheorie in M und nicht wie sonst üblich in M_0 entwickelt werden kann. — Bezüglich weiterer Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Es wäre interessant zu wissen, inwieweit sich die Resultate auf beliebige lokal-kompakte Räume übertragen lassen.

H. Bauer.

Isbell, J. R.: Some remarks concerning categories and subspaces. Canadian J. Math. 9, 563—577 (1957).

Eine (abstrakte) Kategorie („category“) ist nach Eilenberg-MacLane [Trans. Amer. math. Soc. 58, 231—294 (1945)] eine Menge A (genauer: Klasse, die keine Menge zu sein braucht; doch wird in der vorliegenden Arbeit zur Vermeidung technischer Komplikationen A stets als Menge vorausgesetzt) mit einer zweistelligen, eindeutigen, aber nicht notwendig unbeschränkt ausführbaren Operation $(f, g) \rightarrow fg$ ($f, g, fg \in A$), die folgenden Bedingungen genügt: (a) Zu jedem $f \in A$ existieren $i, j \in A$ so, daß if und fj existieren und für alle $x \in A$ (1) aus der Existenz von ix (bzw. jx) stets $ix = x$ (bzw. $jx = x$) und (2) aus der Existenz von xi (bzw. xj) stets $xi = x$ (bzw. $xj = x$) folgen: (b) (i) existieren fg und gh , so auch $(fg)h$ und $f(gh)$ und es ist $(fg)h = f(gh)$, (ii) existiert $(fg)h$, so gh , (iii) existiert $f(gh)$, so fg . Der erste Teil der Arbeit enthält meist recht einfache Aussagen über Homomorphismen und Isomorphismen von Kategorien sowie ihre Kongruenzrelationen und Restklassengebilde. Eine konkrete Kategorie nennt Verf. eine Kategorie, deren Elemente eindeutige Abbildungen sind und deren Operationen die Hintereinanderausführung dieser Abbildungen ist. Ein Element f einer Kategorie, zu dem ein Element f^{-1} derart existiert, daß die Ausdrücke ff^{-1} und $f^{-1}f$ definiert sind und den Bedingungen (1) und (2) genügen, heißt ein Isomorphismus. Eine eindeutige Abbildung einer Menge X in eine Menge $Y \supseteq X$, die für alle $x \in X$ der Bedingung $f(x) = x$ genügt, heißt eine Inklusionsfunktion. Schließlich nennt Verf. ein Element f einer konkreten Kategorie, das in der Form $f = ghi$ darstellbar ist, wo i eine Inklusionsfunktion ist und g, h Isomorphismen sind, eine Injektion und untersucht im zweiten Teil die Frage, unter

welchen Voraussetzungen sich eine (abstrakte) Kategorie so als konkrete Kategorie darstellen läßt, daß eine vorgegebene Teilmenge I von A in das System der Inklusionsfunktionen oder Injektionen übergeht. Im dritten Teil wird durch drei zusätzliche Axiome der Begriff der Kategorie zu dem der Bikategorie („bicategory“) eingeengt und an verschiedenen Beispielen diskutiert.

G. Bruns.

Isbell, J. R.: Algebras of uniformly continuous functions. *Ann. of Math.*, II. Ser. 68, 96—125 (1958).

Verf. untersucht die Frage, inwieweit sich die bekannten Sätze über die Algebra der stetigen Funktionen auf einem kompakten T_2 -Raum auf Algebren von Funktionen auf allgemeineren Räumen übertragen lassen. Folgende Eigenschaften einer Algebra A von reellen Funktionen auf einer Menge X erweisen sich hierbei als wesentlich: (a) Ist $f_1, f_2, \dots, f_n \in A$ und g eine stetige reellwertige Funktion auf dem E_n , so ist die durch $h(x) = g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ erklärte Funktion h in A enthalten, (b) ist $f \in A$ und stets $f(x) \neq 0$, so $1/f \in A$, (c) A enthält den Grenzwert jeder gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen aus A . Unter Voraussetzung einer oder mehrerer dieser Bedingungen ergeben sich Analoga zum Approximationssatz von Weierstraß-Stone und zum Fortsetzungssatz von Tietze auf allgemeineren (lokal-kompakten, σ -kompakten, uniformen) Räumen, woraus u. a. Aussagen über die Stone-Čech-Kompaktifizierung gewisser Erweiterungen eines Raumes folgen. Weiter enthält der erste Teil der Arbeit Sätze über die Restklassenalgebra einer Funktionenalgebra nach einem maximalen Ideal sowie einige z. T. recht komplizierte Gegenbeispiele. Im zweiten Teil führt Verf. (eine entsprechende Begriffsbildung bei Mac Lane modifizierend) den Begriff der Kategorie (genauer: konkreten Kategorie; vgl. Isbell, vorstehendes Referat) ein. Das ist eine Klasse von Mengen und (eindeutigen) Abbildungen dieser Mengen ineinander, die gewissen natürlichen Bedingungen genügen. Eine Kategorie mit zwei ausgezeichneten und axiomatisch näher festgelegten Unterkategorien, deren Abbildungen Projektionen bzw. Injektionen genannt werden, heißt eine Bikategorie („bicategory“). Zwischen Kategorien besteht eine natürliche Dualität. Die Beziehungen zwischen Räumen und Algebren reeller Funktionen werden im Sinne dieser abstrakten Begriffsbildungen gedeutet, wobei sich im Falle gewisser vollständiger Räume besonders durchsichtige Verhältnisse ergeben.

G. Bruns.

Tamano, Hisahiro: On rings of real valued continuous functions. *Proc. Japan Acad.* 34, 361—366 (1958).

The paper contains a deal of theorems characterizing a topological space by means of the algebraic properties of the ring of the real-valued continuous functions defined on this space. Given a completely regular space X , let $C(X)$ denote the ring of all real-valued continuous functions on X . The principal results are the following. (1) Every closed subspace of a Q -space (in the sense of Hewitt) is a Q -space. (2) The space X is locally compact if the intersection of all free ideals in $C(X)$ is a free ideal. (3) The space X is paracompact if and only if every free ideal is locally finite. (4) Let the discrete space of potency equal to the potency of the set of all connected components of X be a Q -space. Then X is a Q -space if and only if each maximal ideal is star-finite. (5) The space X is the topological sum of Lindelöf spaces if and only if every free ideal is star-finite. (6) X is complete if and only if every maximal ideal is locally finite. (7) X is a Q -space if and only if it is complete for the weakest uniform topology with respect to which every element of $C(X)$ is uniformly continuous. (8) X has the unique uniform topology if and only if $C(X)$ has at most one free maximal ideal \mathfrak{M} ; in this case \mathfrak{M} is necessarily real whence X is pseudocompact.

A. Alexiewicz.

Sakai, Shōichirō: On topological properties of W^* -algebras. *Proc. Japan Acad.* 33, 439—444 (1957).

1^{re} partie. Soient A une C^* -algèbre, \tilde{A} le dual de A , V un sous-espace de \tilde{A} fermé pour la norme et stable pour les transposées des multiplications à droite et à gauche dans A . Alors, tout élément de V est combinaison linéaire d'éléments ≥ 0 de V . Soient M une algèbre de von Neumann, M_* l'espace des formes linéaires ultra faiblement continues sur M ; alors, M_* est $\sigma(M_*, M)$ -séquentiellement complet. Il y a des connections avec un article de Grothendieck [J. Math. pur appl., IX. Sér. 36, 97—108 (1957)]. 2^{me} partie. Soient M_1 et M_2 des algèbres de von Neumann avec M_1 purement infinie. Alors l'algèbre de von Neumann $M_1 \otimes M_2$ est purement infinie. (On utilise le fait que si e est un projecteur non nul de M_1 , l'application $T \rightarrow T^*$ n'est pas fortement continue sur les boules de $e M_1 e$). J. Dixmier.

Tomiyama, Jun: On the projection of norm one in W^* -algebras. Proc. Japan Acad. 33, 608—612 (1957).

Concernant le sujet indiqué dans le titre, l'A. donne de nombreux résultats dont voici des exemples. Théorème 1: soient M une C -algèbre à élément unité, N une C^* -sous-algèbre, π une projection de norme 1 de M sur N . Alors: 1. π est croissant 2. $\pi(a x b) = a \pi(x) b$ pour $a, b \in N$; 3. $\pi(x)^* \pi(x) \leq \pi(x^* x)$ pour tout $x \in M$. Théorème 5: si de plus M est une AW^* -algèbre, alors N est une AW^* -algèbre. Théorème 4: si de plus M est une W^* -algèbre et si π est injectif sur les éléments ≥ 0 de M , N est une W^* -algèbre. J. Dixmier.

Yen, Ti: Isomorphism of AW^* -algebras. Proc. Amer. math. Soc. 8, 345—348 (1957).

Soient M, N deux AW^* -algèbres sans composantes de type I_n ($n = 1, 2, \dots$). Soit ϱ un isomorphisme algébrique du groupe unitaire de M sur le groupe unitaire de N . Soient M_p, N_p les ensembles de projecteurs de M, N . Pour tout $e \in M_p$ définissons $\theta(e) \in N_p$ par $\varrho(1 - 2e) = 1 - 2\theta(e)$. Alors, θ est un orthoisomorphisme de la lattice M_p sur la lattice N_p . Ceci étend un résultat de Dye (ce Zbl. 64, 110). J. Dixmier.

Hille, Einar: On roots and logarithms of elements of a complex Banach algebra. Math. Ann. 136, 46—57 (1958).

Let \mathfrak{B} be a complex Banach algebra with unit element e . Let $k \geq 2$ and let $x \in \mathfrak{B}$. The spectrum $\sigma(x)$ of x is said to be irrotational mod $2\pi/k$ if $\sigma(x) \cap \omega^j \sigma(x)$ is empty for $j = 1, 2, \dots, k-1$ where $\omega = \exp(2\pi i/k)$. Now let a be a regular element of \mathfrak{B} and let $x_1^k = x_2^k = a$. If the spectrum of x_1 is irrotational, the following is proved: (1) x_1 and x_2 commute and there exist idempotents e_1, \dots, e_k which commute with x_1 and x_2 and such that

$$e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha, \quad \sum e_\alpha = e, \quad \sum \omega^\alpha e_\alpha = x_1 x_2^{-1}.$$

The proof is based on considering the operator $S(x_1)$ on \mathfrak{B} defined by $S(x_1)x = x_1^{-1} x x_1$. By means of the general implicit function theorem the following theorem is proved: (2) if a is regular, $b^k = a$ and $\sigma(b)$ is irrotational mod $2\pi/k$ then there exists a neighbourhood of a all points of which are k -th powers of elements in a neighbourhood of b . The assumption of irrotationality may be further weakened. The second part is devoted to analogous problems concerning logarithms. The spectrum $\sigma(y)$ of a $y \in \mathfrak{B}$ is said to be incongruent mod $2\pi i$ if $\sigma(y) \cap \sigma(y) + 2k\pi i$ is empty for every k . The author proves: (1') suppose that $\exp y_1 = \exp y_2$ and that $\sigma(y_1)$ is incongruent mod $2\pi i$. Then y_1 and y_2 commute and there exist idempotents e_1, \dots, e_n commuting with y_1 and y_2 and integers k_1, \dots, k_n such that

$$y_1 - y_2 = 2\pi i \sum k_\alpha e_\alpha, \quad \sum e_\alpha = e, \quad e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha.$$

The proof is based on considering the operator $T(x_1)$ on \mathfrak{B} defined by $T(x_1)x = x_1 x - x x_1$. Finally, a result for logarithms analogous to (2) is proved.

V. Pták.

Cartier, P. et J. Dixmier: Vecteurs analytiques dans les représentations des groupes de Lie. Amer. J. Math. 80, 131—145 (1958).

Soit G un groupe de Lie, H un espace de Banach, π une représentation continue de G dans H . Un vecteur $x \in H$ est dit analytique si l'application $s \rightarrow \pi(s)x$ de G dans H est analytique. Le résultat central de l'article est le théorème suivant: Soient G un groupe de Lie réel, H un espace de Banach et π une représentation continue de G dans H . L'ensemble des vecteurs analytiques est dense dans H dans chacun des trois cas suivants: 1. G est connexe et simplement connexe; les opérateurs $\pi(z)$, $z \in Z$, sont scalaires; 2. G est connexe et simplement connexe et l'ensemble des opérateurs $\pi(z)$, $z \in Z$, est borné dans $L(H)$; 3. l'ensemble des opérateurs $\pi(s)$, $s \in G$, est borné dans $L(H)$. La démonstration de ce théorème repose sur un certain nombre de lemmes, ayant leur propre intérêt. Mentionnons en particulier le lemme suivant, dans lequel est introduit (le sous-groupe) Z : Soit G un groupe de Lie réel connexe et simplement connexe. Il existe des sous-groupes fermés K et N de G et un sous-groupe discret Z du centre de G , avec les propriétés suivantes: (i) $G = K \cdot N$; (ii) N est résoluble connexe et simplement connexe; (iii) K est produit direct d'un groupe compact K' et d'un groupe abélien connexe et simplement connexe A ; (iv) $Z \subset A$ et A/Z est compact.

C. Ionescu Tulcea.

Santos Guerreiro, J.: Les changements de variable en théorie des distributions. I. *Portugaliae Math.* 16, 57—81 (1957).

Dans ce travail l'A. donne une caractérisation des changements de variable dans des distributions (d'une seule variable), en employant la méthode du rapporteur (ce Zbl. 64, 358, 2^{me} récession) pour la recherche des applications linéaires continues d'un espace de distributions dans un autre. Soit d'abord I un intervalle ouvert de la droite R ; on désigne par $C^\infty(I)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables dans I et par $C_\pi(I)$ l'espace de toutes les distributions définies dans I ; on dit qu'une application Φ de $C_\pi(I)$ dans $C_\pi(J)$ (où J est un deuxième intervalle ouvert de R) respecte la multiplication, si, pour toute fonction $\alpha \in C^\infty(I)$ et toute distribution $T \in C_\pi(I)$, on a $\Phi(\alpha \cdot T) = \Phi(\alpha) \Phi(T)$, $\Phi(\alpha) \in C^\infty(J)$. Cela posé, l'A. démontre le théorème suivant: il existe une correspondance biunivoque $\Phi \leftrightarrow h$, entre les applications linéaires continues non nulles Φ de $C_\pi(I)$ dans $C_\pi(J)$, respectant la multiplication, et les applications h de J dans I , indéfiniment différentiables et telles que $h'(t) \neq 0$ partout dans J ; dans cette correspondance, Φ est le prolongement (continu) à $C_\pi(I)$ de l'application $f(x) \rightarrow f(h(t))$ de $C_\pi(I)$ dans $C_\pi(J)$. L'A. généralise ce résultat au cas où le deuxième des intervalles I, J ou tous les deux sont compacts; alors $C^\infty(J)$ est remplacé par l'espace $M(J)$ des fonctions indéfiniment dérivables dans J et à croissance lente vers les extrêmes de J , et les hypothèses sur h sont renforcées dans l'énoncé du théorème.

J. Sebastião e Silva.

Barros Neto, J. de: Sur les distributions et les intégrales de Cauchy. *Bol. Soc. Mat. São Paulo* 9, 72—81 (1957).

Ce travail est en rapport avec une note de Déprit (ce Zbl. 56, 106). L'A. établit la formule intégrale de Cauchy, d'abord pour les fonctions d'une seule variable et ensuite pour les fonctions de n variables $z_k = x_k + i y_k$, en considérant une telle fonction $f(z_1, \dots, z_n)$ comme fonction (ou distribution) des $2n$ variables réelles x_k, y_k et en employant la formule de L. Schwartz:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{v} \cdot \mathbf{p} \cdot \frac{1}{z^m} \right) = \frac{(-1)^{m-1} \pi}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \delta}{\partial z^{m-1}}$$

où $\bar{z}z = \frac{1}{2}(\bar{z}\partial x - i\partial\bar{z}y)$, $\partial\partial\bar{z} = \frac{1}{2}(\partial\partial x + i\partial\partial y)$, ainsi que la généralisation de cette formule au cas de n variables.

J. Silva e Sebastião.

Burkill, J. C.: An integral for distributions. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 53, 821—824 (1957).

En considérant l'intégrale $\int f(x) T(x) dx$ d'une fonction f par rapport à une distribution $T = d^n g/dx^n$ comme une généralisation de l'intégrale de Stieltjes

$\int f dg$ d'une fonction continue f par rapport à une fonction g à variation bornée, l'A. propose une définition directe de l'intégrale $\int_0^1 f \frac{d^n g}{dx^{n-1}}$ dans le cas où f et g sont des fonctions de période 1. L'idée intuitive de sa définition est de considérer des décompositions de l'intervalle $[0, 1]$ en intervalles de longueur $h = 1/m$ et de prendre la limite, lorsque $h \rightarrow 0$, de la somme des valeurs de $f(x) \Delta_h^n g(x)/h^{n-1}$, pour $x = 0, h, \dots, 1$, L'A. applique cette définition au développement des distributions périodiques en séries de Fourier. Note du rapporteur: Le point de vue de l'A. se rapproche de celui de la théorie formelle directe des distributions, initiée par König (ce Zbl. 50, 338) et développée par le rapporteur (ce Zbl. 64, 358); voir aussi Mikusiński-Sikorski (ce Zbl. 78, 111).

J. Sebastião e Silva.

Fischer, H. R.: Differentialkalkül für nicht-metrische Strukturen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 247, 14 S. (1957).

Im Jahre 1925 gelang es Fréchet [Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. 42, 293—323 (1925)], den Begriff der Ableitung in solcher Weise auf normierte Räume zu verallgemeinern, daß die wichtigsten Sätze der Differentialrechnung ihre Gültigkeit behalten: Ist $\varphi(x)$ eine Abbildung eines normierten Raumes in einen anderen, so heißt ein linearer Operator φ' (der von x abhängt) Ableitung an der Stelle x , wenn $\varphi(x+h) - \varphi(x) = \varphi'(x)h + r(h)$ mit $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/|h| = 0$. Dem Verf. gelingt es

nun, allgemein für Funktionen mit Definitions- und Wertebereichen in topologischen Gruppen einen Differentiationsbegriff einzuführen und eine Reihe von wichtigen Eigenschaften der Ableitung nachzuweisen. Es ist zu erwarten, daß diese sehr bemerkenswerten Ergebnisse noch zu vielfältigen fruchtbaren Resultaten, insbesondere auch im Fall der lokalkonvexen topologischen Vektorräume, führen werden. In der vorliegenden Note werden die Definitionen und die Hauptresultate (ohne Beweise) angekündigt. — Es seien G, G' topologische Gruppen, $\varphi: G \rightarrow G'$. Dann heißt φ an der Stelle $x \in G$ linksseitig differenzierbar, wenn ein stetiger Homomorphismus $\varphi'(x): G \rightarrow G'$ existiert (der nicht eindeutig bestimmt zu sein braucht und eine linksseitige Ableitung heißt), so daß $\varphi(x)^{-1} \varphi(xh) = (\varphi'(x)h) \cdot r(h)$ gilt, wobei das Restglied $r: G \rightarrow G'$ in einem noch zu definierenden Sinne für $h \rightarrow e$ von „höherer Ordnung“ gegen e' geht. Die topologischen Strukturen von G, G' sind uniform und lassen sich daher durch Systeme von Quasinormen (im Sinne von Bourbaki) erzeugen. Eine stetige Funktion $r: G \rightarrow G'$ heißt nun für $h \rightarrow e$ von höherer Ordnung gegen e' strebend oder kürzer ein Restglied, wenn es zu jeder Quasinorm f' von G' eine Quasinorm f von G gibt, so daß $f'(r(h)) \leq \varepsilon f(h)$ für $f(h) \leq \delta(\varepsilon)$ gilt. Die Gesamtheit $\mathfrak{R}(G, G')$ der Restglieder ist ein Normalteiler in der Gruppe der an der Stelle e stetigen Abbildungen $G \rightarrow G'$. Jede in x linksseitig differenzierbare Funktion ist daselbst stetig. Die stetigen Homomorphismen und die Konstanten sind differenzierbare Funktionen. Jede in x linksseitig differenzierbare Funktion ist daselbst auch rechtsseitig differenzierbar. — Es wird sodann von G, G' zusätzlich verlangt, daß die Topologien Hausdorffsch seien und daß das Paar (G, G') die folgende Eigenschaft (A) habe: Ein Homomorphismus $\varphi: G \rightarrow G'$ ist genau dann stetig, wenn zu jeder Quasinorm f' von G' ein $c > 0$ und eine Quasinorm f von G existieren, so daß $f'(\varphi x) \leq c \cdot f(x)$ für alle $x \in G$ (und entsprechend für die Homomorphismen $G' \rightarrow G$). Für solche Paare gilt die Kettenregel und auch der Satz von der Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion, falls alle $\varphi'(x)$ Isomorphismen „auf“ sind. Sind G, G' beide abelsch und führt man in der Gesamtheit der Homomorphismen $G \rightarrow G'$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den beschränkten abgeschlossenen Mengen ein, so wird eine Definition der stetigen Differenzierbarkeit ermöglicht. Hier können nun auch mehrfache Ableitungen und Differentialformen eingeführt werden. [Man vgl. dazu auch H. R. Fischer, Arch. der Math. 8, 428—443 (1958).] Besonderes Interesse findet dann natürlich der Fall, daß G, G' (reelle) lokalkonvexe Vektorräume sind.

Hier folgt die Eindeutigkeit der Ableitung, und es gilt (Δ), mithin auch die Kettenregel. Hier hat man nun auch eine sehr allgemeine Produktregel für multilineare Funktionen und den „komponentenweisen“ Mittelwertsatz, d. h. die Gültigkeit des gewohnten Mittelwertsatzes für die reellwertigen Funktionen $l \varphi(x)$, wenn l beliebig aus dem adjungierten Raum des Bildraumes G' . Daraus folgt mittels des Hahn-Banachschen Satzes die Kennzeichnung der Konstanten durch das Verschwinden der Ableitung. Es gilt auch der Taylorsche Satz mit einem Restglied, das von höherer als n -ter Ordnung verschwindet. Ein weiteres, ganz besonders bemerkenswertes Resultat ist der Satz über implizite Funktionen. Sein Beweis beruht auf einem Fixpunktsatz, der für beliebige topologisch vollständige Gruppen G gilt, und der eine Verallgemeinerung des Satzes von Banach über die kontrahierenden Abbildungen ist. (Auf den letzteren wird allerdings nicht hingewiesen.) Die Resultate gehen im Spezialfall normierter Räume in Sätze von Fréchet sowie Hildebrandt und Graves [Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 127—153 (1927)] über. Diese Sätze stellen auch heute noch den wesentlichen Inhalt der Differentialrechnung in reellen Banachräumen dar, wenn man von Untersuchungen über Differentialgleichungen (insbesondere Michal und Elconin, dies. Zbl. **16**, 307) und Abschwächungen von Voraussetzungen (insbesondere neuere Arbeiten von R. Nevanlinna) absieht. Man darf also wohl sagen, daß die Ergebnisse der Verf. in einem gewissen Sinne bereits optimal sind, jedenfalls in den Anwendungen auf lokalkonvexe Räume.

D. Laugwitz.

Kantorovič (Kantorovich), L. V. and G. Š. (G. Sh.) Rubinštejn (Rubinstein): On a functional space and certain extremum problems. Doklady Akad. Nauk SSSR **115**, 1058—1061 (1957) [Russisch].

Soit R un espace métrique compact et B la famille des ensembles boréliens de R . Les AA. considèrent l'espace $\Phi(B)$ des fonctions complètement additives définies sur B , avec une norme différente de la variation totale. Le dual de cet espace s'identifie à l'espace des fonctions lipschitziennes. Pour les fonctions $q_0 \in \Phi_0(B)$, telles que $q_0(R) = 0$, on pose $\|q_0\| = \int_R \int r(x, y) \psi(de, de')$, où r désigne la distance dans R et ψ est une fonction positive complètement additive en chaque variable qui satisfait à la condition $\psi(e, R) - \psi(R, e) = q_0(e)$. En général,

$$\|\varphi\| = \inf_{q_0 \in \Phi_0(B)} \{ \|\varphi_0\| + \int_R p(x) |\varphi(de) - q_0(de)| \}$$

où p est une fonction satisfaisant aux conditions

$$p(x) > \sup_{y \in R} r(x, y), \quad |p(x) - p(y)| \leq r(x, y).$$

Ces considérations sont appliquées ensuite à certains problèmes de déplacement de masses et de planification. La quantité de masse transportée de e dans e' , quand on passe de la répartition q_1 à la répartition q_2 est interprétée par $\psi(e, e')$ où ψ correspond à la fonction $q_0 = q_1 - q_2$. On en trouve des critères pour l'existence des déplacements optimaux, c. à d. tels que $\int_R \int r(x, y) \psi(de, de')$ soit minimum, et des plans optimaux.

G. Marinescu.

Sion, Maurice: On general minimax theorems. Pacific J. Math. **8**, 171—176 (1958).

The following theorem is proved: Let M and N be convex, compact spaces and f a function on $M \times N$, quasi-concave-convex and upper-semi-continuous-lower-semi-continuous (u. s. c. -l. s. c.). Then $\sup \inf f = \inf \sup f$. — A function is called quasi-concave-convex on $M \times N$ if $\{\mu: f(\mu, \nu) \geq c\}$ is a convex set for all $\nu \in N$ and $\{\nu: f(\mu, \nu) \leq c\}$ is a convex set for all $\mu \in M$, where c is real. It is u. s. c. -l. s. c. if $f(\mu, \nu)$ is u. s. c. in μ for each $\nu \in N$ and l. s. c. in ν for each $\mu \in N$. The theorem is related to others which were proved either by a separation theorem (cf. H. Kneser, this Zbl. **46**, 122; K. Fan, this Zbl. **50**, 65; Berge, this Zbl. **57**, 352) or by

a fixed point theorem (Nikaidô, this Zbl. 55, 100), but the present proof is different from both these types.

S. Vajda.

Davis, Philip and Ky Fan: Complete sequences and approximations in normed linear spaces. *Duke math. J.* **24**, 183—192 (1957).

Let X be a normed vector space and X^* its conjugate space. Given $a_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$), a sequence $f_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$) is $\{a_n\}$ -complete if $\varphi \in X^*$ and $|\varphi(f_n)| \leq a_n$ imply $\varphi = 0$. For $p \geq 1$ the sequence $f_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$) is p -complete if $\varphi \in X^*$ and $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(f_n)|^p < \infty$ imply $\varphi = 0$. In particular $\{0\}$ -completeness (i. e. $\{a_n\}$ -completeness with all $a_n = 0$) is usual completeness. — $\{f_n\}$ is $\{a_n\}$ -complete (resp. p -complete) if and only if for any $g \in X$ and any $\varepsilon > 0$ there exist c_1, \dots, c_m such that $\left\| g - \sum_{n=1}^m c_n f_n \right\| < \varepsilon$, $\sum_{n=1}^m |c_n| a_n < \varepsilon$ (resp. $\left(\sum_{n=1}^m |c_n|^q \right)^{1/q} < \varepsilon$, $1/p + 1/q = 1$). — It is shown how to construct an $\{a_n\}$ -complete sequence from a given complete sequence in a Banach space and this construction is illustrated by various examples in function spaces. — Finally theorems of the Paley-Wiener type are given which state that if f_n is complete in X and g_n is "near" to f_n then g_n is also complete. 1. If for some λ ($0 < \lambda < 1$) we have

$$(1) \quad \left\| \sum_{n=1}^m c_n (f_n - g_n) \right\| \leq \lambda \left\| \sum_{n=1}^m c_n f_n \right\| \quad \text{for any } c_1, \dots, c_m$$

and if $\{f_n\}$ is $\{a_n\}$ -complete (resp. p -complete) then $\{g_n\}$ is $\{a_n\}$ -complete (resp. p -complete). For $\{a_n\} = \{0\}$ this is a result of Boas (s. this Zbl. 25, 257). 2. If (1) is satisfied with some λ ($0 < \lambda < \frac{1}{2}$) then $\{f_n\}$ and $\{g_n\}$ are simultaneously $\{a_n\}$ -complete (resp. p -complete). For $\{a_n\} = \{0\}$ this is a result of Schäfer (s. this Zbl. 35, 197). 3. Let X be a Hilbert space and suppose that for some $\varrho_1 > 0$, $\varrho_2 > 0$ and for any c_1, \dots, c_m the inequalities

$$\varrho_1 \left\| \sum_{n=1}^m c_n f_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^m c_n g_n \right\| \leq \varrho_2 \left\| \sum_{n=1}^m c_n f_n \right\|, \quad \left\| \sum_{n=1}^m c_n (f_n - g_n) \right\|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^m c_n f_n \right\|^2 + \left\| \sum_{n=1}^m c_n g_n \right\|^2$$

hold. Then (i) if $\{f_n\}$ is $\{a_n\}$ -complete or p -complete, so is $\{g_n\}$, (ii) if $\{f_n\}$ is complete orthonormal, then $\{g_n\}$ admits a biorthonormal sequence $\{h_n\}$ and every $u \in X$ has an expansion $u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, h_n) g_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u, g_n) h_n$ with

$$\frac{\|u\|}{\varrho_2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(u, h_n)|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{\|u\|}{\varrho_1}, \quad \varrho_1 \|u\| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(u, g_n)|^2 \right)^{1/2} \leq \varrho_2 \|u\|.$$

Part (ii) generalizes a result of B. Sz. Nagy (s. this Zbl. 29, 144). *J. Horváth.*

Hirschfeld, Rudi: Sur la théorie générale des meilleures approximations. *C. r. Acad. Sci., Paris* **246**, 1485—1488 (1958).

Es sei E ein normierter Vektorraum, G ein abgeschlossener Unterraum von E . Der (nicht notwendig eindeutige) Operator A_G ist durch $\|x - A_G x\| = \inf_{g \in G} \|x - g\|$ definiert, und heißt Operator der besten Approximation. Verf. beweist einige einfache aber interessante Ergebnisse über die Existenz, Eindeutigkeit und Linearität von A_G unter verschiedenen den Raum E betreffenden Annahmen. *A. Korányi.*

Zuchovickij (Zukhovitsky), S. I. and G. I. Eskin: Chebyshev approximation in a Hilbert ring. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **118**, 870—872; **119**, 1074—1076 (1958) [Russisch].

Soit H un anneau hilbertien, Q un compact et φ une application continue de Q dans H . On énonce une condition nécessaire et suffisante que doit remplir la fonction φ , afin que pour toute application continue f de Q dans H , il existe un élément $a^{(0)} \in H$ tel que

$$\max_{q \in Q} \|a^{(0)} \varphi(q) - f(q)\| = \inf_{a \in H} \max_{q \in Q} \|a \varphi(q) - f(q)\|$$

et aussi une condition d'unicité. La condition d'existence est $q(Q) \subset p_1 H \oplus \dots \oplus p_k H$, où p_1, \dots, p_k sont des idempotents hermitiens irréductibles et la condition d'unicité est que l'équation $a \varphi(q) = 0$ n'ait pas de solutions dans Q pour aucun a orthogonal à $p_1 H \oplus \dots \oplus p_k H$. Dans la deuxième note on passe aux fonctions de la forme $a_1 q_1 + \dots + a_n q_n$ et on exprime les conditions respectives en termes d'une base orthonormale dans H .

G. Marinescu.

Sack, R. A.: Taylor's theorem for shift operators. Philos. Mag., VIII. Ser. 3, 497—503 (1958).

Für den Fall, daß p, q zwei Operatoren mit $[q, p] = q p - p q = 1$ bedeuten, haben Kermack und McCrea (s. dies. Zbl. 2, 263) eine verallgemeinerte Taylor-entwicklung für Funktionen der Form $F(q + \lambda f(p))$ nach Potenzen von λ hergeleitet. Davon ausgehend werden hier bei Operatoren A, B mit $[A, B] = A B - B A$ Entwicklungsfunkeln für $F(A + \lambda B)$ bewiesen. Im Spezialfall $F(A) = \exp(\kappa A)$ zerfällt $F(A + \lambda B)$ in zwei jeweils nur von einem der Operatoren abhängende Faktoren. — Bedeuten nun p, q Variable mit $p q - q p = -i$, für welche der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators $H = p^2 + q^2$ ist, so gestattet es dies Ergebnis, eine Gaußsche Potentialenergie $\exp(-k q^2)$ als Produkt von Exponentialfunktionen darzustellen, welche nur von den Operatoren $a^2, a a^*$ und a^{*2} abhängen ($a = \frac{1}{2}(q + i p)$, $a^* = \frac{1}{2}(q - i p)$). Im ein- und zweidimensionalen Fall werden hier die Matricelemente der Gaußschen Funktion durch Jacobische Polynome ausgedrückt.

J. Schröder.

Foiaş, C., Gh. Gussi et V. Poenaru: L'étude de l'équation $du/d\tau = A(\tau)u$ pour certaines classes d'opérateurs non bornés de l'espace de Hilbert. Trans. Amer. math. Soc. 86, 335—347 (1957).

The authors treat the existence and uniqueness of solutions of the abstract („non-stationary“) Cauchy problem: (1) $du(t)/dt = A(t)u(t)$ where $A(t)$, $a < t < b$, is closed linear with domain dense in a Hilbert space H . It is assumed throughout that there is an ascending sequence of closed subspaces $\{H_n\}$ whose union is dense in H such that $A^*(t)H_n \subseteq H_n \subseteq D(A^*(t))$ and $A^*(t)$ is bounded on every H_n and strongly continuous in t . It is shown that H can then be imbedded in a metrisable, complete, locally convex linear space X' , on which the operators $A(t)$ can be extended to be bounded in such a way that (1) taken in X' has a unique solution for each initial value given in X' . [This automatically yields uniqueness of solutions for (1) in H .] The rest of the paper is devoted for the most part to sharpening this result under additional conditions on $A(t)$. Thus under the hypothesis that $\text{Re}[A^*(t)x, x] < \mu(t)|x|^2$, $\mu(t)$ being summable in every closed subinterval of (a, b) , it is shown that for initial values taken in H imbedded in X' , the solution continues to be in it. A further condition $\| [u(t+h) - u(t)]/h \| \leq M(t)$, $|h| \leq \delta(t)$ ensures that (1) can be interpreted in the weak topology of H with $u(t) \in D(A(t))$. The authors cite as an example (almost a canonical one) the case where $A(t) = B(t)A$, A being normal and $B(t)$ bounded and strongly continuous in t , commuting with A . Applications to partial differential equations are envisaged, although none are given in this paper. In view of the complexity of the general problem, the restrictive conditions assumed by the authors do not appear to be serious, and are indeed natural for the example cited. It may be noted that R. S. Phillips (cf. this Zbl. 53, 87) has treated the same problem in a Banach space setting under the assumption that $A(t) = A + B(t)$, with A an infinitesimal generator. These assumptions appear to be mutually exclusive in general, although the Phillips assumption yields stronger results.

A. V. Balakrishnan.

Persidskij, K. P.: Über die zweite Methode Ljapunovs in linearen normierten Räumen. Vestnik Akad. Nauk Kazach. SSR 1958, Nr. 7, 89—97 (1958) [Russisch].

Verf. betrachtet eine Differentialgleichung erster Ordnung in einem Banachschen Raum, die das Nullelement als Lösung hat, und überträgt die folgenden Sätze

der Stabilitätstheorie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen: 1. den Ljapunovschen Satz über (einfache) Stabilität und seine Umkehrung, 2. den Instabilitätssatz von Četaev (in etwas allgemeinerer Fassung) und seine Umkehrung. Die Beweise der Umkehrungen sind bemerkenswert einfach. Die direkten Sätze finden sich, was dem Verf. entgangen zu sein scheint, schon bei Massera (s. dies. Zbl. 70, 310).

W. Hahn.

Fišman (Fishman), K. M. and Ju. N. (Yu. N.) Valickij (Valitsky): The applicability of Fredholm's theory to certain linear topological spaces. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 943—946 (1958) [Russisch].

Les AA. considèrent une famille d'espaces de Banach, B_r ($\alpha < r \leq \beta$) tels que B_r soit dense dans $B_{r'}$ et $\|f\|_{r'} < \|f\|_r$ pour tout $r' < r$ et $f \in B_r$. Ils définissent ensuite la topologie dans A_r , l'intersection des B_r avec $r' < r$, par les normes $\|\cdot\|_{r'}$. Dans ces conditions, ils montrent qu'un opérateur défini et satisfaisant aux théorèmes de Fredholm dans tous les B_r , y satisfait aussi dans les A_r . Comme exemple, ils rétablissent certains résultats de M. A. Evgrafov sur les fonctions analytiques.

G. Marinescu.

Sobolevskij (Sobolevsky), P. E.: On equations with operators forming an acute angle. Doklady Akad. Nauk SSSR 116, 754—757 (1957) [Russisch].

Definitionen: Die Operatoren A_1, A_2 — im Hilbertschen Raume mit dem Skalarprodukt (\cdot, \cdot) — bilden einen spitzen Winkel, falls ihre Definitionsgebiete gleich sind und $(A_1 u, A_2 u) \geq m \|A_1 u\| \cdot \|A_2 u\|$, $m > 0$. Der Operator A heißt normal auflösbar, falls für A und A^* der dritte Fredholmsche Satz gilt. Ergebnisse: Von den neun vom Verf. angegebenen Sätzen führen wir zwei als Beispiele an:

6. Es sei $A_i \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{|\alpha| \leq 2} a_{\alpha}(x) D^{\alpha}$, wobei die Matrizen $(a_{\mu\nu}(x))_1^N$ positiv definit in Ω_N sind, $i = 1, 2$. Dann gibt es zwei solche Konstante $c_1, c_2 > 0$, daß

$$\int_{\Omega_N} A_1 u(x) A_2 u(x) dx \geq c_1 \int_{\Omega_N} \sum_{|\alpha|=2} (D^{\alpha} u)^2 dx - c_2 \int_{\Omega_N} \sum_{|\beta| \leq 1} (D^{\beta} u)^2 dx$$

für $u \in H_2$ (Vervollständigung der am Rande von Ω_N verschwindenden Funktionen aus $C^2(\bar{\Omega}_N)$ in der Norm $\|u\|_2^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_N} \sum_{|\alpha| \leq 2} (D^{\alpha} u)^2 dx$). 7. Es genüge $A(t) \stackrel{\text{def}}{=}$

$-\sum_{|\alpha| \leq 2} a_{\mu}(x, t) D^{\alpha}$ den in 6. gestellten Bedingungen. Dann ist für hinreichend großes $k > 0$ der Operator $d/dt + A(t) + kI$ normal auflösbar im Raume $L^2(0, T) \otimes L^2(\Omega_N)$ und bildet einen spitzen Winkel mit dem Operator $d/dt - A$.

K. Maurin.

Glazman (Glasman), I. M.: On the negative part of the spectrum of one-dimensional and multi-dimensional differential operators over vector-functions. Doklady Akad. Nauk SSSR 119, 421—424 (1958) [Russisch].

Let $L_2^m(0, \infty)$ be the Hilbert space of m -vector-valued functions on $0 \leq x < \infty$ with the usual inner product. Let $l[y] = (-1)^n y^{(2n)} + Q(x)y$, where Q is an hermitian m by m matrix-valued function on $0 \leq x < \infty$. By L is meant any self-adjoint extension in $L_2^m(0, \infty)$ of the minimal operator in $L_2^m(0, \infty)$ associated with l . The author gives a sufficient condition for the negative part of the spectrum of L to be bounded from below and to be discrete, and then gives conditions under which the negative part of the spectrum of L consists of a finite (or infinite) number of eigenvalues. It is then indicated that the results extend partially to the case when $l[y] = -\Delta u + Q(P)u$, where Q is an hermitian m by m matrix-valued function defined on all of the n -dimensional euclidean space. E. A. Coddington.

Lions, Jacques-Louis: Sur certains problèmes mixtes quasilineaires. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 1796—1799 (1958).

This note extends certain of the results summarized in another note (this Zbl. 80. 103, 2nd review). Making use of the same notations (Ω : an open set of R^n , $H^k(\Omega)$:

the space of the functions $u \in L^2(\Omega)$ whose derivatives of order $\leq k$, in the sense of Schwartz's distributions, are in $L^2(\Omega)$, the author adds to his previous three assumptions a fourth one, namely: $u(t) \in H^{2m}(\Omega)$ is continuous in $H^{2m}(\Omega)$ for $0 \leq t \leq \mu$, $\|u(t)\|_{2m} \leq c \cdot f(t)$ for $0 \leq t \leq \mu$, where $f(t)$ is continuous in H . Now if $w \in H^{2m-1}(\Omega)$, and $D_x^{2m-1}w$ denotes the set of the N derivatives whose order is $\leq 2m-1$, if further $b_p(x, t, \lambda)$, $x \in \Omega$, $0 \leq t \leq \mu$, $\lambda \in C^N$, is continuous and bounded in $\Omega \times [0, \mu] \times C^N$, the following theorem holds: Under the above mentioned assumptions there exists $u \in L^2(0, \mu; V \cap H^{2m}(\Omega))$ such that $u' \in L^2(0, \mu; H)$ (u' : derivative in the sense of distribution), $u(0) = 0$, satisfying the equation (1) of the first note where

$$b(t; u, f; w) = \sum_{|p| \leq m} \int_{\Omega} b_p(x, t, D^{2m-1}w(x, t)) D^p u(x) \overline{f(x)} dx.$$

This solves the weak mixed problem for the operator

$$\sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq}(x, t) D^q u) + \sum_{|p| \leq m} b_q(x, t, D_x^{2m-1}u) D^p u + D_t u.$$

A particular application is indicated. It is about a Dirichlet problem in the case of a non cylindrical open set under certain conditions of regularity. *C. Racine.*

Narasimhan, M. S.: The identity of the weak and strong extensions of a linear elliptic differential operator. I, II. Proc. nat. Acad. Sci. USA **43**, 513—517, 620 (1957).

The weak extension P_w of a differential operator with C^∞ coefficients $P(x, D) = \sum a^\alpha(x) D_\alpha$ in a domain Ω is defined for those $u \in L^2(\Omega)$ such that $P(x, D)u = f \in L^2(\Omega)$ in the weak (distribution) sense; $P_w u = f$. The strong extension P_s is the closure of $P(x, D)$ defined for those $u \in L^2(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ such that $P(x, D)u \in L^2(\Omega)$. The author proves that $P_w = P_s$ if $P(x, D)$ is elliptic. The same result is due to the reviewer (this Zbl. **67**. 322) when P has constant coefficients and is of local type. Reviewer's remark: The method used by the reviewer also applies to elliptic operators with variable coefficients or more generally formally hypo-elliptic operators (see e. g. Commun. pure appl. Math. **11**, 197—218 (1958)). Moreover, it works for arbitrary first order systems which the methods of the papers reviewed do not. *L. Hörmander.*

Rosenblum, M.: On a theorem of Fuglede and Putnam. J. London math. Soc. **33**, 376—377 (1958).

An extremely simple and ingenious proof of the following theorem: if M, N are normal operators, and B a bounded operator on complex Hilbert space, then $BN \subseteq MB$ implies $BN^* \subseteq M^*B$ [see Fuglede (this Zbl. **35**, 358), who proved this for $M = N$; later Putnam (this Zbl. **42**, 345) observed that Fuglede's proof may be extended to the case $M \neq N$]. The proof starts, in the case of bounded M, N , by showing that $BN \subseteq MB$ implies that $e^{i\lambda M^*} B e^{-i\lambda N^*}$ is a bounded analytic function of λ and then, by Liouville's theorem, it is equal to a constant. The case of nonbounded M, N may be reduced to the case of bounded ones by using the spectral theorem. *B. Sz. Nagy.*

Poljakkij (Poliatsky), V. T.: On the reduction of quasi-unitary operators to a triangular form. Doklady Akad. Nauk SSSR **113**, 756—759 (1957) [Russisch].

Es sei T ein quasiunitärer Operator im Hilbertschen Raum H , genauer: (1) $\dim(I - T^*T)$ sei endlich und gleich $\dim(I - TT^*)$, (2) die Resolvente von T sei in wenigstens einem Punkte ζ_0 , $|\zeta_0| < 1$, regulär. Untersucht wird die Frage nach der Darstellung von T in Dreiecksform im Sinne von M. S. Livšic (s. dies. Zbl. **57**, 100). Mit Hilfe der charakteristischen Matrixfunktion und ihrer von Potapov (s. dies. Zbl. **66**, 60) stammenden Produktdarstellung wird eine vollständige explizite Lösung gegeben, deren genaue Formulierung hier nicht dargestellt werden

kann. Im Falle, daß auch $\|T\| < 1$ gilt, wird aus diesem Ergebnis ein Kriterium für die Vollständigkeit des Systems der Eigenvektoren und assoziierten Vektoren von T hergeleitet. Ohne Beweise. *A. Korányi.*

Koehler, Fulton: Estimates for the eigenvalues of infinite matrices. *Pacific J. Math.* 7, 1391—1404 (1957).

Eigenwertprobleme der mathematischen Physik werden durch Einführung einer Basis im Raum der zugelassenen Funktionen auf Eigenwertprobleme für unendliche Matrizen zurückgeführt. Nach der Methode von Rayleigh-Ritz werden durch Abschneiden endlicher Matrizen obere Schranken für die gesuchten Eigenwerte gewonnen. — In der vorliegenden Arbeit gewinnt man ebenso untere Schranken mit Hilfe des Courantschen „Minimax“-Prinzips; dafür muß man globale Hilfs-Schranken kennen für die Matricelemente mit höheren Indizes: diese sollen genügend rasch abnehmen. — Eine (u. U. wesentliche) Verbesserung der Schranken wird durch eine anfängliche Transformation der Matrizen erzielt. — Hübsche numerische Anwendungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen werden angegeben; aber auch für das Schwingungsproblem einer inhomogenen Membran wird gezeigt, wie man die benötigten Hilfs-Schranken gewinnt. *J. Hersch.*

Gonshor, Harry: Spectral theory for a class of non-normal operators. II. *Canadian J. Math.* 10, 97—102 (1958).

Suite d'un autre article (v. ce Zbl. 72, 332), dont on utilise les notations. Soit A un J_2 -opérateur. Si la mesure spectrale de A est concentrée sur l'ensemble des $(\lambda, \mu, \alpha) \in Q$ tels que $\alpha \geq \alpha > 0$, alors la C^* -algèbre engendrée par A est algébriquement isomorphe et isométrique à l'algèbre des fonctions continues sur le spectre de A dont les valeurs sont des matrices 2×2 . Il y a un théorème analogue, mais plus compliqué, si A est un J_2 -opérateur général. *J. Dixmier.*

Rosenblum, Marvin: Perturbation of the continuous spectrum and unitary equivalence. *Pacific J. Math.* 7, 997—1010 (1957).

Als wesentliches Resultat wird der folgende Satz bewiesen: Seien A und B zwei nicht notwendig beschränkte lineare selbstadjungierte Operatoren eines Hilbert-raumes \mathfrak{H} . Sei $B - A = P$ dicht definiert und vollstetig und sei die Spur von $|P|$ endlich. Seien E_λ und F_λ die Spektralscharen von A und B bzw. und seien $(u, E_\lambda v)$ und $(u, F_\lambda v)$ totalstetige Funktionen von λ für jedes $u, v \in \mathfrak{H}$. Dann sind A und B unitär äquivalent. Genauer, die Grenzwerte $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-iBt} e^{iAt} = U$ und

$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-iBt} e^{iAt} = V$ existieren im starken Sinne und es gilt $U^* B U = A$, $V^* B U = A$.

Umgekehrt, wenn alle obigen Bedingungen mit Ausnahme der Totalstetigkeit von $(u, F_\lambda v)$ gewährleistet sind und wenn zusätzlich feststeht, daß A und B unitär äquivalent sind, so folgt die Totalstetigkeit von $(u, F_\lambda v)$ für alle u und v . Der Beweis benutzt wesentlich eine Integraldarstellung der Form

$$(e^{-iBt} e^{iAt} f, g) = (f, g) + \frac{1}{i} \int_0^t (e^{-iBx} P e^{iAx} f, g) dx.$$

Es wird gezeigt, daß für gewisse Elemente f und g die rechte Seite konvergiert, und daraus wird die schwache Konvergenz des Operators $e^{-iBt} e^{iAt}$ für $t \rightarrow \infty$ hergeleitet. Unter Benutzung der Tatsache, daß der Grenzwert U die Beziehung $\|Uf\| = \|f\|$ erfüllt, folgt dann die starke Konvergenz und endlich das volle Resultat.

H. O. Cordes.

Putnam, C. R.: Continuous spectra and unitary equivalence. *Pacific J. Math.* 7, 993—996 (1957).

Es wird das gleiche Resultat wie in der im vorhergehenden Referat besprochenen Arbeit von Rosenblum bewiesen, nur unter der zusätzlichen, stark einschränkenden Voraussetzung, daß die beiden Operatoren A und B durch denselben singulären

Sturm-Liouvilleschen Differentialausdruck, aber verschiedene Randbedingungen gegeben sind.

H. O. Cordes.

Schäfer, Friedrich Wilhelm: Zur Störungstheorie der Spektralzerlegung. Math. Ann. **133**, 219—234 (1957).

Verf. untersucht Störungsprobleme der Form $Fy - \lambda y - G(\mu)y = 0$ in einem Hilbertschen Raum. Dabei bedeutet F einen selbstadjungierten Operator,

λ den Eigenwert, μ den Störungsparameter, $G(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n G_n$ den Störoperator mit

nicht notwendig hermiteschen Operatoren G_n , welche vom Einheitsoperator und F in bestimmtem Sinne majorisiert werden. λ_0 sei ein einfacher, isolierter Eigenwert von F . Für die Reihenentwicklungen $\lambda(\mu) = \lambda_0 + \mu \lambda_1 + \dots$, $y(\mu) = y_0 + \mu y_1 + \dots$ wird ein Konvergenzradius hergeleitet (Satz 1), der in gewissem Sinne optimal ist und die von Rellich (s. dies. Zbl. **23**, 135) und Sz.-Nagy (s. dies. Zbl. **35**, 200) angegebenen wesentlich verbessert. Aus den ebenfalls bewiesenen Schranken für $|\lambda(\mu) - \lambda_0|$ und $\|y(\mu) - y_0\|$ lassen sich mit Hilfe von Koeffizientensätzen auch Fehlerabschätzungen gewinnen. Im Beweis benutzt Verf. eine bereits in früheren Arbeiten (s. dies. Zbl. **45**, 217; **50**, 345) verwendete funktionentheoretische Schlußweise und das Iterationsverfahren für kontrahierende Abbildungen. Für den Fall einer μ -linearen Störung $G = \mu G_1$ werden außerdem Fehlerabschätzungen für $|\lambda(\mu) - \lambda_0 - \mu \lambda_1|$ und $\|y(\mu) - y_0\|$ angegeben (Satz 2), die im allgemeinen genauer sein werden als die aus Satz 1 herleitbaren. Sie gehen aus entsprechenden vom Ref. (s. dies. Zbl. **51**, 92) auf andere Weise bewiesenen Abschätzungen hervor, indem man die dort auftretende Größe $\|G_1 y_0\|$ durch $(\|G_1 y_0\|^2 - |\lambda_1|^2)^{1/2}$ ersetzt, und werden im trivialen Fall $G_1 y_0 = \lambda_1 y_0$ exakt.

J. Schröder.

Charazov, D. F.: Einige Fragen aus der Theorie der linearen symmetrisierbaren Operatoren. Mat. Sbornik, n. Ser. **42** (84), 129—178 (1957) [Russisch].

Ausführliche und systematische Darstellung gewisser früher schon angekündigter Ergebnisse des Verf. Im Hilbert-Raum X wird die Eigenwertgleichung $x - A_0 x - \lambda A_1 x - \lambda^2 A_2 x = y$ ($y \in X$) untersucht, wo A_0, A_1, A_2 vollstetige symmetrisierbare Operatoren sind (d. h. es gibt einen positiven Operator H auf X , mit dem die HA_i ($i = 0, 1, 2$) selbstadjungiert sind), und A_1, A_2 endliche absolute Norm haben. Für diesen Fall wird eine der Hilbert-Schmidtschen ähnliche Theorie entwickelt.

Verf. erhält auch über die Eigenwertgleichung $x - \sum_{k=0}^m \lambda^k A_k x = 0$ ($x \in X$) mit nur vollstetigen und symmetrisierbaren A_k ($k = 0, 1, \dots, m$) einige Ergebnisse. Es folgen Anwendungen auf gewöhnliche und elliptische Differentialoperatoren. Siehe auch dies. Zbl. **40**, 350; **52**, 344; **57**, 345; **65**, 72.

A. Korányi.

Goldberg, V. N.: Perturbation of linear operators with a purely discrete spectrum. Doklady Akad. Nauk SSSR **115**, 643—645 (1957) [Russisch].

Verf. kündigt einige Sätze über Approximierbarkeit der Eigenwerte und Eigenvektoren eines positivdefiniten Operators H_0 durch diejenigen des singulärdestörten Operators $H_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon V + H_0$, $\varepsilon \geq 0$ an. [Bemerkung des Ref.: Dem Verf. waren offenbar die sehr ähnlichen Ergebnisse von D. Morgenstern (vgl. dies. Zbl. **70**, 98) unbekannt.]

K. Maurin.

Kostjučenko (Kostučenko), A. G.: On the behaviour of the eigenfunctions of the selfadjoint operators. Doklady Akad. Nauk SSSR **114**, 249—251 (1957) [Russisch].

Es sei A ein selbstadjungierter Operator im Hilbertschen Raum $L_2(R_n)$ (R_n ist der ganze n -dimensionale Euklidische Raum). Es sei E_λ die Spektralschar von A , und $\{g^\alpha\}$ eine vollständige Folge zyklischer Vektoren von A . Wie bekannt (Gelfand-Kostjučenko, dies. Zbl. **65**, 104), bilden die Derivierten $dE_\lambda g^{(\alpha)}(x)/d\sigma_\lambda(\lambda)$ ($\sigma_\lambda(\lambda) = (E_\lambda g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})$), die als Distributionen gedeutet werden können, ein vollständiges System von verallgemeinerten Eigenfunktionen des Operators A . Es wird folgender Satz bewiesen: Wenn die Resolvente R_λ von A für wenigstens einen Punkt

$\lambda = \lambda_0$ ein Carlemanscher Integraloperator ist,

$$R_{\lambda_0} f = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) f(y) dy, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |K^2(x, y)| < C,$$

wobei C von x unabhängig ist, dann sind die verallgemeinerten Eigenfunktionen $dE_{\lambda} g^{(\alpha)}(x)/d\sigma_{\alpha}(\lambda)$ beschränkte gewöhnliche Funktionen fast überall in bezug auf $\sigma_{\alpha}(\lambda)$. Die Voraussetzungen des Satzes sind erfüllt im Falle des Schrödingerschen Operators $-\Delta u + q(x)u = \lambda u$, wenn $q(x) > c_0 > -\infty$. Also haben wir das äußerst interessante Ergebnis, daß fast alle Eigenfunktionen der Schrödinger-Gleichung beschränkt sind. Die Beweise sind skizziert. *A. Korányi.*

Sargsjan, I. S.: Über die Differentiation der Spektralfunktion des Operators $-\Delta + q(x, y)$. Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady 26, 129—134 (1958) [Russisch].

Let q be a real-valued continuous function defined on a compact simply-connected region D , with boundary Γ , in the euclidean two-dimensional space E_2 . The author considers the eigenvalue problem $-\Delta u + q(x, y)u = \lambda u$, $\partial u/\partial n = 0$ on Γ . It is assumed that the spectrum is non-negative, and consists of eigenvalues μ_1^2, μ_2^2, \dots , with the corresponding orthonormal eigenfunctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. The spectral function θ is defined by

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = -\theta(x, y, u, v; -\mu) = \sum_{\mu_n < \mu} \varphi_n(x, y) \varphi_n(u, v) \quad \text{for } \mu > 0,$$

$\theta(x, y, u, v; 0) = 0$. Several results are stated which describe the asymptotic behavior of the derivatives of θ (with respect to x, y, u, v) for large μ , in terms of the spectral function of $-\Delta u = \lambda u$ for the whole space E_2 . Analogous results are stated for $-\Delta u + q(x, y)u = \lambda u$ considered on all of E_2 . *E. A. Coddington.*

Sargsjan, I. S.: Über die Differentiation der Entwicklungen nach Eigenfunktionen des Operators $-\Delta + q(x, y)$. Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady 26, 201—205 (1958) [Russisch].

The author continues his study of the problem considered in his earlier paper (see the preceding review). Using his previous results, he describes the behavior of the derivatives of the Riesz means of the eigenfunction expansions as $\mu \rightarrow \infty$. He also gives conditions under which an eigenfunction expansion may be differentiated term by term. *E. A. Coddington.*

Maurin, K.: Entwicklung positiv definiter Kerne nach Eigendistributionen. Differenzierbarkeit der Spektralfunktion eines hypoelliptischen Operators. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 6, 149—155 (1958).

The author presents a generalization of a theorem due to Berezanskiij (cf. this Zbl. 72, 312) having to do with the expansion of a positive definite Schwartz kernel in terms of eigendistributions of a given symmetric operator which has a self-adjoint extension. In the hypoelliptic case the eigendistributions are sufficiently differentiable. It is stated that the result is also valid for the case when the original operator is subnormal, and for the case of a kernel of a double coset space of a Lie group.

E. A. Coddington.

Glazman, I. M.: Über die Entwickelbarkeit nach einem System von Elementen dissipativer Operatoren. Uspechi mat. Nauk 13, Nr. 3 (81), 179—181 (1958) [Russisch].

Der lineare Operator A im Hilbertschen Raum \mathfrak{H} heißt dissipativ, wenn für jedes $f \in \mathfrak{D}_A$, $\text{Im}(A f, f) \geq 0$ besteht. Ein System $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ von Elementen aus \mathfrak{H} wird eine Rieszsche Basis seiner abgeschlossenen konvexen Hülle genannt, wenn für jedes Element der Gestalt $f = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k$ die Ungleichung $m \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \|f\|^2 \leq$

$M \sum_{k=1}^n |c_k|^2$ mit gewissen von f unabhängigen Konstanten m, M besteht. Verf. gibt einen sehr einfachen Beweis der folgenden Verallgemeinerung eines Ergebnisses von

B. R. Mukminov (s. dies. Zbl. 58, 331): Es sei A ein beschränkter dissipativer Operator mit einem unendlichen System von normierten Eigenelementen $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ und es sei $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ die entsprechende Folge von Eigenwerten. Wenn $\sum_{j \neq k} \frac{\operatorname{Im} \lambda_j \operatorname{Im} \lambda_k}{|\lambda_j - \lambda_k|^2} < \infty$ besteht, dann ist das System $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Riesz'sche Basis seiner konvexen Hülle.
A. Korányi.

Foguel, S. R.: Sums and products of commuting spectral operators. Ark. Mat. 3, 449—461 (1958).

Let $[\mathfrak{X}]$ denote the set of all bounded operators in a Banach space \mathfrak{X} . Suppose that A and B are any two members of $[\mathfrak{X}]$; half of this article studies the relationship between the poles of $A + B$ and AB with the poles of A and B (by definition, a complex number λ is a pole of an operator T if λ is a pole of the resolvent of T). Applications to commutants are indicated. Let $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ be the set of all members of $[\mathfrak{X}]$ that are scalar operators in the sense of Dunford; to each member T of $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ corresponds a spectral measure E^T such that $T = \int \lambda \cdot E^T(d\lambda)$ (see Dunford's article, this Zbl. 56, 346). Let $\sigma(T)$ denote the spectrum of T . If A and B are members of $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ such that E^A and E^B have finite support, then $A + B$ and $A \times B = AB$ both belong to $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$; moreover, $\sigma(A \times B)$ is contained in the set $\{\alpha \cdot \beta : \alpha \in \sigma(A) \text{ and } \beta \in \sigma(B)\}$. Let $\mathfrak{S}_0(\mathfrak{X})$ be the set of all T in $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ such that the Boolean algebra of projections generated by E^T is bounded. Suppose that \mathfrak{X} is weakly complete; if A and B are two commuting members of $\mathfrak{S}_0(\mathfrak{X})$, then $A + B$ and AB both belong to $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$. This result is apparently proved in Part II of the book "Linear Operators" by N. Dunford and J. Schwartz (this Part II is still unpublished). As before, suppose that \mathfrak{X} is weakly complete, and that A and B are two commuting members of $\mathfrak{S}_0(\mathfrak{X})$. Set $S = A + B$ and $P = AB$; the author determines the spectral measures E^S and E^P . More precisely, E^S is defined for all Borel sets a by the relation $E^S(a)x = \int E^A(a - \lambda) \cdot E^B(d\lambda)x$, which holds for all x in the set $\{x \in \mathfrak{X} : 0 = E^S(\partial a)x\}$ (the boundary of a is here denoted ∂a). The integral exists in the Riemann-Stieltjes sense, and $a - \lambda$ stands for the set $\{\alpha - \lambda : \alpha \in a\}$. By interpreting $a - \lambda$ as $\{x/\lambda : x \in a\}$ the preceding integral relation gives $E^P(a)x$ instead of $E^S(a)x$.
G. L. Krabbe.

Praktische Analysis:

Numerische Mathematik. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag.

Bd. 1, Heft 1 ist erschienen im Februar 1959. Die Zeitschrift erscheint zwanglos in einzeln berechneten Heften; fünf Hefte bilden einen Band, der maximal DM 100,— kosten wird.

● Bericht über das Internationale Mathematiker-Kolloquium, Dresden, 22. bis 27. November 1955, Aktuelle Probleme der Rechentechnik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. VIII, 155 S.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

Ostrowski, Alexander: Über näherungsweise Auflösung von Systemen homogener linearer Gleichungen. Z. angew. Math. Phys. 8, 280—285 (1957).

Zum homogenen Gleichungssystem (1) $S\xi=0$ mit singularärer (n,n) -Matrix S vom Range $n-k$ wird das System mit gestörter Matrix $S+A$ betrachtet, wo A eine (n,n) -Matrix mit gegen 0 strebenden Elementen und mit $\det(S+A) \neq 0$ ist. Nimmt man nun an Stelle des homogenen das inhomogene System (2) $(S+A)\xi = \eta$ mit beliebig gewähltem festen Vektor η derart, daß $S\xi = \eta$ keine Lösung hat, so wird gezeigt, daß sich der zur Lösung ξ von (2) gebildete normierte Vektor $\xi/|\xi|$ von einer Lösung des Systems (1) um $O(\|A\|)$ unterscheidet ($\|A\|$ = Norm von A).

R. Zurmühl.

Faddeev (Faddeyev), D. K.: On certain sequences of polynomials useful for the construction of iteration methods for the solution of systems of linear algebraic equations. Vestnik Leningradsk. Univ. 13, Nr. 7 (Ser. Mat. Mech. Astron. 2), 155—159, engl. Zusammenfassg. 159 (1958) [Russisch].

A remarkable sequence of polynomials $f_n(t)$ is defined by the following recurrence: $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = t$, $f_n(t) = (1 + \alpha_n) t f_{n-1}(t) - \alpha_n f_{n-2}(t)$ ($n \geq 2$). Then

$f_n(0, \alpha_2, \dots, \alpha_m, 0, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n; t) = f_m(0, \alpha_2, \dots, \alpha_m; t) f_{n-m}(0, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n; t)$ and since $f_n(t)$ is linear in α_n , it follows that for any fixed value of t the max $|f_n(t)|$ on the cube $-1 \leq \alpha_i \leq 1$ ($i = 2, \dots, n$) is assumed at a vertex: $\alpha_i = \varepsilon_i = \pm 1$; or $-1 \leq t \leq 1$ one has $f_n(0, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n; t) = T_{m_n}(t) = \cos(m_n \arccos t)$

where $m_n = 1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n$, $m_0 = 0$, $m_1 = 1$, and $f_n(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n; t) = \sum_{\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n = \pm 1} 2^{-n} (1 + \varepsilon_2 \alpha_2) \dots (1 + \varepsilon_n \alpha_n) T_{m_n}(t)$.

Finally it is shown that $f_n(t) \rightarrow 0$ uniformly as $n \rightarrow \infty$ if $0 \leq \alpha_i \leq \alpha < 1$ in every interval $-a \leq t \leq a$ if $|a| < 1$. — Now let $X = BX + F$ be a system of linear equations with a real symmetric matrix B having all its characteristic roots in the interval $-1 < \lambda < 1$. For every choice of a sequence (α_n) the iteration $X_n = (1 + \alpha_n)(BX_{n-1} + F) - \alpha_n X_{n-2}$ ($n \geq 2$) tends to the solution X^* (the ordinary iteration is obtained for $\alpha_n = 0$). Denoting by $Y_n = X^* - X_n$ the error vector of the approximation, one finds that $Y_n = (1 + \alpha_n)BY_{n-1} - \alpha_n Y_{n-2}$ and therefore $Y_n = f_n(B)Y_0$. The convergence is then discussed for certain sequences (α_n) for which this „universal method“ leads to iterations that have been introduced earlier by other authors; cf. e.g. C. Lanczos, Proc. Assoc. Computing Machinery Toronto 1952, 124—133 (1953).

H. Schwerdtfeger.

Gugnina, V. I.: Erweiterung einer Methode von D. K. Faddeev auf Polynommatrizen. Doklady Akad. Nauk Uzb. SSR 1958, Nr. 1, 5—10 (1958) [Russisch].

About 1949 D. K. Faddeev [cf. Faddeev and Sominskij, this Zbl. 47, 252] and M. N. Faddeeva [Numerische Methoden der linearen Algebra (this Zbl. 1, 240), p. 177] [and others, cf. G. E. Forsythe and L. W. Strauss, J. Math. Physics 34, 152—156 (1955) (reviewer's remark)] proposed a finite recurrent method for the calculation of the coefficients of the characteristic polynomial of a square matrix A and of the coefficient matrices of the adjoint matrix of $\lambda E - A$. This method, a modification of an older method of Leverrier (cf. Faddeeva, l. c.) is extended to a not necessarily linear polynomial matrix

$$A(\lambda) = \lambda^s E - \lambda^{s-1} A_1 - \dots - A_s.$$

The coefficients α_r of the polynomial

$$|A(\lambda)| = \lambda^{ns} + \alpha_1 \lambda^{ns-1} + \dots + \alpha_{ns-1} \lambda + \alpha_{ns}$$

and the coefficient matrices $B_1, \dots, B_{(n-1)s}$ of the adjoint of $A(\lambda)$ are obtained in the following way: Let

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1, C_2 = A_2 + A_1 B_1, \dots, C_s = A_s + A_{s-1} B_1 + \dots + A_1 B_{s-1}, \\ C_{s+1} &= A_s B_1 + \dots + A_1 B_s, \dots, C_{(n-1)s} = A_s B_{(n-1)s-s} + \dots + A_1 B_{(n-1)s-1}, \\ C_{(n-1)s+\mu} &= A_s B_{(n-1)s-(s-\mu)} + A_{s-1} B_{(n-1)s-(s-\mu-1)} + \dots \\ &\quad + A_{\mu+1} B_{(n-1)s-s} + A_1 B_{(n-1)s-1} \quad (\mu = 1, \dots, s-1), \\ C_{ns} &= A_s B_{(n-1)s}; \\ \alpha_1 &= -\text{Tr } C_1, \alpha_2 = -\frac{1}{2} \text{Tr } (C_2 + A_2), \dots, \\ \alpha_s &= s^{-1} \text{Tr } (C_s + (s-1) A_s + \dots + 2 A_3 B_{s-3} + A_2 B_{s-2}), \\ \alpha_{s+1} &= -(s+1)^{-1} \text{Tr } (C_{s+1} + (s-1) A_s B_1 + \dots + 2 A_3 B_{s-2} + A_2 B_{s-1}), \dots, \\ \alpha_{(n-1)s} &= -[(n-1)s]^{-1} \text{Tr } (C_{(n-1)s} + (s-1) A_s B_{(n-1)s-s} + \dots \\ &\quad + 2 A_3 B_{(n-1)s-3} + A_2 B_{(n-1)s-2}), \dots, \\ \alpha_{(n-1)s+\mu} &= -[(n-1)s+\mu]^{-1} \text{Tr } (\mu C_{(n-1)s+\mu} + (s-\mu) A_s B_{(n-1)s+\mu-s} + \dots \\ &\quad + 2 A_{\mu+2} B_{(n-1)s-2} + A_{\mu+1} B_{(n-1)s-1}) \quad (\mu = 1, \dots, s-1), \\ \alpha_{ns} &= -(ns)^{-1} \text{Tr } (C_{ns}) \end{aligned}$$

and put

$$B_\nu = C_\nu + x_\nu E \quad (\nu = 1, \dots, ns).$$

The relations $B_{(n-1)s+\mu} = 0$ ($\mu = 1, \dots, s$) may be used as control formulae. The results are compared with those by Aržanich (Doklady Akad. Nauk Uzb. SSR 1951, Nr. 7 and 1952, Nr. 12) and there is an example of a numerical two-rowed polynomial matrix of degree 3.

H. Schwerdtfeger.

Bauer, F. L.: Beiträge zum Danilewski-Verfahren. Ber. Internat. Math.-Kolloquium Dresden, 22. bis 27. Nov. 1955, 133—139 (1957).

L'A. examine la méthode de Danilewski (ce Zbl. 16, 318) au point de vue de son utilisation numérique. Il propose: — des modifications qui en simplifient la programmation ou permettent d'éviter les pivots trop petits; — des généralisations qui permettent d'améliorer la qualité des résultats de rattacher la méthode à d'autres propriétés connues et de disposer de preuves.

J. Kuntzmann.

Saul'ev (Sauliev), V. K.: The solution of parabolic equations of any order by means of nets. Doklady Akad. Nauk SSSR 119, 655—658 (1958) [Russisch].

Betrachtet wird die Gleichung $\partial U / \partial t + (-1)^m \partial^{2m} U / \partial x^{2m} = 0$ für $m = 2, 3, \dots$. Gesucht wird eine Funktion U , die der Gleichung und folgenden Randbedingungen genügt: $U(x, 0) = f(x)$ ($0 < x < 1$),

$$\partial^{2p} U(0, t) / \partial x^{2p} = \partial^{2p} U(1, t) / \partial x^{2p} = 0 \quad (p = 0, 1, \dots, m-1; \quad 0 \leq t \leq T).$$

Die Gleichung wird ersetzt durch

$$(u_{i,k+1} - u_{i,k})/l + (-1)^m a \Delta^{2m} u_{i-m,k+1} / h^{2m} + (-1)^m \Delta^{2m} u_{i-m,k} / h^{2m} = 0$$

($i = 1, 2, \dots, n-1; k = 0, 1, \dots, [T/l] - 1$) mit $u_{i,k} = u(ih, kh)$ ($h = 1/n$ und Schrittweite in bezug auf x und t), $\Delta^{2m} u_{i-m,k} = \sum_{j=0}^{2m} (-1)^j \binom{2m}{j} u_{i-m-j,k}$, $0 \leq a \leq 1$.

Den Randbedingungen entsprechen die Beziehungen $u_{i,0} = f(ih)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), $u_{-q,k} = -u_{q,k}$, $u_{n+q,k} = -u_{n-q,k}$ ($q = 0, 1, \dots, m-1; k = 0, 1, \dots, [T/l]$). Die gegebene Gleichung mit den Randbedingungen ist damit durch ein System von Gleichungen ersetzt, das in Matrixschreibweise die Form hat $A u^{(k+1)} = B u^{(k)}$ ($k = 0, 1, \dots, [T/l] - 1$) mit $u^{(k)} = \{u_{1,k}, u_{2,k}, \dots, u_{n-1,k}\}$, $A = E - (-1)^m a l C^{2m} / h^{2m}$, $B = E + (-1)^m (1-a) l C^{2m} / h^{2m}$. Hierin ist E die Einheitsmatrix, und die Matrix C hat als Elemente der Hauptdiagonale $c_{ii} = -2$ der beiden benachbarten Diagonalen $c_{i,i+1} = c_{i+1,i} = 1$ und sonst $c_{ik} = 0$. Es gilt: Dieses System linearer algebraischer Gleichungen ist für jedes $0 \leq a \leq 1$ lösbar. Für $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ ist das Gleichungssystem absolut, d. h. für beliebiges h und stabil. Für $0 \leq a < \frac{1}{2}$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung für Stabilität des Bestehen der Ungleichung $l \leq h^{2m} / (1-2a) 2^{2m-1}$.

W. Schulz.

Aleksidze (Alexidze), M. A.: On the rate of the convergence of the iteration process in the case of a difference solution of the Dirichlet problem for Laplace's equation. Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 9—12 (1958) [Russisch].

Following Ljusternik [Trudy mat. Inst. Steklov 20, 49—64 (1947)] the author introduces the operator $D_\alpha = (1 + \alpha)^{-1} (D + \alpha)$ where

$$Du_{i,j} = \frac{1}{4} (u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \text{ so that}$$

$D_{1/4} = \frac{4}{5} D + \frac{1}{5}$ (not $\frac{4}{5} (D + 1)$) yields $D_{1/4} u_{i,j} = \frac{1}{5} (u_{i,j+1} + \dots + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + \dots + u_{i+1,j} + u_{i,j})$ which is only „a little more complicated than $Du_{i,j}$ and since division by 5 is more adapted to the decimal system, it seems to be worth while to investigate the application of the operator $D_{1/4}$. This is also reasonable with regard to the modern electronic computing machines“. Because $K_\alpha = (1 + \alpha)^{-1} (K + \alpha)$ is eigen value of D_α if K is eigen value of D , it follows that for $\alpha \geq 0$ the operator D_α leads to convergent iteration. The convergence is discussed in connection with an earlier note of the author (this Zbl. 80, 116) referring to the methods of Liebmann and Richardson. Cf. also S. Frankel (Math. Tables Aids Comput. 4, No. 30, 6 (1950)).

H. Schwerdtfeger.

Fox, P. and A. Ralston: On the numerical solution of the equations for spherical waves of finite amplitude. I. *J. Math. Physics* **36**, 313—328 (1958).

Les AA. étudient un phénomène de propagation d'ondes sphériques d'amplitude finie, déjà étudié par J. J. Unwin (cf. ce Zbl. **27**, 175). Leurs résultats, obtenus par la méthode des caractéristiques, sont différents de ceux d'Unwin. Ils sont contrôlés par divers tests (invariants, changement de pas). Une cause d'erreur possible dans le travail d'Unwin est indiquée.

J. Kuntzmann.

Roberts, Leonhard: On the numerical solution of the equations for spherical waves of finite amplitude. II. *J. Math. Physics* **36**, 329—337 (1958).

L'A. reprend un calcul déjà effectué par J. J. Unwin et par P. Fox et A. Ralston (voire le rapport précédent). Au lieu de la méthode des caractéristiques, il utilise la méthode ordinaire des différences et il garde les trois fonctions inconnues q , p et ω . Il traite également un cas numérique devant lequel ses prédécesseurs avaient reculé. Pour les exemples communs, les résultats sont qualitativement les mêmes que ceux de Fox et Ralston bien que l'écart entre les deux ne soit pas toujours négligeable.

J. Kuntzmann.

Lebedev, V. I.: The use of nets for the Sobolev type of equation. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **114**, 1166—1169 (1957) [Russisch].

Verf. führt den folgenden Satz an über Konvergenz der Differenzenmethode für die Gleichung vom Typus:

$$\sum_{x=0}^2 \frac{\partial^x}{\partial t^x} L_x u(x, t) = f(x, t): \quad \frac{\partial^{\lambda} u}{\partial t^{\lambda}} \Big|_{t=0} = \hat{\varphi}, \quad x = 0, 1, \quad u|_{\partial \Omega_N} = 0;$$

wo
$$L_x = \partial(a^{ik}(x) \partial/\partial x^k) / \partial x^i + a_0(x) \quad \text{mit} \quad -a^{ik}(x) \xi_i \xi_k \geq x |\xi|^2, \quad a_0 > 0;$$

$$L_x = \sum_{\beta=0}^{\alpha} a_{\beta}(x) D^{\beta}, \quad \alpha = 0, 1$$

im Raume $W_2^{(k)}(Q)$, wo $Q = [0, T] \times \Omega_N$ für $f \in W_2^{(k-1)}(Q)$, $\hat{\varphi} \in W_2^{(k)}(\Omega_N)$. Dabei gilt die Ungleichung:

$$\|\partial u / \partial t\|_{W_2^{(k)}(Q)} \leq c \left(\|\hat{\varphi}\|_{W_2^{(k)}(\Omega_N)} + \|\hat{\varphi}\|_{W_2^{(k)}(\Omega_N)} + \|f\|_{W_2^{(k-1)}(Q)} \right)$$

K. Maurin.

Lebedev, V. I.: Method of orthogonal projections for a finite difference analogue of a system of equations. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **113**, 1206—1209 (1957) [Russisch].

The author investigates the properties of a finite difference analogue of the system of equations: $\partial \bar{U} / \partial t = A \bar{U} - \text{grad } p + \bar{F}$, $\text{div } \bar{U} = 0$, where: $\bar{U} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{F} = (f_1, f_2, f_3)$ and A is a matrix with limited elements.

W. Wrona.

Giese, John H.: On the truncation error in a numerical solution of the Neumann problem for a rectangle. *J. Math. Physics* **37**, 169—177 (1958).

Verf. löst das ebene Neumannsche Problem für ein Rechteck approximativ nach der Methode der diskreten Fourier-Analyse von W. Wasow [*J. Res. nat. Bur. Standards* **48**, 345—348 (1952)]. Für die Laplacesche Differentialgleichung wird die gewöhnliche 5-Punkte-Differenzengleichung angesetzt, die Normalableitungen werden von gleicher Ordnung approximiert. Zwei einfache Beispiele zeigen, daß der Verfahrensfehler i. a. größenordnungsmäßig nicht kleiner als $O(h^2)$ zu erwarten ist (h = Maschenweite). Sind die auf den Rändern vorgegebenen Normalableitungen stetig und zweimal stetig differenzierbar, dann überschreitet der Fehler nicht $O(h^2 \log h)$.

G. Bertram.

Covert, Eugene E.: A note on an approximate calculation of Green's functions for built-up bodies. *J. Math. Physics* **37**, 58—65 (1958).

L'A. suggère une méthode pour la détermination approchée de fonctions de Green relatives à des domaines formés de la juxtaposition de domaines de formes

simples, avec des conditions sur les frontières communes. Cette méthode ramène le calcul à la résolution d'équations intégrales qui peut se faire par approximations successives. Un exemple est traité, pour un domaine plan formé de deux rectangles en forme de T .

Ch. Blanc.

Berger, J. M. and G. J. Lasher: The use of discrete Green's functions in the numerical solution of Poisson's equation. Illinois J. Math. 2, 593—607 (1958).

La méthode proposée consiste à écrire la solution exacte du problème de Poisson discret dans un rectangle. La fonction de Green n'est pas autre chose que l'inverse de la matrice des coefficients des inconnues dans les équations discrètes. On peut en donner une expression au moyen des valeurs propres et colonnes propres de la matrice. La forme de la région permet une séparation des variables. Les erreurs de calcul et le nombre d'opérations sont étudiés.

J. Kuntzmann.

Gispert, H.-G.: Numerische Behandlung eines nichtlinearen Variationsproblems aus der Gasdynamik. Ber. Internat. Math.-Kolloquium Dresden, 22. bis 27. Nov. 1955, 113—118 (1957).

L'écoulement stationnaire d'un fluide compressible autour d'un cylindre de révolution ou elliptique est ramené par des approximations convenables à un problème de calcul des variations à une variable et à 3 fonctions inconnues. Les équations d'Euler correspondantes sont linéarisées par l'emploi d'une itération et exploitées au moyen de différences. On a pris pour simplifier $\gamma = 1,5$ au lieu de 1,4. Les résultats paraissent très bons dès le premier tour d'itération.

J. Kuntzmann.

Obreschkoff, Nikola: Asymptotische Formeln zur angenäherten Auswertung von Summen unendlicher Reihen. Ber. Internat. Math.-Kolloquium Dresden, 22. bis 27. Nov. 1955, 119—125 (1957).

Unter je einer von vier betrachteten Bedingungen für das Verhältnis zweier aufeinanderfolgenden Reihenglieder werden für die betreffenden Restglieder asymptotische Formeln hergeleitet. Diese können auch zur angenäherten Berechnung der Summe unendlicher Reihen verwendet werden.

E. J. Nyström.

Wilkes, M. V. and D. J. Wheeler: Note on „A method for computing certain inverse functions“. Math. Tables Aids Comput. 11, 204 (1957).

Verf. verwenden die von D. R. Morrison (s. dies. Zbl. 73, 103) angegebene Methode zur stellenweisen Berechnung der inversen Funktionen und bemerken, daß für „ungünstige Werte“, z. B. bei $\cos 2^k x$ mit x nahe an $\pi/2^k$, die Genauigkeit nur die Hälfte der von Morrison angegebenen Stellenzahl ist und daß, obwohl die Methode sehr einfach arbeitet, sie nur langsam weiterkommt, daß daher für größere Maschinen andere Methoden bevorzugt werden sollten.

E. M. Bruins.

Coulmy, Geneviève: Opérations sur les courbes expérimentales. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 1799—1800 (1958).

Annonce d'une méthode de lissage basée sur la résolution par relaxation d'un système surabondant d'équations linéaires. Les détails manquent et seront donnés dans une autre publication. Deux formules de dérivation et une d'intégration approchée sont données.

J. Kuntzmann.

Bulabaev, T.: Experimentelle Bestimmung der Parameter des Rechenfehlers auf Nomogrammen. Vestnik Akad. Nauk Kazach. SSR 1958, Nr. 9, 111—118 (1958) [Russisch].

Verf. bestimmt die Parameter ε und ε_3 der Fehlergleichungen von Fluchtlinientafeln aus einer großen Zahl von Ablesungen, die statistisch ausgewertet wurden. ε ist der Fehler, der beim Einstellen der Lösungsgeraden entsteht. Zu seiner Bestimmung wurden ein speziell für diesen Zweck geeignetes Nomogramm konstruiert, bei dessen Gebrauch ε_3 vernachlässigt werden kann. Die statistische Auswertung von mehr als 500 Ablesungen ergab, daß der Fehler ε im ungünstigsten Fall (bei Strichstärken der Skalen und Träger von 0,2—0,3 mm) 0,15—0,20 mm nicht übersteigt. Bei Strichstärken der Skalen von 0,1 mm (erreicht durch Verkleinerung der Original-

zeichnung) sinkt der Wert auf 0,005 bis 0,02 mm. ε_3 ist der Fehler, der beim Ablesen auf der Ergebnisskala entsteht. Es wurden drei verschiedene Funktionskalen unter Schnittwinkeln von 20° – 160° in zahlreichen Versuchsreihen untersucht. Auch hier ergab sich, daß die Streuung von ε_3 selbst im ungünstigsten Fall (bei schiefen Schnitten) 0,2 mm nicht überschreitet. Diese Ergebnisse werden an einem weiteren Nomogramm überprüft und bestätigt. Der gefundene Wert $\varepsilon = \varepsilon_3 = 0,2$ kann demnach in den Fehlergleichungen verwendet werden.

K. Bögel-A. Stammberger.

Sauer, R.: Über die Münchner Rechenanlage „PERM“ und die Entwicklung der numerischen Mathematik. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 16, 39–54 (1957).

Die Arbeit gibt einen Überblick über den Aufbau der digitalen Rechenmaschine PERM der technischen Hochschule München (Proff. Piloty und Sauer). Diese ist eine Parallelmachine, rechnet (intern) im Dualsystem und besitzt (vorläufig) einen Magnettrommelspeicher mit einer Kapazität von 8192 Worten. Ihre Programme werden im 1-Adress-System geschrieben. Die Darstellung wird durch einige interessante Bemerkungen über die Methodik der Programmierung, die Wechselwirkungen zwischen der Organisation der modernen Rechenautomaten und der Entwicklung numerisch-mathematischer Methoden sowie über die wichtigsten voraussichtlichen Anwendungsgebiete der PERM abgeschlossen.

W. Nef.

Toma, Victor: Cifa-1. the electronic computer of the Institute of Physics of the Academy of the Rumanian People's Republic. Ber. Internat. Math.-Kolloquium Dresden, 22. bis 27. Nov. 1955, 27–41 (1957).

Schaltbilder und Befehlscode der ersten rumänischen Rechenanlage, deren Fertigstellung für 1956 vorgesehen war. Es ist ein binärer paralleler Magnettrommelrechner von der Wortlänge 31, der Befehlslänge 15, mit 1024 Speicherplätzen und mit 21 Befehlen. Zeiten: Addition $150\mu s$, Multiplikation und Division 5 ms, mittlere Zugriffszeit der Trommel 10 ms. Die arithmetischen Operationen sind im Sinne von R. F. Shaw [Review sci. Instr. 21, 687–693 (1950)] aufgebaut.

G. Beyer.

Schönhage, Arnold: Vier Neuentwicklungen auf dem Gebiet der elektronischen Rechenautomaten. Bl. Deutsch. Ges. Vers. Math. 4, 77–87 (1958).

(I) Siemens-Digitalrechner 2002, (II) ER 56 der Standard Elektrik Lorenz, (III) Z 22 der Firma Zuse K-G, (IV) X 1 der holländischen Firma Electrológica.

● **McCracken, D. D.:** Digital computer programming. (General Electric Series.) New York: John Wiley and Sons, Inc.; London: Chapman and Hall, Ltd. 1957. VII, 253 p. \$ 7,75; 62 s. net.

Das Buch wendet sich an jedermann, der sich mit der Programmierung und dem praktischen Arbeiten mit digitalen Rechengeräten vertraut machen will. Es bietet eine allgemeine Einführung in das genannte Gebiet unter Betonung der grundlegenden Prinzipien und mit dem Ziel, den Leser zur Aufstellung von Maschinenprogrammen für elektronische Rechenautomaten zu befähigen und ihn mit den dabei auftretenden Problemen vertraut zu machen. Auf die Grundlagen des logischen und technischen Aufbaus einer elektronischen Rechenmaschine wird dagegen nicht eingegangen. Irgendwelche Vorkenntnisse sind zur Lektüre des Buches nicht erforderlich. Bei Aufstellung von Maschinenprogrammen, wo es erforderlich ist, sich auf eine bestimmte Maschine und einen bestimmten Befehlscode zu beziehen, wird eine fiktive Maschine „TYDAC“ (Typical Digital Automatic Computer) zugrunde gelegt, die in ihrem Aufbau Elemente verschiedener zur Zeit auf dem Markt befindlicher Modelle von digitalen Rechenautomaten vereinigt. Das Buch ist daher vor allem für denjenigen von Vorteil, der sich in das Gebiet der Programmierung einarbeiten will, ohne das Arbeiten mit einer speziellen Maschine im Auge zu haben. Er wird nach Lektüre des Buches das Gelernte unschwer auf irgendeine der gebräuchlichen Maschinen anwenden können. Das Buch beginnt mit einer Auf-

zählung der Hauptbestandteile eines programmgesteuerten Rechenautomaten und der Erläuterung der Funktionen der einzelnen Teile. Es wird dabei über den Aufbau einer elektronischen Rechenmaschine jedoch nur das allernotwendigste von dem gesagt, was für den Benutzer einer solchen Maschine von Wichtigkeit ist. Sehr ausführlich wird dann in einem nächsten Kapitel auf die Art der Zahlendarstellung eingegangen und es werden die verschiedenen Möglichkeiten erörtert, die sich bei Beschränkung auf zweiwertige Variable bieten. Überdies werden die wichtigsten arithmetischen Prinzipien dargelegt und die Frage der Kommastellung auseinandergesetzt. Die restlichen Kapitel befassen sich dann ausschließlich mit Fragen der Programmierung. Nach ausführlicher und breiter Erörterung der Probleme, die durch die zyklische Struktur einer vorliegenden Aufgabe bedingt sind (Sprünge, bedingte Befehle, Adressenumrechnungen), wird das Flußdiagramm eingeführt und dessen Aufstellung an Beispielen geübt. Die folgenden Kapitel befassen sich dann mit der Verwendung von Indexregistern, dem Einbau von Unterprogrammen, mit den verschiedenen Möglichkeiten der Ein- und Ausgabe, der Verwendung von Zusatzspeichern, mit Methoden zur Programmprüfung und der Verwendung von Interpretiersystemen. Ein abschließendes Kapitel geht noch ganz kurz auf Methoden der automatischen Programmfertigung ein. Als Beispiel für einen Formelübersetzer wird die FORTRAN-Sprache für die Maschine IBM 704 kurz gestreift. In Anbetracht der Bedeutung, die Formelsprachen heute bereits haben oder in naher Zukunft haben werden, erscheinen diese Dinge jedoch als etwas zu kurz abgetan. Es sei noch erwähnt, daß jedes Kapitel durch eine Reihe von Übungsaufgaben ergänzt ist, an denen der Leser erproben kann, inwieweit er das Gelernte verstanden hat. *Th. Geis.*

● Wilkes, Maurice V., David Wheeler and Stanley Gill: *The preparation of programs for an electronic digital computer*. 2nd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1957. 238 p., 5 illus. \$ 7,50.

In dem vorliegenden Werk (1. Auflage s. dies. Zbl. 43, 129) behandeln die Verff. eingehend das Programmieren für die EDSAC (Computation Laboratory of the Cambridge University). Die EDSAC ist eine duale Einadress-Seriemaschine mit festem Komma. Der Speicher besteht aus sog. „mercury-delay-lines“ und enthält insgesamt 1024 Zellen zu 17 Dualziffern (bits). Der Ein- und Ausgang erfolgt mit Fenschreibereinrichtungen. Die EDSAC zeichnet sich vor andern Maschinen durch folgende Besonderheiten aus: a) sie arbeitet mit zwei verschiedenen Wortlängen; die einfache Wortlänge (17 Dualziffern) wird für Befehle und zum Abzählen verwendet, aber zum eigentlichen Rechnen benützt man die doppelte Wortlänge von 34 Dualziffern, die ungefähr 10 Dezimalen entspricht. b) Außer dem Akkumulator ist auch das Multiplikatorregister direkt der Einwirkung des Programms zugänglich, man kann daher Produkte ohne Zwischenspeicherung aufsummieren, was oft von großem Vorteil ist. Diese Möglichkeit bringt es allerdings mit sich, daß man dem „Löschen des Akkumulators“ besondere Aufmerksamkeit schenken muß. c) Die EDSAC hat keine eingebaute Division, diese muß vielmehr programmiert werden. d) Das Befehlssystem ist so aufgebaut, daß man die Programme im Dezimalsystem niederschreiben kann, der Programmierer braucht sich daher kaum mit dem Dualsystem zu befassen. — Wie aus den Ausführungen der Verff. hervorgeht, verfügt das Recheninstitut der Cambridge University über eine ausgedehnte Bibliothek von Unterprogrammen, von der beim Rechenbetrieb ausgiebig Gebrauch gemacht wird. Dementsprechend ist die Programmieranleitung auch sehr stark auf die Benützung von Bibliotheksprogrammen (library subroutines) ausgerichtet: Die Bibliotheksprogrammtechnik wird in Kap. 2 und 5 ausführlich beschrieben und es werden in Kap. 7 einige instruktive Beispiele für diese Technik angegeben. Ferner dürften den Leser vor allem die Ausführungen von Kap. 6 (Systematische Fehler-suche) und Kap. 8 („Höhere Programmierungsmethoden“) interessieren. — Der zweite Teil des Buches enthält Angaben über die zur Zeit verfügbaren Unterpro-

gramme; für einige derselben findet man detaillierte Beschreibungen (incl. Angabe der genauen Befehlsfolgen) im Teil 3. Die vollständige Befehlsliste der EDSAC, sowie eine Liste der „Kontrollkombinationen“, welche für die Herstellung von Bibliotheksprogrammen eine Rolle spielen, sind im Anhang zusammengestellt. Das sonst vorzügliche Werk erweckt dem unbefangenen Leser den Eindruck, daß man die meisten Probleme im wesentlichen durch Zusammenfügen von Bibliotheksprogrammen lösen könne, was natürlich keineswegs der Fall ist. Vielmehr treten in einem Rechenbetrieb häufig Probleme von erheblicher Kompliziertheit auf, die nur zu einem geringen Teil auf schon vorhandene Programme zurückgeführt werden können. Es ist daher zu bedauern, daß die Verff. auf ein bewährtes Hilfsmittel für solche Fälle, nämlich das Flußdiagramm (flow diagram) überhaupt nicht eingehen. Schon bei einigen der angeführten Programmbeispiele findet sich der Leser nicht leicht zurecht; ein Flußdiagramm würde in solchen Fällen das Verständnis sehr erleichtern.

H. Rutishauser.

Eršov (Ershov), A. P.: Programming of arithmetical operators. Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 427—430 (1958) [Russisch].

In dem, Ref. leider nicht zugänglichen, Buch „Ein programmierendes Programm für die BESM“ (Moskau 1958) hat Verf. ein System zur automatischen Programmierung auf der Moskauer Maschine BESM beschrieben. Dieses wird hier in zwei Punkten verbessert, die die Übersetzung arithmetischer Formeln in ein (unverzweigtes) Maschinenprogramm betreffen. 1. Bei der Zerlegung einer Formel in einzelne Drei-Adreß-Befehle K muß die Maschine jeden neu aufgestellten Befehl auf Identität mit den früheren prüfen. Bei naiver Programmierung dieses Vorgangs erfordert er einen zu n^2 proportionalen Zeitaufwand, wenn n die Zahl aller K ist. Verf. schlägt ein Verfahren vor, dessen Zeitaufwand zu n proportional wäre. Dazu ist aber noch eine statistische Untersuchung über die Struktur der zu programmierenden Formeln erforderlich. 2. Die K werden zunächst ungeordnet erzeugt und müssen dann in eine geeignete Reihenfolge gebracht und mit den endgültigen Adressen versehen werden. Dazu ordnet Verf. u. a. den K eine „Ordnungsfunktion“ $P(K)$ zu, die der von Rutishauser (dies. Zbl. 49, 212) angegebenen $H - a_k$ ähnlich ist. Wird jedes Zwischenergebnis nur einmal angerufen, so ist $P(K) =$ minimale Anzahl der Zwischenergebnis-Speicher, die zur Berechnung des Ergebnisses von K aus den Ausgangswerten unbedingt erforderlich sind. — Für beide genannten Punkte werden Flußdiagramme angegeben.

G. Beyer.

Viehnevetsky, R.: L'optimisation non linéaire des servomécanismes. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 44, 493—502 (1958).

Meier, Henning: Grundlagen der Schaltalgebra. Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. 3, 396—416 (1958).

The author gives a very clear and original account of some well-known elementary facts about the Boolean algebra for the study of relay switching circuits. The analogy between the logical operations, the operations of Boolean algebra and the functioning of the contacts of a relay is shown. The importance of the Boolean algebra in switching computers and technical machines is given. The paper ends with same references. A more complete bibliography is indicated in Avtomat. Telemekh. 16, 411—420 (1955), and 18, 145—162 (1957), by G. H. Povarov (i. e. the papers of C. E. Shannon, Gr. C. Moisil, M. A. Gavrilov, R. Gréa and R. Higonnet. Shestakov, Roginski, Luntz).

M. Nedelcu.

Zemanek, H.: Schaltalgebra. Nachrichtentechnische Fachberichte 3, 93—113 (1957).

Der Artikel gibt eine umfangreiche Darstellung der Grundlagen und des Standes der Schaltalgebra im Jahre 1956 und umfaßt 16 Kapitel. In den ersten sechs Kapiteln wird der Zusammenhang, der zwischen der Schaltalgebra und der logistischen Algebra besteht, gezeigt, ferner der verwendete Formalismus, sowie einige Betrachtungen.

tungen über die Funktionen von einer, zwei und n Variablen. Das 7. Kapitel beschäftigt sich mit der Vereinfachung des Formalismus und hebt die Tatsache hervor, daß im Falle der Schaltalgebra nur zwei Zeichen nötig sind. Es werden gleichzeitig einige allgemeine Sätze über assoziative und kommutative Gesetze gegeben. Im 8. Kapitel wird die Normalform-Darstellung der Funktionen hervorgehoben, und es werden weiter einige Betrachtungen über ihre Abspaltung gemacht. Das 9. Kapitel ist den vermaschten Netzen und ihrer Berechnung mittels Matrizen theorie vorbehalten. Das 10. Kapitel beschäftigt sich mit der Beschreibung zweier logischer Maschinen. In den folgenden drei Kapiteln werden die praktischen Methoden für den Entwurf und die Lösung der Schaltungen gezeigt. Nachdem im 14. Kapitel die Möglichkeiten, die uns die Schaltalgebra darbietet, zusammengefaßt sind, werden im 15. Kapitel einige einfache Rechenbeispiele gegeben. Der Artikel endet mit einem reichen Schrifttumsverzeichnis, das dem 16. Kapitel beigegeben ist.

G. Ioanin.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Dinculeanu, N.: *Remarques sur les mesures dans les espaces produits*. Colloquium math. 5, 51—54 (1958).

Soit J un ensemble et pour tout $j \in J$ soit $X(j)$ un espace et $T(j)$ une tribu de parties de $X(j)$. Soit $E = \prod_{j \in J} X(j)$ et pour toute partie finie $I \subset J$ soient $E^I = \prod_{j \in I} X(j)$, pr_I la projection de E sur E^I et T^I la tribu produit $\prod_{j \in I} T(j)$. Soit T la réunion des tribus $\text{pr}_I^{-1}(T^I)$ et soit P une probabilité définie sur T , dénombrablement additive sur chaque $\text{pr}_I^{-1}(T^I)$. L'auteur donne des conditions suffisantes pour que P soit dénombrablement additive sur T . Les conditions sont exprimées à l'aide des probabilités conditionnées $P(\text{pr}_I(z) = z^I, \text{pr}_I^{-1}(A_I))$.

C. Ionescu Tulcea.

Kampé de Fériet, Joseph: *Mesures de probabilités sur les espaces de Banach admettant une base dénombrable*. C. r. Acad. Sci., Paris 244, 2450—2454 (1957).

Der Verf. konstruiert eine Klasse von Wahrscheinlichkeitsmaßen für beliebige Banach-Räume mit einer abzählbaren Basis. Eine Funktion $x(t)$ der Klasse $C[0, 1]$, stetig im Intervall $[0, 1]$ ist im Gegensatz zur Maßdefinition von N. Wiener in diesem Fall fast sicher von endlicher Schwankung.

W. Saxon.

Kampé de Fériet, Joseph: *Mesures de probabilité sur l'espace de Banach $C_0[0, 1]$* . C. r. Acad. Sci., Paris 246, 3401—3404 (1958).

Herleitung weiterer Eigenschaften der in vorstehend besprochener Note definierten Wahrscheinlichkeitsmaße in Banach-Räumen mit einer abzählbaren Basis.

W. Saxon.

Bergström, Harald: *Über die Konvergenz von Faltungen in verschiedenen Weierstraßnormen*. Math. Nachr. 18, H. L. Schmid-Gedächtnisband 244—264 (1958).

Diese Arbeit stellt eine Ergänzung zu einer Abhandlung des gleichen Verf. (dies. Zbl. 78, 314) dar. In jener Arbeit wurde ein gewisses Grenzwertproblem gelöst mit Hilfe der Weierstraß-Transformation

$$f(\sigma, x) = \Phi(x/\sigma) * f(x) \text{ mit } \Phi'(x) = (\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-x^2/2}.$$

In der vorliegenden Abhandlung werden allgemeine Transformationen $f(x) * \psi(x/\sigma)$ (Weierstraß-Transformation $W(\psi)$) mit irgendeiner Funktion $\psi(x)$ betrachtet, für welche die Faltung definiert ist. Als Norm gilt in diesem Fall

$$N_\sigma(\psi, f) = \sup_x |f(x) * \psi\left(\frac{x}{\sigma}\right)|.$$

D bedeute die Menge aller Verteilungs-Funktionen, $R(D)$ die Menge aller ihrer linearen Verbindungen. Eine Menge M , die Untermenge eines normierten linearen Raumes ist, heißt in der Norm vollständig, wenn jede Folge mit Elementen aus M , die in der Norm Cauchy-konvergent ist, in der Norm gegen ein Element aus M strebt. Der Verf. zeigt, daß D in $W(\psi)$, $\psi \in R(D)$ dann und nur dann vollständig ist, wenn $\psi(\infty) \neq 0$. Daneben untersucht er noch andere Funktionsklassen in ähnlichem Sinne.

W. Saxer.

Bonferroni, Carlo Emilio: La mediana ponderata in una distribuzione continua. *Scritti Mat. in Onore di F. Sibirani* 21—31 (1957).

Betrachtet man eine Funktion $x(t)$ einer zufälligen Variablen, die eine Gleichverteilung besitzt, so daß der Erwartungswert dieser Funktion existiert, dann bleibt dieser invariant, wenn man $x(t)$ durch eine beliebige equimeßbare Funktion $x^*(t)$ ersetzt. Gilt dies auch für eine beliebige Dichte $f(t)$? Verf. behauptet dies mindestens für stückweise differenzierbare Funktionen $x(t)$ unter der Annahme, daß $f(t)$ außer-

halb $a \leq t \leq b$ verschwindet, indem er $\int_a^b x^*(t) f^*(t) dt = \int_a^b x(t) f(t) dt$ zeigt, wobei $f^*(t)$ eine passende Dichte ist.

L. Schmetterer.

Fisz, M.: A limit theorem for empirical distribution functions. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* 5, 695—698 (1957).

Let $S_j(x)$ ($j = 1, 2, 3$) denote the empirical distribution functions (d. f.) of 3 simple samples drawn independently from a population with a continuous d. f. If n_j is the size of the j th sample, it is assumed $\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \frac{n_j}{n_1} = \alpha_j$ ($j = 2, 3$), and let $n_{ij} = n_i n_j / (n_i + n_j)$ ($i, j = 1, 2, 3; i \neq j$). The author considers the two stochastic processes:

$$Y(x) = [(\sqrt{n_{12}} + \sqrt{n_{13}}) S_1(x) - \sqrt{n_{12}} S_2(x) - \sqrt{n_{13}} S_3(x)] \cdot \left[\sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{1}{n_1} \sqrt{n_{12} n_{13}}} \right],$$

$$Z(x) = [(\sqrt{n_{12}} - \sqrt{n_{13}}) S_1(x) - \sqrt{n_{12}} S_2(x) + \sqrt{n_{13}} S_3(x)] \cdot \left[\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{n_1} \sqrt{n_{12} n_{13}}} \right].$$

Using an idea of Doob (this Zbl. 35, 89) the author states that the functionals $A^+ = \max_x Y(x)$, $B^+ = \max_x Z(x)$ are asymptotically independent as $n_1 \rightarrow \infty$, yielding

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} P(A^+ < a, B^+ < b) = [1 - \exp(-2a^2)] [1 - \exp(-2b^2)].$$

(a, b positive). Analogous results are obtained for more than 3 samples.

T. V. Narayana.

Fuchs, A.: Some limit theorems for nonhomogeneous Markoff processes. *Trans. Amer. math. Soc.* 86, 511—531 (1957).

Après un bref rappel des résultats concernant les chaînes de Markoff à un nombre fini d'états, l'a. étudie les propriétés ergodiques des processus de Markoff homogènes dans le temps. Il étend le théorème principal concernant ces derniers aux processus non homogènes dans le temps et aboutit finalement à une conclusion du type suivant: Si la fonction de répartition de passage du processus satisfait à une condition du type condition de Doeblin, la fonction de répartition a priori à l'instant t , $\Phi(t, E) = P(X(t) \in E)$ $t \in R$. E étant un ensemble linéaire mesurable- B , tend lorsque $t \rightarrow +\infty$ vers une fonction de répartition limite $\Lambda(E)$, la convergence étant en outre exponentielle. Mais, alors que dans le cas homogène dans le temps l'existence de la limite $\Lambda(E)$ était assurée par la seule condition de Doeblin, il faut, dans le cas non-homogène, supposer a priori qu'il existe une fonction $\Lambda(E)$ telle que

$$\Lambda(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(dx) F(t, x; \tau, E), \quad t < \tau, \quad \text{où} \quad F(t, x; \tau, E) = P(X(\tau) \in E | X(t) = x)$$

est la fonction de répartition de passage du processus; la fonction $\Lambda(E)$ (s'il en existe une) ainsi définie, est alors dans la fonction de répartition limite.

R. Féron.

Kendall, David G.: A totally unstable denumerable Markov process. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 9, 149—160 (1958).

A set of transition probabilities $\{p_{ij}(t); i, j = 1, 2, \dots; t \geq 0\}$ of a temporally homogeneous Markov process for which all states are instantaneous is shown to exist. The method used permits the Laplace transforms of each $p_{ij}(\cdot)$ to be written in closed form. Dobrušin (this Zbl. 78, 320) and Feller and McKean (this Zbl. 72, 353) have previously and independently constructed examples of such Markov processes. The author mentions in a note added in proof, that D. Backwell (personal communication to D. Kendall) has yet another example constructed using an extremely simple and direct method.

R. Chacon.

Breny, H.: Sur les „délais de passage“ de certaines fonctions aléatoires de Markov. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 27, 5—16 (1958).

Let $n(t)$ be a homogeneous Markov process, where the possible values of the random variables $n(t)$ are the non-negative integers. It is supposed that from state k the possible transitions are only the following $k \rightarrow k-1$, $k, k+1$. The author derives relations among others for the Laplace-transforms $\tilde{f}_R^S(\lambda)$, $\tilde{g}_R^S(\lambda)$ of the probabilities

$$(1) F_R^S(L) = P(\theta_R^S > L | n(s) = S) \quad (2) H_R^S(L) = P(\alpha_R^S > L | n(s) = S)$$

where θ_R^S (resp. α_R^S) is the length of time after S which the system spends in the states $\geq R_S$ (resp. $\leq R$). In case of $R = S-1$ recursive relations are given for $\tilde{f}_R^S(\lambda)$, $\tilde{g}_R^S(\lambda)$. As an example fibre bundles conceived as stochastic processes are treated.

A. Prékopa.

Takács, L.: On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 8, 169—191 (1957).

A system has two states A, B and they are alternating at random in time. The process is supposed starting with the state A . Let $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots$ be the lengths of time intervals the system spends in the states A and B , respectively. It is assumed that the above random variables are independent and the distributions $P\{\xi_n < x\} = G(x)$, $P\{\eta_n \leq x\} = H(x)$ are independent of n . Let $\alpha(t)$ and $\beta(t)$ be the total time the system spends in A and B , respectively, up to the time t . The distribution of $\beta(t)$ is expressed in terms of $G(x)$, $H(x)$ and is shown that its standardized version is asymptotically normal (when $t \rightarrow \infty$) provided $\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 < \infty$ where

$$\sigma_\alpha^2 = \int_0^\infty (x - \alpha)^2 dG(x), \quad \sigma_\beta^2 = \int_0^\infty (x - \beta)^2 dH(x), \quad \alpha = \int_0^\infty x dG(x), \quad \beta = \int_0^\infty x dH(x).$$

If $\alpha < \infty$, $\beta < \infty$ and $P_B(t) = P(\xi(t) \in B)$ then

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P_B(u) du = \frac{\beta}{\alpha + \beta}.$$

If $F(x) = G(x) * H(x)$ and $F(x)$ is not a lattice-distribution then $\lim_{t \rightarrow \infty} P_B(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$.

If $\alpha < \infty$, $\beta < \infty$ then $M[\beta(t)]/t \rightarrow \beta/(\alpha + \beta)$ when $t \rightarrow \infty$. If $\sigma_\alpha^2 < \infty$, $\sigma_\beta^2 < \infty$ and $F(x)$ is not a lattice distribution, then

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[M\{\beta(t)\} - \frac{\beta t}{\alpha + \beta} \right] = \frac{\beta \sigma_\alpha^2 - \alpha \sigma_\beta^2}{2(\alpha + \beta)^2} - \frac{\alpha \beta}{2(\alpha + \beta)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D^2(\beta(t))}{t} = \frac{\alpha^2 \sigma_\beta^2 + \beta^2 \sigma_\alpha^2}{(\alpha + \beta)^3}.$$

Examples are also given. The problem was previously considered by several authors in case of Markov and recurrent processes.

A. Prékopa.

Takács, Lajos: On a stochastic process concerning some waiting time problems. Teor. Verojatn. Primen. 2, 92—105, russ. Zusammenfassg. 105 (1957).

m automatic servicing machines are working independently and continuously in time. At some time they may break down and then will be repaired by a single repair man. The working period of a machine is a random variable having an exponential distribution with the parameter μ , the same for every machine. The reparation time is also a random variable with the probability distribution $F(x)$ being also the same for the different machines. Let $\eta(t)$ be the number of machines working at time t , τ_1, τ_2, \dots the endpoints of the consecutive servicing times and $\eta(\tau_n - 0) = \eta_n$. It is proved that the limiting distributions

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\eta(t) = k\} = P_k^* \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\eta_n = k\} = P_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

exist. If $\chi(t)$ is the time from t up to the termination of the actual servicing (provided servicing is going on) then the limit

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\chi(t) \leq x | \eta(t) = k\} = F_k^*(x) \quad (k = 0, 1, \dots, m-1)$$

exist. Supposing the stationary case, when the distributions on the right hand side of (1) and (2) are the exact distributions for finite t -values, the distribution of the waiting time of a machine is denoted by $G_m(x)$ and by Γ_m its expectation. The author proves that

$$P_k = \sum_{r=k}^{m-1} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B_r, \quad B_r = C_r \sum_{j=r}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \frac{1}{C_i},$$

$$C_0 = 1, \quad C_r = \prod_{i=1}^r \frac{\varphi(i\mu)}{1 - \varphi(i\mu)}, \quad \varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x).$$

moreover

$$P_k^* = \sum_{r=k}^m (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B_r^*,$$

$$B_r^* = \frac{m C_{r-1}}{r} \sum_{j=r-1}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j} \left| 1 + m \alpha \mu \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j} \right|$$

$$\alpha = \int_0^\infty x dF(x), \quad B_0^* = 1.$$

Both P_k and P_k^* are independent of $\eta(0)$. The explicit forms of $F_k^*(x)$, $G_m(x)$, Γ_m are also determined. The latter equals

$$(m-1)\alpha - \left(1 - \frac{1}{1 - \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}\right) \left(\frac{\sigma^2 + \alpha^2}{2\alpha} - \frac{\alpha}{1 - \varphi(\mu)}\right), \quad \sigma^2 = \int_0^\infty (x - \alpha)^2 dF(x).$$

α and σ^2 may be infinite. The author states that the formula given previously by Chinčîn and others for Γ_m is not correct.

A. Prékopa.

Koronkevič, A. I.: Some remarks on evaluation the accuracy of linear extrapolation and filtration. Teor. Verojatn. Primen. 2, 116—121. engl. Zusammenfassg. 121 (1957) [Russisch].

Let $\xi(t)$ be a stationary process with mean 0. Denote by $\sigma_{\tau,e}^2$ and $\sigma_{\tau,f}^2$ the mean square error of extrapolation and filtration, respectively, where τ is the forecast time. The author calls the values

$$N_e = \frac{D^2[\xi(t)] - \sigma_{\tau,e}^2}{D^2[\xi(t)]}, \quad N_f = \frac{D^2[\xi(t)] - \sigma_{\tau,f}^2}{D^2[\xi(t)]}$$

the accuracy criterion of extrapolation and filtration, respectively where $\xi(t) = \xi(t) - \eta(t)$; $\eta(t)$ is the random noise and $M\{\xi(t)\eta(t)\} = 0$. The value $(N_e - N_f)/N_e$ is called the distortion criterion and is introduced to evaluate the effects of noise.

The author proves the following two theorems. 1. If either $f_{\xi}(\lambda)$, the spectral density of the process $\xi(t)$, equals $A/|\lambda - x|^2$ and $f_{\eta}(\lambda)$, the spectral density of $\eta(t)$, is a rational function of λ (including also the white noise) or $f_{\xi}(\lambda) = C f_{\eta}(\lambda)$, then $\sigma_{\tau, f}^2 = S D^2(\xi(t)) + (1 - S) \sigma_{\tau, e}^2$, where S is a constant ($0 \leq S \leq 1$) depending on the processes $\xi(t)$ and $\eta(t)$. 2. If $f_{\xi}(\lambda) = A/|\lambda - x|^2$ and $f_{\eta}(\lambda)$ is a rational function of λ , then

$$\sigma_{\tau, f}^2 = V \sigma_{\tau, f(w)}^2 - (V - 1) D^2(\xi(t))$$

where $\sigma_{\tau, f(w)}^2$ is the mean square error of filtration of white noise and V is a constant depending on the processes $\xi(t)$, $\eta(t)$. A. Prékopa.

Čerkašov, I. D.: On transforming the diffusion process to a Wiener process. Teor. Verojatn. Primen. 2, 384—388, engl. Zusammenfassg. 388 (1957) [Russisch].

Let $X(t)$ be a Markov process with $F(t, x; \tau, \xi) = P\{X(\tau) \leq \xi | X(t) = x\}$ and $f(t, x; \tau, \xi) = F'_{\xi}(t, x; \tau, \xi)$. Suppose that $X(t)$ is of the diffusion type i. e. the function f satisfies the Kolmogorov-equation

$$(1) \quad \partial f / \partial t + a(t, x) \partial^2 f / \partial x^2 + b(t, x) \partial f / \partial x = 0.$$

The author gives a necessary and sufficient condition for the existence of a transformation of the type

$$t' = \varphi(t), \quad \tau' = \varphi(\tau), \quad X' = \psi(t, x), \quad \xi' = \psi(\tau, \xi),$$

$$(2) \quad f(t, x; \tau, \xi) = (\partial \varphi(\tau, \xi) / \partial \xi) f^1(t', X'; \tau', \xi')$$

leading equation (1) into $\partial f^1 / \partial t + \partial^2 f^1 / \partial x^2 = 0$ which is the equation of the density of the transition probability function in case of a Brownian movement process. This condition is based upon the functions $a(t, x)$ and $b(t, x)$. When the author's conditions are fulfilled the transformation (2) is uniquely determined. The explicit forms of $\varphi(t)$ and $\psi(t, x)$ are also given. The result is illustrated by an example. A. Prékopa.

Aczél, J.: Remarques algébriques sur la solution donnée par M. Fréchet à l'équation de Kolmogoroff. Publ. math., Debrecen 4, 33—42 (1955).

The author considers the functional equation $P(s, t) P(t, u) = P(s, u)$ for finite quadratic matrices where $s \leq t \leq u$. In case of stochastic matrices this equation was investigated first by Kolmogorov (this Zbl. 1, 149). For general non-singular finite dimensional matrices the solution was given by Fréchet [Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités. II. (1938; this Zbl. 18, 413)]. Dropping the condition of non-singularity the author gives the general solution of the above functional equation. An abstract version of the equation, for elements of a group instead of matrices, is also investigated. A. Prékopa.

Aczél, J. et E. Egerváry: Remarques algébriques sur la solution donnée par M. Fréchet à l'équation de Kolmogoroff. II. Publ. math., Debrecen 5, 60—71 (1957).

Continuing the investigations of the paper reviewed above the authors consider the equation for finite (n -dimensional) quadratic matrices with real valued elements (1) $P(s, t) P(t, u) = P(s, u)$. In the first part of the paper no supposition is made about the ordering of s, t, u , they are independent variables. If a solution of (1) has the rank r for at least one pair s, t , then the same holds for every pair. Such a solution is called a solution of rank r . It is proved that the general solution of rank r ($r < n$) of the equation (1) is $P(t, u) = \Pi(t)^{-1} F \Pi(u)$, where $\Pi(t)$ is a non-singular matrix with arbitrary functions $\pi_{ij}(t)$ as elements and $F = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ where E_r is the r -dimensional unit matrix, has the dimension n and the zeros are matrices with 0-elements. Let $p_{ik}(t, u)$ denote the elements of $P(t, u)$. The equality $\sum_{k=1}^n p_{ik}(t, u) = 1$ holds if and only if

$$\sum_{j=1}^n \pi_{ij}(t) = \text{const} \quad \text{if } i = 1, 2, \dots, r; = 0 \quad \text{if } i = r + 1, \dots, n.$$

The proof is based upon the factorization of matrices. In the second part of the paper it is supposed (as in the theory of probability) that in (1) $s \leq t \leq u$. The above mentioned results hold also in this case with the corresponding modification referring to the ordering of s, t, u . A. Prékopa.

Akutowicz, Edwin J.: On an explicit formula in linear least squares prediction. Math. Scandinav. 5, 261—266 (1958).

In Abschnitt 1 wird gezeigt, welche mengentheoretischen Bedingungen im Hilbertschen Raum erfüllt sein müssen, um eine lineare Voraussage auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate für den Fortpflanzungsvektor y_0 und die Extrapolation x_n^* zu machen, die nur auf dem Spektrum der ursprünglichen Zufallsfolge $\{x_{-\mu}\}$ basiert. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Darstellung des Fortpflanzungsvektors in der Form

$$y_0 = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_0^M a_\mu x_{-\mu} \quad \text{mit} \quad \sum_0^\infty |a_\mu|^2 < \infty$$

werden in Abschnitt 2 abgeleitet, wobei die a_μ an die nachfolgenden Bedingungen gebunden sind:

$$[\Phi(z)]^{-1} = \sum_0^\infty a_\mu z^\mu \quad \text{mit} \quad |z| < 1$$

muß zur Hardyklasse H^2 [s. A. Zygmund, Trigonometrical series (1935; dies. Zbl. 11, 17)] gehören, und in der reziproken Funktion

$$\Phi(z) = \sum_0^\infty b_\nu^* z^\nu \quad \text{mit} \quad |z| < 1$$

müssen die $b_\nu = (x_0, y_{-\nu})$ die Fourierkoeffizienten von x_0 in bezug auf die ortho-normierten $y_{-\nu}$ sein. Abschnitt 3 zeigt die explizite Form der Extrapolation x_n^* unter Verschärfung der Bedingungen von Abschnitt 2 durch

$$\sum_{\mu=0}^\infty |a_\mu| < \infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\nu=0}^\infty |b_\nu| < \infty$$

in der Umgebung von $z = 0$.

H. Ammeter.

Shinbrot, Marvin: On the integral equation occurring in optimization theory with nonstationary inputs. J. Math. Physics 36, 121—129 (1957).

Verf. beschreibt eine Erweiterung der Wiener'schen Theorie der Voraussage (N. Wiener, Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, New York 1944), indem er die Frage nach dem optimalen Verhalten bei instationären Anregungen untersucht. Eine solche Erweiterung der Theorie ist beispielsweise notwendig, um die Bewegung einer Abschlußbasis zu beschreiben, die in optimaler Weise einer sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig bewegendes Zielscheibe folgt. Die mathematische Formulierung solcher Probleme führt auf eine Integralgleichung

$$(1) \quad \chi(\tau, t) = \int_{-\infty}^t g(t, \sigma) \varphi(\tau, \sigma) d\sigma, \quad \tau \leq t$$

in welcher χ und φ bekannte Korrelationsfunktionen bedeuten; g ist die gesuchte Funktion, der Kern φ wird als symmetrisch vorausgesetzt. Die erste vom Verf. angegebene Lösungsmethode geht von folgenden Annahmen aus:

$$(a) \quad \varphi(\tau, t) = \sum_{q=1}^m a_q(t) b_q(\tau), \quad \chi(\tau, t) = \sum_{q=1}^m c_q(t) b_q(\tau), \quad \tau \leq t$$

$$(b) \quad w = \sum_{q=1}^m [a_q(t) b_q(\tau) - a_q(\tau) b_q(t)]$$

ist eine Funktion, die nur von $t - \tau$ abhängt. Die zweite Lösungsmethode benutzt die Diracsche δ -Funktion, wobei für die Lösung der Ansatz

$$g(t, \tau) = \sum h(t) \delta^{(n)}(t - \tau)$$

gemacht wird. — Beide Methoden werden an einem Beispiel erläutert, in welchem die Lage von sich bewegenden Partikeln unter der Annahme ermittelt wird, daß die zur Lagebestimmung durchgeführten Messungen ungenau sind und streuen. In einem Anhang wird auf die in der gleichen Richtung gehenden Ergebnisse von R. Booton (Meteor. Rep. 72, M. I. T. Dynamic Analysis and Control Laboratory, July 1951). hingewiesen, an die der Verf. in seiner Arbeit anknüpft. *W. Quade.*

Foster, Caxton and Anatol Rapoport: The case of the forgetful burglar. Amer. math. Monthly 65, 71—76 (1958).

Ein vergeblicher Einbrecher gehe beim Verlassen eines soeben durchsuchten Hauses jedesmal mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach rechts oder nach links, um — wiederum mit gleicher Wahrscheinlichkeit — ins nächste oder ins übernächste Haus der (beiderseits unbeschränkten) Reihe einzudringen. Seine Laufbahn gilt als beendet, sobald er sich einem Objekt zum zweiten Male widmet. Die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß er a) mindestens n , b) genau n verschiedene Häuser betritt, werden rekursiv berechnet und für $n = 1$ bis $n = 7$ angegeben. Fragen solcher Art erhoben sich bei soziographischen Untersuchungen der Verff. *R. Sprague.*

Ludwig, Otto: Die Pascalsche Fragestellung für Merkmalsiterationen. Mitteil.-Bl. math. Statistik 9, 1—26; 81—101 (1957).

Es sei X_n eine Folge unabhängiger Zufallsvariabler, die nach einer Binomial- oder Polynomialverteilung verteilt sind. Eine Iteration der Länge r ist die r -fache Wiederholung eines Wertes nach bzw. vor anderen Werten. Es werden Wahrscheinlichkeiten berechnet von der folgenden Art: für die α -te Iteration der Länge m beim k -ten Versuch, für einen bestimmten Wert, für einen beliebigen Wert. Die untersuchten Verteilungen sind Verallgemeinerungen der Pascal-Verteilung. Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten geschieht teils unmittelbar, teils durch Verwendung erzeugender Funktionen. Die Kumulanten der Verteilungen sind angegeben, ferner wird das Verhalten für $\alpha \rightarrow \infty$ beschrieben. *F. Wever.*

Ahmad, Salah: Sur la probabilité pour qu'une série entière à coefficients aléatoires puisse être prolongée. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 2574—2576 (1958).

Unter Benützung des Satzes, daß die Potenzreihe mit den Koeffizienten $a_n = b_n c_n$ (Hadamardsches Kompositum) den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat, wenn dies für die Reihe mit Koeffizienten b_n gilt, und die Potenzreihe mit Koeffizienten c_n in $|z| \leq 1$ regulär ist und auf dem Rande des Einheitskreises nur endlich viele Singularitäten besitzt, wird bewiesen, daß die Reihe $\sum \exp(i X_n) \cdot z^n$ den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat, wenn X_n unabhängige (nicht notwendig gleichverteilte) Zufallsgrößen mit $E(\exp(i X_n)) \leq \alpha < 1$ sind. Damit wird ein Satz von Steinhaus [Math. Z. 31, 408—416 (1929)] verallgemeinert, bei dem die X_n gleichverteilt in $(0, 2\pi)$ sind. *D. Morgenstern.*

Statistik:

● **Wallis, W. Allen and Harry V. Roberts:** Statistics, a new approach. London: Methuen and Co. Ltd. 1957. XXXVI, 646 p. 50 s net.

In den letzten 10 Jahren sind fast pausenlos im angelsächsischen Sprachgebiet Bücher über moderne statistische Methoden erschienen, welche sich jedoch meist — wenn auch teilweise in sehr elementarer Form — mit den neuen mathematischen Methoden auseinandersetzen, während sachlogische Fragen, praktische Probleme der Stichprobenerhebung usw. kaum zur Sprache kamen. Das vorliegende Buch beschreitet insofern einen neuen Weg, als es „die Statistik“ als Ganzes sieht und die mathematischen Methoden diesem Zweck unterordnet. Es kommt damit der Tendenz mancher viel älterer kontinental-europäischer Bücher wieder näher. Es werden — außer den vier Grundrechnungsarten — keinerlei mathematische Vorkenntnisse gefordert, nicht einmal Kenntnis des Kleiner- und Größerzeichens. Das

Buch umfaßt vier Teile: I. The Nature of Statistics, II. Statistical Description, III. Statistical Inference, IV. Special Topics. An Hand zahlloser Beispiele wird die Bedeutung der Statistik für alle Zweige der Wissenschaft und des täglichen Lebens erläutert, mißbräuchliche Verwendung statistischer Erhebungen aufgezeigt, die Darstellung statistischer Daten besprochen und ihre prägnante Beschreibung durch Mittelwerte und Streuungsmaße dargelegt. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß fast keine ad hoc konstruierten Beispiele verwendet werden, sondern daß sich die Verf. vielfältiger Quellen bedienen. So werden unter anderem Zeitungsartikel ebenso herangezogen, wie Zitate aus Churchills Werken oder aus des Thukydides „Peloponnesischen Krieg“. Die geläufigsten mathematisch statistischen Methoden werden ebenfalls beispielhaft beschrieben und in demselben Stil werden auch schwierigere Begriffe der modernen Terminologie wie Maximum-Likelihood, Konfidenzbereiche, Punktschätzungen u. a. erläutert. Im letzten Teil sind u. a. auch die Anfangsgründe der Regressionstheorie und die Behandlung von Zeitreihen dargestellt, wobei natürlich nicht mehr gänzlich auf den Formelapparat verzichtet werden kann. Neben einer Tafel von Quadraten und Quadratwurzeln und Tabellen für die Normalverteilung enthält das Werk auch ein Tafelwerk mit 10000 Zufallszahlen. Das Buch ist trotz der bewußt breit gehaltenen Darstellung nicht langatmig und recht flüssig lesbar. Nebenbei sei noch erwähnt, daß J. Neyman zwar als „polish-english-american statistician“, A. Wald, der bekanntlich in Rumänien geboren ist und viele Jahre bei K. Menger in Österreich gearbeitet hat, jedoch als „american statistician“ bezeichnet wird.

L. Schmetterer.

Bartlett, M. S.: A comment on D. V. Lindley's statistical paradox. *Biometrika* 44, 533—534 (1957).

The author points out an error in the paper by D. V. Lindley (this. Zbl. 80, 128), and claims that this leads to an overstatement of the point. *E. Sverdrup.*

Vogel, W.: Elementare Herleitung eines Folgetest-Stichprobenplans. *Mitteil.-Bl. math. Statistik* 9, 130—142 (1957).

$\{X_i\}$ sei eine Folge unabhängiger Zufallsvariabler mit $p(X_i = 1) = p$, $p(X_i = 0) = 1 - p$ und $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Zunächst werden die Formeln für einen Folgetest auf elementare Art hergeleitet. Es sei

$$\mathfrak{P}(p) = p \left\{ \inf_{n \geq 1} \left(Z_n - \frac{1}{\lambda} (n - \alpha) \right) < 0 \right\}$$

mit $\lambda > 1$ und $\alpha > 0$. Die Z_n bilden in Abhängigkeit von n eine Treppe, die mit Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{P}(p)$ die Gerade $z = (1/\lambda)(n - \alpha)$ schneidet. Es gibt ein π mit $0 \leq \pi < 1/\lambda$ und $p(1 - p)^{\lambda-1} = \pi(1 - \pi)^{\lambda-1}$. Dann gilt für $\mathfrak{p}(p)$ die Abschätzung

$$((1 - p)/(1 - \pi))^{\lambda+1} \leq \mathfrak{P}(p) \leq ((1 - p)/(1 - \pi))^\lambda, \quad p > 1/\lambda.$$

Es sei noch M die Zufallsvariable, die angibt, nach wieviel Schritten sich Treppe und Gerade zum ersten Mal schneiden. Dann gilt für $E(M)$ die Abschätzung

$$\alpha/(1 - \lambda\pi) < E(M) \leq (\alpha + 1)/(1 - \lambda\pi), \quad \text{wenn } 0 \leq \pi < 1/\lambda.$$

Der Erwartungswert wird unendlich für $\pi = 1/\lambda$. Entsprechend wird

$$\mathfrak{p}'(p) = p \left\{ \sup_{n \geq 1} \left(Z_n - \frac{1}{\lambda} (n + \beta) \right) > 0 \right\}$$

definiert und berechnet, ebenso M' eingeführt und $E(M')$ berechnet. q_1 sei die Wahrscheinlichkeit, daß die Z_n -Treppe die erste Gerade schneidet, ohne die zweite vorher geschnitten zu haben, q_2 dasselbe umgekehrt. Dann gilt $q_1 + q_2 = 1$. q_1 und q_2 werden angegeben, ebenso $E(N)$, wenn N die Zahl der Schritte bis zur ersten Absorption bedeutet. Die Ableitung benutzt nicht die Waldsche Identität. Zum Schluß wird die Darstellung mit der von Wald verglichen.

F. Wever.

Handscomb, D. C.: Proof of the antithetic-variates theorem for $n > 2$. Proc. Cambridge philos. Soc. 54, 300—301 (1958).

The author proves the following theorem: — If I denotes the infimum of $\text{var } t$ when all possible stochastic or functional dependences between the ξ_j are considered, then, provided the g_j are bounded functions,

$$\inf_{x_j \in \mathfrak{X} (j=1, \dots, n)} \text{var} \sum_{j=1}^n g_j [x_j(\xi)] = I,$$

where \mathfrak{X} denotes the class of functions $x(z)$ with the properties (i) $x(z)$ is a $(1, 1)$ mapping of the interval $(0, 1)$ onto itself, and (ii) except perhaps at a finite set of points z , dx/dz exists and equals 1. Hammersley and Mauldon (this Zbl. 71, 355) conjectured this theorem, but succeeded only in proving it for $n = 2$.

S. Vajda.

Gurland, John: A generalized class of contagious distributions. Biometrics 14, 229—249 (1958).

Verf. geht von dem Modellbeispiel J. Neymans (dies. Zbl. 20, 382) aus: Über eine Fläche, die in gleich große Teilstücke eingeteilt ist, seien zufällig Eihaufen eines Insekts verteilt, so daß die Anzahl der Eihaufen in den verschiedenen Teilstücken nach einer Poissonverteilung mit dem Mittelwert m_1 verteilt ist. Die Anzahl der lebensfähigen Larven, die aus einem Eihaufen schlüpfen, soll ebenfalls eine Poissonverteilung besitzen; und zwar mit dem Mittelwert λ . Außerdem wird angenommen, daß die Anzahl s der lebensfähigen Larven, die von einem Eihaufen stammen, dem insgesamt n lebensfähige Larven entschlüpfen, sich über die Teilstücke nach einer Binomialverteilung $\binom{n}{s} p^s q^{n-s}$ verteilt. J. Neyman hatte unter der Annahme, daß die Wahrscheinlichkeit p für alle Eihaufen konstant ist, für die Verteilung der Larven auf die Teilstücke seine Typ A-Verteilung abgeleitet. Verf. verallgemeinert dieses Ergebnis dadurch, daß er p nicht mehr als eine Konstante, sondern als Zufallsgröße ansieht, die eine Beta-Verteilung mit den Parametern α und β besitzt. Er erhält dann als Verteilung der Larven über die Teilstücke eine allgemeine Klasse von Ansteckungsverteilungen (contagious distributions), die von den 4 Parametern α, β, m_1 und λ abhängen und mit Hilfe der konfluenten hypergeometrischen Funktionen dargestellt und berechnet werden können. Es werden Rechen- und Rekursionsformeln zur Berechnung dieser Verteilungen angegeben und an Beispielen demonstriert. Allerdings wird dabei die Frage, wie die Parameter geschätzt werden können, nicht erörtert. Sie soll in einer späteren Publikation nachgeholt werden. Bemerkenswert ist, daß die allgemeine Klasse als Grenzfälle einige bereits bekannte Ansteckungsverteilungen enthält und auch die von Beall und Rescia [Biometrics 9, 354—386 (1953)] angegebenen Verteilungen umfaßt. In einem Abschnitt werden kurz weitere Verallgemeinerungsmöglichkeiten diskutiert.

B. Schneider.

Sprott, D. A.: The method of maximum likelihood applied to the Poisson binomial distribution. Biometrics 14, 97—106 (1958).

Zu den sogenannten Ansteckungsverteilungen (contagious distributions) gehört auch die Poisson-Binomial-Verteilung $P(k) = e^{-a} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{a^t}{t!} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Im allgemeinen nimmt man an, daß n eine bekannte ganze Zahl ist, so daß die Verteilung noch zwei Parameter a und p besitzt ($q = 1 - p$). Verf. bestimmt die Maximum Likelihood-Schätzwerte für diese beiden Parameter und vergleicht sie mit den Schätzwerten, die man nach der Methode der „Stichprobenhäufigkeit des Ergebnisses 0“ und nach der Momenten-Methode erhält. Ein Beispiel veranschaulicht die ganzen Überlegungen.

B. Schneider.

Hartley, H. O.: Maximum likelihood estimation from incomplete data. Biometrics 14, 174—194 (1958).

In der Arbeit wird ein Iterationsverfahren zur Lösung der Maximum Likelihood-Gleichung bei unvollständigem Datenmaterial (z. B. bei gestutzten oder gruppierten Stichproben) gebracht, das auf der Lösung bei vollständigem Datenmaterial aufbaut. Es werden nur diskrete Verteilungen behandelt; die Diskussion des Verfahrens für stetige Verteilungen soll in einer späteren Publikation nachgeholt werden, in der auch die theoretischen Grundlagen für die Konvergenz des Iterationsverfahrens gebracht werden soll. Die Effizienz der erhaltenen Schätzwerte für kleine Stichproben wird nicht untersucht. An Hand mehrerer Beispiele werden die einzelnen Rechenschritte klar und übersichtlich dargestellt und auch für Nicht-Mathematiker verständlich erläutert.

B. Schneider.

Walsh, John E.: Nonparametric mean estimation of percentage points and density function values. Ann. Inst. statist. Math. 8, 167—180 (1957).

Let $f(x)$ be a probability density function and θ_q the 100 q percentage point. Linear estimates of θ_q and $1/f(\theta_q)$ in terms of m order statistics are obtained for $m \leq 7$. The determination of the estimates involves the solution of m linear equations and ensures that their expectations differ from the true values by terms of specified order. Application is made of the formulae developed in F. N. David and N. L. Johnson (cf. this Zbl. 55, 130).

D. R. Whitney.

Birnbaum, Z. W. and Orval M. Klose: Bounds for the variance of the Mann-Whitney statistic. Ann. math. Statistics 28, 933—945 (1957).

For independent random variables X, Y with continuous distribution functions F and G let $p = P(Y < X)$. For random samples of X and Y let U be the number of pairs (X_i, Y_i) such that $Y_i < X_i$. For arbitrary F and G a sharp lower bound for σ_U^2 in terms of p is derived. The upper bound had been given by D. van Dantzig. For the case $F(t) > G(t)$ for all t sharp bounds of σ_U^2 are also obtained.

D. R. Whitney.

Manija, G. M.: Der quadratische Fehler der Dichteabschätzung einer normalen zweidimensionalen Verteilung nach den Daten einer Stichprobe. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 20, 655—658 (1958) [Russisch].

Replacing the population means, population variances and the population correlation coefficient in the expression for a two-dimensional normal frequency function by corresponding sample values we obtain a biased but consistent estimate of the density function. In the paper the author studies the "closeness" of this estimate. As a measure of the deviation of the estimated density from the true one the double integral of the squared difference of the two functions is used.

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1, x_2) - \bar{\varphi}(x_1, x_2)]^2 dx_1 dx_2$$

where $\varphi(x_1, x_2)$ denotes the two-dimensional normal density and $\bar{\varphi}(x_1, x_2)$ its estimate. It is shown that for large sample sizes ψ is distributed approximately as a sum of two independent positive definite quadratic forms in normal random variables.

J. Machek.

Smith, C. A. B.: On the estimation of intraclass correlation. Ann. Hum. Genetics 21, 363—373 (1957).

If an infinite population of individuals, characterized by a stochastic variable x with $\text{var } x = V$, can be divided into classes such that $\text{cov}(x, x') = U$ for pairs belonging to the same class and $= 0$ for pairs belonging to different classes, the intraclass correlation coefficient is defined by $\rho = U/V$. Estimates of U and V can be obtained from an analysis of variance of a sample taken at random from the population, in which k classes are represented, the number of individuals in class i of the sample being n_i and the total sample size $\sum n_i = n$. Let q_A be the total sum of squares within classes, defined in the usual way, and $q_B = \sum w_i \bar{x}_i^2 - (\sum w_i \bar{x}_i)^2/w$, where $w = \sum w_i$, a weighted sum of squares between classes with arbitrary weights

w_i . Then $v_A = q_A/(n - k)$ is an unbiased estimate of $V - U$ and $v_B = (q_B - k_1 v_A)/k_2$, where

$$k_1 = \sum w_i (w - w_i)/n_i w \quad \text{and} \quad k_2 = \sum w_i (w - w_i)/w,$$

an unbiased estimate of U . Accordingly, the author takes $r = v_B/(v_A + v_B)$ as an estimate of ρ and, assuming normal distributions with the same variance in all classes of the population, derives a formula for the calculation of an approximate value of the variance of r . Naturally, this variance depends upon the weights w_i . A minimum variance may, presumably, be approximated by means of an iterative procedure. In the first step, values of v_A and v_B are calculated choosing the usual weights $w_i = n_i$. In the second step, new weights are found from $w_i = (v_A/n_i + v_B)^{-1}$ and a new value for v_B is calculated. This process is repeated until no appreciable change in the value of v_B occurs. The author does not consider a possible bias in r , or the error in $\text{var } r$ induced by substituting the values of v_A and v_B for the variances within and between classes in the population. The method can be extended to cases, where the classes of the population can be divided into subclasses and, apart from the covariance within the classes, there exists also a covariance within the subclasses.

J. J. Bezem.

Lomnicki, Z. A. and S. K. Zaremba: On the estimation of autocorrelation in time series. *Ann. math. Statistics* **28**, 140—158 (1957).

Die Verf. untersuchen die Frage, welchen Einfluß das Eliminieren eines Trendpolynoms auf die Verzerrung (bias) und die Varianzen und Kovarianzen der Schätzwerte für die Kovarianz- und Autokorrelationskoeffizienten einer stationären Zeitreihe ausübt. Als Zeitreihenmodell legen sie ihren Untersuchungen einen stochastischen Prozeß zugrunde, der sich aus einem Polynom vom Grade m und einem „Slutzky-Prozeß“ x_t additiv zusammensetzt. ($x_t = \sum_{s=0}^{\infty} h_s \varepsilon_{t-s}$; ε_t = reiner Zufallsprozeß). Als Schätzwerte für die Zeitreihenkovarianzen werden die gemittelten Produktsummen aus den Abweichungen der um k gegeneinander verschobenen Zeitreihenwerte von den entsprechenden Schätzwerten des Trendpolynoms betrachtet ($k = 1, 2, \dots, N - m - 1$, wenn N Zeitreihenwerte beobachtet wurden). Die Verf. können zeigen, daß diese Schätzwerte eine negative Verzerrung von der Ordnung $O(1/N)$ besitzen, die prop. $m + 1$ ist. Die Varianzen und Kovarianzen dieser Schätzwerte werden durch den Trend nicht beeinflußt. Auch die Schätzwerte für die Autokorrelationskoeffizienten, die in üblicher Weise als Quotienten der Kovarianzschätzwerte und der Wurzel aus dem Produkt der beiden Summen von Abweichungsquadraten (zwischen Zeitreihenwerten und Schätzwerten für den Trend) erklärt werden, besitzen eine Verzerrung der Ordnung $O(1/N)$, die sich aus zwei Summanden zusammensetzt: einer, der durch die Verzerrung des Kovarianzschätzwertes verursacht wird und dementsprechend prop. $-(m + 1)$ ist, und ein zweiter, der auf die Korrelation zwischen Zähler und Nenner zurückzuführen ist und auch dann auftritt, wenn kein Trend eliminiert wurde. Zur Herleitung dieses Ergebnisses und zur Ermittlung der Kovarianz dieses Autokorrelations-Schätzwertes bedienen sich die Verf. der Methode des „statistischen Differentials“, die sie durch einen allgemeinen Satz auf eine exakte Grundlage stellen.

B. Schneider.

Parzen, Emanuel: On consistent estimates of the spectrum of a stationary time series. *Ann. math. Statistics* **28**, 329—348 (1957).

Verf. betrachtet als Zeitreihenmodell einen stationären stochastischen Prozeß $x(t)$, der sich zusammensetzt aus einem Trend $m(t)$ und einer zufälligen Funktion $y(t)$. Letztere soll den Erwartungswert 0 für alle t besitzen und stationär (im weiten Sinne) bis zur 4. Ordnung sein. Die 4. Momente sollen eine Integrabilitätsbedingung erfüllen, welche eine Fourierdarstellung dieser Momente gestattet. Außerdem wird noch verlangt, daß der Prozeß eine stetige Spektraldichte besitzt. Es ist

das Ziel der Arbeit, für diese Spektraldichte konsistente Schätzwerte aufzustellen. Verf. definiert eine Klasse solcher Schätzwerte mit Hilfe von Gewichtsfunktionen für eine Mittlung der Kovarianzfunktion (covariance averaging kernels) und zeigt, daß diese Klasse die bereits bekannten Schätzwerte von Bartlett (vgl. dies. Zbl. 36, 217), Grenander, Daniell u. a. enthält. Alle Schätzwerte der Klasse sind konsistent (im quadratischen Mittel) von der Ordnung $O(T^{-2\lambda})$, wobei $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Asymptotisch optimal ist ein solcher Schätzwert, wenn er die größte „Konsistenzordnung“ besitzt. Verf. diskutiert die Existenz und Eigenschaften solcher optimaler Schätzwerte und die Konsistenzordnung der bekannten Spektralschätzwerte. Er beachtet dabei Vorteile für die Rechenarbeit und geht ausführlich auf das Problem der Interpolation der Spektraldichte ein. *B. Schneider.*

Zelen, Marvin: The analysis of incomplete block designs. *J. Amer. statist. Assoc.* 52, 204—217 (1957).

Notations and assumptions are standard [see eg. Kempthorne. The design and analysis of experiments (New York 1952) p. 542]. If $m - 1$ denotes the number of dependent linear relations among the expectations of the block totals and $b - m - 1 > t$, the author shows that (i) there will exist two independent variance-ratio tests for testing every null hypothesis pertaining to the treatments, (ii) confidence limits for σ_b^2/σ^2 can be obtained. A method for combining the inter-block and intra-block tests (to obtain a test more powerful than either of the individual tests) is suggested.

T. V. Narayana.

Lafon-Augé, Monique: Conditions d'existence d'un bloc incomplet partiellement équilibré. *C. r. Acad. Sci., Paris* 245, 1774—1775 (1957).

The conditions for the existence of a partially balanced incomplete block design (two associate classes) and a method for listing all such designs are obtained using elementary number theory.

T. V. Narayana.

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Wirtschaftsmathematik:

Cheeseman, E. A., S. J. Kilpatrick, A. C. Stevenson and C. A. B. Smith: The sex ratio of mutation rates of sex-linked recessive genes in man with particular reference to Duchenne type muscular dystrophy. *Ann. Hum. Genetics* 22, 235—243 (1958).

An alternative method and a modification are proposed to Haldane's original approach for estimating the sex ratio of the mutation rates of sex-linked recessive genes. Applying these methods to data on Duchenne type muscular dystrophy reported from some areas, it is concluded that there is no evidence at present to support an hypothesis of a sex difference in the mutation rates. *Y. Komatu.*

Smith, C. A. B. and S. J. Kilpatrick: Estimates of the sex ratio of mutation rates in sex-linked conditions by the method of maximum likelihood. *Ann. Hum. Genetics* 22, 244—249 (1958).

The method of maximum likelihood is applied to obtain an estimate for the same problem as in the previous paper by A. Cheeseman et al. reviewed above. From observed data the same conclusion as above is again derived. *Y. Komatu.*

Barton, D. E. and F. N. David: A test for birth order effect. *Ann. Hum. Genetics* 22, 250—257 (1958).

A test is given for birth order effect, which is appropriate when affected sibs tend to occur early and late in the birth order. It is equivalent to a linear rank test for dispersion. Numerical tables of the distribution of the main random variable are listed. *Y. Komatu.*

Kastenbaum, Marvin A.: Estimation of relative frequencies of four sperm types in *Drosophila Melanogaster*. *Biometrics* 14, 223—228 (1958).

Relative frequencies of four sperm types in *Drosophila Melanogaster* are estimated by the method of maximum likelihood. Variances and covariances of the

estimates are derived. The formulas are illustrated by observed data and the goodness of fit is tested by means of chi-square.

Y. Komatu.

Lamens, A. et R. Consael: Sur le processus non homogène de naissance et de mort. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 43, 597—605 (1957).

Ziel des Verf. ist, eine Methode zu entwickeln, die schnell zu der sogenannten retrospektiven Gleichung für den nichthomogenen Prozeß der Geburten und Todesfälle in einer Gesamtheit führt, und weiter, die Wichtigkeit der für diese Methode benutzten Integralgleichung überhaupt zu zeigen. Er vervollständigt die Studie durch Einbeziehung der Zuwanderung in sein Schema von Geburt und Tod (Auswanderung). Schließlich wendet er die von ihm entwickelte Technik auf den Prozeß von Pólya an, wodurch er die Charakteristiken schneller als auf die übliche Weise findet.

P. Lorenz.

Benjamin, S. and C. W. Bennett: The application of elementary linear programming to approximate valuation. J. Inst. Actuaries 84, 1—21, discussion 22—36 (1958).

Die Berechnung der Prämienreserve für einen Versicherungsbestand setzt die Kenntnis der Altersverteilung der notwendigen Rechnungselemente (Versicherungssummen, Prämien) voraus. Da die Fortschreibung dieser Altersverteilungen mit einem unverhältnismäßig großen Arbeitsaufwand verbunden ist, sind verschiedene Approximationsmethoden entwickelt worden, die mit unvollständigen Daten arbeiten. In der vorliegenden Arbeit wird die Reserve nach der Methode der linearen Programmierung approximiert, wobei unter Benutzung der jeweils verfügbaren Informationen die untere und die obere Grenze der Totalreserve ermittelt wird. Die Methode wird an Hand eines Beispiels erläutert, wobei schrittweise die Kenntnis 1. der totalen Versicherungssumme, 2. der totalen Prämie, 3. der Altersverteilung beim Abschluß und 4. einer durch lineare Fortschreibung aus der Information 3 gefundenen Altersverteilung benutzt wird. Die standardisierte Abweichung zwischen unterem und oberem Grenzwert beträgt bei ausschließlicher Benutzung der Information 1 61%, und verbessert sich bei Mitberücksichtigung der Information 2 auf 1,20%; die Informationen 3 und 4 erlauben weitere Verbesserungen auf 0,50% und 0,30%. — In einem zweiten Teil der Arbeit werden die geschilderten Methoden zur Abklärung des Approximationsfalles von andersartigen Gruppenrechnungsverfahren verwendet.

H. Ammeter.

● Aitchison, J. and J. A. C. Brown: The lognormal distribution, with special reference to its use in economics. (Univ. Cambridge, Department of Applied Economics, Monographs, No. 5.). Cambridge: At the University Press 1957. XVII, 176 p. 35 s. net.

Sei $X > 0$ eine zufällige Größe, und $Y = \log X$ sei $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt. Dann heißt X logarithmisch-normal (l. n.) verteilt mit 2 Parametern (X ist $A(\mu, \sigma^2)$ -verteilt). Ist $X - a$ $A(\mu, \sigma^2)$ -verteilt, so heißt X l. n. verteilt mit 3 Parametern. Wenn $a < X < b$ und $(X - a)(b - X)$ $A(\mu, \sigma^2)$ -verteilt ist, so hat man eine l. n. Verteilung mit 4 Parametern. Das Buch behandelt diese 3 Verteilungen. Es werden Schätzfunktionen für Parameter und für Momente hergeleitet. Mit Hilfe des Rechenautomaten EDSAC wurden l. n. verteilte Stichproben hergestellt und die einzelnen Schätzverfahren daran überprüft. Es folgt ein Kapitel über die Anwendung der l. n. Verteilung in der Probit-Analysis und ein Kapitel über die gestutzte (truncated) und die zensurierte (censored) Verteilung. Der anschließende Überblick über die Anwendungen reicht von der Statistik kleiner Teilchen (theoretisch von Kolmogoroff durch ein Modell über den Zerkleinerungsvorgang begründet) bis zu statistischen Untersuchungen in der Philologie. Der interessanteste Teil des Buches für die Volkswirtschaftler unter den Lesern sind die beiden Kapitel über die Verteilung der Einkommen und das Konsumenten-Verhalten. Das Buch ist klar und übersichtlich angelegt, es wendet sich an alle, die Statistik anwenden, und verlangt keine

großen mathematischen Vorkenntnisse. Neben den vielen Abbildungen und dem Anhang mit 13 Tafeln sei besonders das ausführliche Literatur-Verzeichnis erwähnt.

W. Vogel.

Cherubino, Salvatore: *Sulla dinamica economica*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **22**, 281—285 (1957).

L'A. fa alcune considerazioni sulla dinamica di un'economia le cui attività produttive siano ripartite in n settori. Tali considerazioni riguardano le economie competitive in equilibrio e quelle pianificabili (con previsioni per un periodo non troppo breve di tempo). Accennata, in breve, la teoria matematica dell'equilibrio generale economico, poste ed elaborate le relazioni fra produzioni, prezzi e loro velocità mediante simboli vettoriali, giunge alla conclusione che: „L'intervento del mercato introduce una differenza essenziale, anche in piccoli intervalli di tempo, tra i sistemi aperti, come è quello dei settori di merci e servizi, ed i sistemi chiusi col settore lavoro-consumo“. L'A. considera poi la possibilità che le velocità delle produzioni, e dei prezzi restino tutte positive in un dato intervallo di tempo, e che perciò sia possibile avere un'economia progressiva tanto per le produzioni che per i prezzi. Infine, in analogia con la teoria matematica del Volterra, riguardante le specie biologiche viventi in uno stesso ambiente, si ha la possibilità di classificare le economie fondandosi sui segni e sull'annullamento di alcuni termini di una relazione lineare posta dall'A.

T. Salvemini.

Bellman, Richard: *Functional equations in the theory of dynamic programming*. VI: A direct convergence proof. Ann. of Math., II. Ser. **65**, 215—223 (1957).

Man vergleicht die Aufgabe

$$I(y) = \int_0^T F(x, y) dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$dx/dt = G(x, y), \quad x(0) = c, \quad R_i(x, y) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, r)$$

zu maximieren, wobei x, y, c Vektoren sind, mit dem diskreten Analogon, wobei die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt werden und die Funktionswerte an nur n äquidistanten Stellen benutzt werden; statt des Integrals ist dann eine endliche Summe $I_1(y)$ zu maximieren. Unter verschiedenen Voraussetzungen über die auftretenden Funktionen, die insbesondere die Existenz des Maximums von $I(y)$ sicherstellen, konnte Verf. früher Methoden angeben [z. B. Bellman, *Dynamic Programming* (1957; dies. Zbl. **77**, 136)], aus denen folgt, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max I_1(y) = \max I(y)$$

gilt. Jetzt wird die Existenz des Grenzwertes $\lim_{n \rightarrow \infty} \max I_1(y)$ unabhängig davon,

unter schwächeren Voraussetzungen nachgewiesen: Hölderstetigkeit von F bezüglich x , Wachstumsbedingung für G von der Form $|G(x, y)| \leq a(y) \cdot |x| + b(y)$, Stetigkeit von F, G , und Nebenbedingungen in der einfachen Form $m_1 \leq y \leq m_2$. Das n , die Schrittzahl, durchläuft dabei die Folge 2^n , so daß jede Aufgabe durch Halbierung der Schrittweite aus der vorhergehenden hervorgeht, was bei dem Beweise geschickt benutzt wird.

D. Morgenstern.

Bellman, Richard: *On a routing problem*. Quart. appl. Math. **16**, 87—90 (1958).

Given N cities, with every two linked by a road, and the times t_{ij} required to travel from i to j , it is required to determine the quickest path from a given city „1“ to another „ N “. This problem is, in principle, one of Linear Programming, but prohibitively large if N is large. The author formulates it as $f_i = \min_{j \neq i} [t_{ij} + f_j]$, $i = 1, \dots, N-1$, $f_N = 0$, where f_i is the total time required to travel from i to N . He proves that the solution for f_i is unique, and shows how to solve the functional

equation by an iterative method, choosing an initial sequence $f_i^{(n)}$ and proceeding by $f_i^{(k+1)} = \min_{j \neq i} [t_{ij} + f_j^{(k)}]$, $i = 1, \dots, N-1$, $f_N^{(k+1)} = 0$. The choice of $f_i^{(0)}$ is discussed.

S. Vajda.

● **Informationstheorie.** (Nachrichtentechnische Fachberichte. Beihefte der NTZ. Bd. 3.) Nachdruck. Herausgeber: J. Wosnik. Braunschweig: Verlag Friedr. Vieweg & Sohn 1957. 118 S. DM 22,—.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

Fucks, Wilhelm: Die mathematischen Gesetze der Bildung von Sprachelementen aus ihren Bestandteilen. Theorie der Wortbildung aus Silben und der Silbenbildung aus Lauten. Nachrichtentechnische Fachberichte 3, 7—21 (1957).

Beschreibende Statistik der Häufigkeitsverteilungen der Lautzahl in der Silbe und der Silbenzahl im Wort bei verschiedenen Sprachen. Versuch einer Erklärung der auftretenden Verteilung. Geht man den weitläufigen Auseinandersetzungen auf den Grund, so zeigt sich, daß Verf. eine gegebene stochastische Variable „erklärt“ als Summe einer Poissonschen und einer willkürlichen, stochastischen Variablen. Man sollte sagen, daß man es sich noch etwas leichter machen könnte, wenn man die Poissonsche Variable wegließe. Allerdings macht Verf. es sich nicht so leicht; er strengt sich sogar an, die willkürliche Variable einzuschränken, etwa zu einer zweitwertigen Variablen. Da die zu erklärende Variable höchstens 5—6 Werte annimmt, ist es kein Wunder, daß das gelingt. — Schlimmer ist noch die untaugliche Modellvorstellung. Verf. denkt sich (ähnlich der Verteilung einer gegebenen Menge von Molekülen über eine gegebene Menge von Zellen) eine gegebene Menge von Silben über eine gegebene Menge von Wörtern ausgestreut (oder eine gegebene Menge von Lauten über eine gegebene Menge von Silben). Er übersieht ganz, daß die verschiedenen Laute und Silben nicht auswechselbar sind.

H. Freudenthal.

Chomsky, Noam and George A. Miller: Finite state languages. Inform. and Control 1, 91—112 (1958).

Let there be given a finite set of states S_0, S_1, \dots, S_n and a finite set of transition symbols W_0, W_1, \dots, W_m . $X = W_{a_1} \wedge \dots \wedge W_{a_p}$ is called a string formed by the concatenation of the symbols $W_{a_1}, W_{a_2}, \dots, W_{a_p}$ from left to right in this order. Then \wedge is a binary associative operation of concatenation defined on these strings (not on transition symbols, p. 95). W_0 is an identity element, i. e. $W_0 \wedge X = X \wedge W_0 = X$ for every string X . S_0 is the initial state. A finite state grammar G is a finite set of any triples (i, j, k) , where $0 \leq i, k \leq n$, $0 \leq j \leq m$ (a direct definition of grammar is not given). The ordered pair (j, k) of the triple $(i, j, k) \in G$ is called a grammatical rule associated with the state S_i (we write $(j, k) \in S_i$). The set $\{W_1, W_2, \dots, W_m\}$ is called the vocabulary and its elements words of the grammar G . If $(j, k) \in S_i$, the grammar G (as a generator) can produce in the state S_i by switching into the state S_k the word W_j . The string X is a sentence generated by G just in case if there is a sequence of words W_{b_1}, \dots, W_{b_r} and a sequence of states $S_{c_1}, \dots, S_{c_{r+1}}$ such that (i) $c_1 = c_{r+1} = 0$, (ii) $c_i \neq 0$ for $1 < i < r+1$, (iii) $1 \leq i \leq r \Rightarrow (c_i, b_i, c_{i+1}) \in G$, (iv) $X = W_{b_1} \wedge \dots \wedge W_{b_r}$. The finite state language L_G (generated by G) is the set of all sentences generated by a finite state grammar G . The authors show that every finite state language can be generated by a grammar $G \in F_4$, where F_4 is the set of grammars with following restrictions: 1. $(i, 0) \in S_j \Rightarrow i = 0$, 2. $(i, j) \in S_k \Rightarrow \{i = 0 \Leftrightarrow j = 0\}$, 3. $(i, h) \in S_j, (i, k) \in S_j \Rightarrow h = k$. A state diagram of G is a directed and labelled graph the nodes of which are the states S_0, \dots, S_n . There is an edge from S_i to S_k labelled by W_j just in case $(j, k) \in S_i$. A sequence of states S_{a_1}, \dots, S_{a_s} such that $s \geq 2$, $a_1 = a_s$ and $1 < i < s \Rightarrow a_1 \neq a_i \neq 0$ (still more $1 < j < i < s \Rightarrow a_i \neq a_j$) is called a cycle and S_{a_1} its initial state. A sequence of cycles C_0, C_1, \dots, C_t is called a chain if the initial state of C_0 is S_0 and if C_i contains the initial state of C_{i+1} for $0 \leq i < t$, but C_j does not contain the initial state

of C_{j-i} for $1 \leq i \leq j \leq t$. This chain is called completed if no sequence C_0, \dots, C_t, C_{t+1} is a chain. A grammar G^* is constructed from the grammar G , the completed chains of which are H_1, H_2, \dots, H_p , as follows: 1. let us construct the states T_i and let $(0, i)$ be the single rule associated with T_i for $1 \leq i \leq p$. 2. Set an arbitrary one-to-one correspondence between finite sequences of integers and integers greater than p and let (b_1, \dots, b_k) be the integer corresponding to the sequence b_1, \dots, b_k . 3. Let H_i be the sequence C_0, \dots, C_s and let C_j be the sequence S_{j_1}, \dots, S_{j_t} and take $a_j = j_1$ for $0 \leq j \leq s$ (i. e. S_{a_j} is the initial state of cycle C_j). Then for all k , $1 \leq k < t$ (and all j and i) the state $T_{(i, a_0, a_1, \dots, a_j, j_k)}$ is constructed, the associated rules of which are $(0, i)$ and each rule $[r, (i, a_0, \dots, a_j, j_{k+1})]$ such, that $(r, j_{k+1}) \in S_{j_k}$. 4. Having carried out this construction for each chain, identify the states $T_{(x, a_0, \dots, a_j, a_j)}$ and $T_{(y, a_0, \dots, a_j)}$. Let $T_{(x, 0)}$ be the initial state of G^* . The analysis of G respecting chains is made explicit in G^* and $L_{G^*} = L_G$. Further, the notation (1) $a_1 (a_2, \dots, a_m) a_{m+1}$ is defined by the following properties: each a_i is either a string, or again $a_i = b_1 (b_2, \dots, b_n) b_{n+1}$, etc. (and after a finite number of such expansions there arises an expression, each elementary symbol of which is a string). Let Q_1 be the set of all sequences of the form c_1, \dots, c_{n+1} , where $c_1 = a_1$, $c_{n+1} = a_{m+1}$ and each c_i ($2 \leq i \leq n$) is one of a_2, \dots, a_n (and $n = 1, 2, \dots$). Let Q_2 be the set of sequences formed from the sequences of Q_1 by expanding the c_i 's which are not already strings in the same manner, etc. Then for some r , Q_r will be a set of sequences z_1, \dots, z_s , where each z_i is a string. Each such sequence represents the string $z_1 \wedge \dots \wedge z_s$, and (1) represents the set of these strings. In this sense any finite state language can be represented by a finite number of notations of the form (1). At last there are considered three quantities: $f(\lambda)$ is the number of sentences of length λ . $F(v) = \sum_{\lambda=1}^v f(\lambda)$ is the number of sentences of length λ or less and $G(\lambda)$ is the number of messages of length λ (a message may be composed of a string of sentences). If the terminal identity element (the considered L_G fulfils $G \in F_4$) is not considered to contribute to the length of a sentence, then

$$f(0) = f_{00}(1) = 0, \quad f(1) = f_{00}(2) = \sum_{i=1}^n f_{0i}(1) f_{i0}(1)$$

and

$$f(\lambda + 1) = f_{00}(\lambda + 2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{0i}(1) f_{ij}(\lambda) f_{j0}(1) \text{ for } \lambda = 1, 2, \dots,$$

where $f_{ij}(\lambda)$ is the number of paths from state i to state j that involve exactly λ transitions. If M_λ is a matrix, the elements of which are $f_{ij}(\lambda)$, $1 \leq i, j \leq n$, then $M_\lambda = M_1^\lambda$, and by matrix methods the authors show (2) $f(\lambda + 1) = -c_{n-1} f(\lambda) - \dots - c_0 f(\lambda - n + 1)$ for $\lambda = n + 1, n + 2, \dots$, where c_i are given by characteristic equation $|M_1 - r I| = r^n + c_{n-1} r^{n-1} + \dots + c_1 r + c_0 = 0$. In the general solution $f(\lambda) = a_1 r_1^\lambda + \dots + a_n r_n^\lambda$ of (2), if it is assumed that the dominate root r_1 is greater than 1, then (3) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\log f(\lambda)}{\lambda} = \log r_1$. (3) has been used by C. E.

Shannon [Bell System techn. J. 27, 379—423 (1948)] in a slightly different context as a definition of channel capacity and by analogy, it can be defined here as the informational capacity of sentences. The numbers $F(v)$ and $G(\lambda)$ are computed in a similar way.

K. Culik.

Golomb, S. W., Basil Gordon and L. R. Welch: Comma-free codes. Canadian J. Math. 10, 202—209 (1958).

$W_k(n)$ sei die Höchstzahl von k -ziffrigen Wörtern eines n -ziffrigen Alphabetes, welche man aus den insgesamt n^k solchen so auswählen kann, daß mit zwei Wörtern (a_1, a_2, \dots, a_k) und (b_1, b_2, \dots, b_k) kein „Überhang“ (overlap) $(a_{r+1} \dots a_k, b_1 \dots b_r)$ vorkommt. (Der Sinn dieser Codierung liegt offensichtlich in der eindeutigen „Ent-

zifferbarkeit im Kleinen“ ohne Abteilungszeichen.) — Zunächst gilt $W_k(n) \leq \sum \mu(d) n^{k/d/k}$, μ die Möbiusfunktion und d die Teiler von k . Dann wird gezeigt, daß für $k = 3, 5, \dots, 15$ sogar die Gleichheit gilt, und dies für ungerades k allgemein vermutet. Bei geradem k hingegen, dem schwierigeren Teil, finden sich Fälle, wo diese obere Schranke nicht erreicht wird, z. B. schon $W_2(n) = [n^2/3]$, sowie immer bei $n > 3^{k/2}$. — Stets existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} W_k(n)/n^k = \alpha_k$ und es ist $\alpha_k = 1/k$ für ungerades k , $1/e \cdot k < \alpha_k \leq 1/k$ für gerades k . A. Aigner.

Mandelbrot, Benoît: Der Ingenieur als Strategie: Verhaltenstheorien. (Eine Definition der Kybernetik und ihre Anwendung in der Linguistik.) Nachrichten-technische Fachberichte 3, 32—39 (1957).

Allgemeinbegriffe ohne mathematische Details.

H. Freudenthal.

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

Al-Dhahir, M. W.: A simplified proof of the Pappus-Leisenring theorem. Michigan math. J. 4, 225—226 (1958).

Eine n -dimensionale ($n > 1$) Verallgemeinerung des Satzes von Pappus für projektive Räume über kommutativen Körpern ist von Leisenring angegeben und bewiesen worden (vgl. dies. Zbl. 55, 381). Verf. vereinfacht durch Benützung eines Hilfspunktes den Leisenringschen Beweis.

H. Karzel.

Benz, Walter: Zur Theorie der Möbiusebenen. I. Math. Ann. 134, 237—247 (1958).

The author generalizes the circle geometry as treated by van der Waerden and Smid (this Zbl. 10, 268) and defines a „Möbius plane“ as a system of „points“ A, B, C, \dots and of „circles“ a, b, c, \dots that satisfy: (MI) three points are on (at least) one circle; if three circles a, b, c have two (or more) points in common, then $a \cap b = b \cap c = c \cap a$; (MII) if $A \in a$, $B \notin a$, then there is exactly one circle b through A and B that has only A in common with a ; (MIII) there are four points not on a circle; every circle has (at least) a point. If a and b are two different circles that have (at least) two points in common, their intersection is called „track“ (Fährte). After distinguishing a point W , the tracks and circles through W form the points and lines of an affine plane. An (F) -plane is a Möbius plane satisfying a certain additional condition. (F) -planes permit at most one orthogonality relation. Let Q be a quadric in projective 3-space that does not contain a straight line. Then the planar sections of Q are the circles of an (F) -plane.

A. Cronheim.

Lenz, Hanfried: Über ebene Drehungen. Arch. der Math. 8, 477—480 (1958).

Let \mathcal{G} be a group of homogeneous linear transformations of the affine plane over the field of real numbers satisfying (I) \mathcal{G} is transitive on the set of straight lines through the origin O , (II) every point $P \neq O$ can only be mapped on a finite number of points on the line OP by transformations of \mathcal{G} . It follows from a result by Danzer, Laugwitz and the author (this Zbl. 78, 358) that, with a suitable change of coordinates, the transformations of \mathcal{G} must have the form (i) $z' = e^{f(\varphi)} + i\varphi z$ or (ii) $z' = e^{f(\varphi)} + i\varphi \bar{z}$. If \mathcal{G} contains a „reflection“ (ii) then $f(\varphi) \equiv 0$, and \mathcal{G} is the full group of all rotations and reflections. Otherwise \mathcal{G} consists of all transformations of the form (i) where $f(\varphi)$ is any solution of the functional equation $f(\varphi + \psi) = f(\varphi) + f(\psi)$ with $f(\pi) = 0$. The continuous solution $f(\varphi) \equiv 0$ gives the full rotation group; any discontinuous solution leads to a non-pythagorean geometry [see e. g. Hilbert, Grundlagen der Geometrie (this Zbl. 71, 358), Anhang II]. The significance of this group (which is due to Pickert, cf. this Zbl. 34, 237) was pointed out independently by Pikus (this Zbl. 78, 342).

F. A. Behrend.

Kustaanheimo, Paul: On the relation of congruence in finite geometries. Math. Scandinav. 5, 197—201 (1958).

Verf. gibt ein System von Kongruenzaxiomen an und beweist: Ist E eine endliche affine Ebene über $GF(p^n)$, $p > 2$, so gibt es in E genau eine dieses Axiomensystem erfüllende Kongruenzrelation. Wesentliches Hilfsmittel beim Beweis ist folgender Satz von Segre: Jede Menge von $p^n + 1$ zu je dreien nichtkollinearen Punkten in E ist ein Kegelschnitt, d. h. Nullstellengebilde einer quadratischen Form über $GF(p^n)$ (dies. Zbl. 65, 134). P. Dembowski.

Freudenthal, Hans: Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems. Begriff des Raumes in der Geometrie. Ber. Riemann-Tagung Forsch.-Inst. Math. 92—97 (1957).

Verf. gibt zunächst einen kritischen historischen Überblick über die Bearbeitungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems, um dann an eine Untersuchung von J. Tits (vgl. dies. Zbl. 52, 162) anzuschließen. Verf. gibt hier nur seine Ergebnisse an, da eine ausführliche Erörterung seiner Resultate mit Beweisen inzwischen in der Math. Z. 63, 374—405 (1956) erschienen ist. H. Karzel.

Sasayama, Hiroyoshi: On generalized non-euclidean spaces. Commentarii math. Univ. Sancti Pauli 6, 141—156 (1958).

Unter einem n -dimensionalen quasi-nichteuklidischen Raum \mathfrak{D}_p^n versteht Verf. eine Struktur, die sich zusammensetzt aus a) einem geeigneten n -dimensionalen projektiven Raum R_n , b) einer in R_n enthaltenen, fest ausgewählten Hyperfläche S_p^{n-1} p -ter Ordnung $f(x, x, \dots, x) = 0$ mit

$$f(x, x, \dots, x) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p = 0}^n a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_p},$$

wo x_0, x_1, \dots, x_n Koordinaten des Punktes x seien und wo die Koeffizienten $a_{x_1 x_2 \dots x_p}$ als symmetrisch bezüglich der Indizes angenommen werden, c) der Gruppe g der Kollineationen von R_n , die S_p^{n-1} invariant lassen und d) explizit angegebenen Invarianten von g als Metrik: Die Gerade durch die verschiedenen Punkte P, Q schneide S_p^{n-1} in den p Punkten J_1, J_2, \dots, J_p ; dann wird gesetzt

$$D_i(PQ) = \frac{1}{p} \left(\sum_{p \geq k > i} \sum_{h=i}^{k-1} - \sum_{1 \leq k < i} \sum_{h=k}^{i-1} \right) \log(J_h J_{h+1}, PQ)$$

für $i = 1, \dots, p$ und $\delta(PQ) = \kappa \sum_{i=1}^p \log(PQ, J_i J'_i)$, wo κ eine Konstante, J'_i dem Punkt J_i in Abhängigkeit von den $p-1$ Punkten $J_1, \dots, J_{i-1}, J_{i+1}, \dots, J_p$ zugeordnet ist. — Z. Okamura (J. Shiga Prefectural Junior College, Ser. A, 1, 11—38, 114—121 (1951)) untersucht den Fall $n = p = 3$. Verf. gibt in der vorliegenden Note Beiträge zum allgemeinen Fall. So werden entwickelt ein (i. a. nicht symmetrischer) Orthogonalitätsbegriff, ein Parallelitäts- und ein Volumenbegriff. Eingeführt werden verallgemeinerte Weierstraßsche Koordinaten, die zusammen mit verallgemeinerten Cosinus-Funktionen zur Darstellung von Abbildungen aus g dienen. Schließlich überträgt Verf. die Sätze von Menelaus und Ceva auf den allgemeinen Fall. — Alle Betrachtungen werden dualisiert. W. Benz.

Elementargeometrie:

Renzo, Gregorio: Del teorema di Steiner sul triangolo isoscele. Periodico Mat., IV. Ser. 36, 110—114 (1958).

Neuer Beweis des Lehmus-Steinerschen Satzes: Ein Dreieck mit zwei gleichen Winkelhalbierenden ist gleichschenkelig; seine Grundseite ist die Verbindungslinie der Scheitel der halbierten Winkel. M. Zacharias.

Goormaghtigh, R.: Extension au polygone inscriptible de la droite de Simson d'angle quelconque. Mathesis 67, 23—27 (1958).

E. Langley [Ed. Times 51, 77 (1889)] hat den Begriff der Wallacegeraden eines Punktes M eines Kreises bezüglich eines eingeschriebenen Polygons $A_1 A_2 \dots A_n$ definiert: Die Fußpunkte der Lote von M auf die Wallacegeraden von M bezüglich der Dreiecke $A_2 A_3 A_4$, $A_3 A_4 A_1$, $A_4 A_1 A_2$, $A_1 A_2 A_3$ liegen auf der Wallacegeraden von M bezüglich des Vierecks $A_1 A_2 A_3 A_4$. Die Fußpunkte der Lote von M auf die Wallacegeraden von M bezüglich der Vierecke $A_2 A_3 A_4 A_5$, $A_3 A_4 A_5 A_1$, $A_4 A_5 A_1 A_2$, $A_5 A_1 A_2 A_3$, $A_1 A_2 A_3 A_4$ liegen auf der Wallacegeraden von M bezüglich des Fünfecks $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ usw. — Bekannt ist, daß der Satz von der Wallacegeraden eines Punktes M eines Kreises bezüglich eines eingeschriebenen Dreiecks auch für die Fußpunkte von Geraden durch M gilt, wenn diese gegen die Seiten des Dreiecks unter einem beliebigen Winkel ϑ geneigt sind (Enc. math. Wiss. III AB 10, Leipzig 1907—1910, S. 1237). — Verf. beweist die Verallgemeinerung des Satzes von der Wallacegeraden für einen beliebigen Winkel bezüglich eines eingeschriebenen Polygons. Die Winkel ϑ , die bei dieser Verallgemeinerung die rechten Winkel ersetzen, können für die Dreiecke, Vierecke usw. verschieden sein. Eine Umstellung der Reihenfolge dieser Winkel läßt die erhaltene verallgemeinerte Wallacegerade unverändert.

M. Zacharias.

Clawson, J. W.: An n -line property. Amer. math. Monthly 65, 32—33 (1958).

Unter einer „ n -Linie“ werden n gerade Linien einer Ebene verstanden, von denen keine drei durch einen Punkt gehen und keine zwei parallel sind. Verf. hat in einer früheren Arbeit (s. dies. Zbl. 71, 362) eine Kette von Kreisen gefunden, die mit der n -Linie, und gewissen von Miquel gefundenen Kreisen in Beziehung stehen. In der vorliegenden Arbeit beweist er, daß die n Miquel-Kreise der $(n-1)$ -Linien, die man durch Weglassung von der Reihe nach je einer der n Geraden der n -Linie erhält, ein gemeinsames Radikalzentrum haben. Dieses und das Radikalzentrum der in der früheren Arbeit gefundenen „neuen Kreise“ liegen mit dem Mittelpunkt des Morley-Kreises der n -Linie in einer geraden Linie.

M. Zacharias.

Thébault, Victor: Sphères associées à un tétraèdre. Mathesis 67, 20—23 (1958).

E. Lemoine hat [Assoc. Franç. Avanc. Sci. 18, 197—222 (1889)] durch Rechnung Eigenschaften von Kreisen festgestellt, die einem Dreieck zugeordnet sind. Verf. untersucht geometrisch die Eigenschaften von entsprechenden Kugeln bezüglich eines Tetraeders. — Ein Kreis (A) von Lemoine berührt z. B. in A die Seite AC und in a_1 die Seite BC des Dreiecks ABC und liegt in dem Innenwinkel C . Der Kreis (A') berühre in A die Seite AC und in a_2 die Seite BC und liege in dem Außenwinkel C . Analoge Kreise entsprechen den Ecken B und C und C und A des Dreiecks. — Die entsprechenden, dem Tetraeder $ABCD$ zugeordneten Kugeln sind: (A) und (B), berührend die Fläche CDA in A und BCD in A_2 , die Fläche BCD in B und CDA in B_2 , beide im Dieder DC liegend, und die Kugeln (A') und (B'), berührend CDA in A und BCD in A_3 und die Fläche BCD in B und CDA in B_3 ; ihre Mittelpunkte liegen in den inneren und äußeren Halbierungsebenen des Dieders DC . Den Kanten des Tetraeders entsprechen sechs Quaternen von Kugeln wie (A), (B), (A'), (B').

M. Zacharias.

Cantoni, Riccardo: La formula di Erone per il tetraedro. Archimede 10, 24—28 (1958).

Verf. versteht unter der Heronischen Inhaltsformel für das Tetraeder eine Formel $Q = P/V^2$, in der V das Volumen, Q eine Funktion der Kantenlängen und P eine Funktion der Inhalte der Flächen des Tetraeders bedeutet. Er verweist auf zwei frühere Arbeiten [Periodico Mat., IV. Ser. 10, 235—239 (1930); 12, 231—247 (1932)], in denen er den gleichen Gegenstand mit Hilfe umständlicher Rechnungen behandelt habe. Seine jetzige wesentlich einfachere Behandlung ist rein synthetisch. Er entwickelt ferner Formeln für Tetraeder mit einem Paar oder mit zwei Paaren gleicher Kanten.

M. Zacharias.

Mandan, Sahib Ram: Orthogonal tetrahedron. *Math. Mag.* **31**, 127—131 (1958).

Unter einem orthogonalen Tetraeder versteht Verf. ein Tetraeder mit Höhenschnittpunkt oder orthozentrisches Tetraeder. In einem solchen sind bekanntlich die Paare der Gegenkanten orthogonal, und die kürzesten Verbindungslinien der Gegenkantenpaare (Verf. nennt sie „bi-altitudes“) schneiden sich in einem Punkt (vgl. *Encykl. math. Wiss.* Bd. 3, 1. T. 2. Hälfte, S. 1061—1062). Verf. leitet analytisch aus dem Schneiden der Bialtitudes die Existenz des Höhenschnittpunktes und die Orthogonalität der Gegenkanten ab, indem er das Senkrechtstehen gewisser Raumelemente als Konjugiertsein ihrer Spuren in der Fernebene bezüglich des imaginären Kugelkreises deutet.

M. Zacharias.

Goldberg, M.: Tetrahedra equivalent to cubes by dissection. *Elemente Math.* **13**, 107—109 (1958).

Ede, John D.: Rhombic triacontahedra. *Math. Gaz.* **42**, 98—100 (1958).

Wheeler, R. F.: The flexagon family. *Math. Gaz.* **42**, 1—6 (1958).

Les flexagons ont été envisagés successivement par F. G. Maunsell [*Math. Gaz.* **38**, 213 (1954)] et par Oakley-Wisner (voir ce Zbl. **77**, 19). Dans le premier de ces papiers, est exposé un procédé de coloriage dû à A. R. Pargeter. Ici, une méthode de coloriage et de pliage, analogue à celle de M. Joseph, et applicable aux flexagons d'ordre quelconque, est développée. Un travail sur le dénombrement des flexagons est annoncé.

A. Sade.

• **Tortorici, Pietro:** Minimi e massimi in geometria piana elementare. (Quaderni didattici sulle matematiche complementari.) Palermo: Arti Grafiche Antonio Renna 1957. III, 133 p. L. 800. [Litografate].

Das vorliegende Heft enthält, nach didaktischen Gesichtspunkten geordnet, die wichtigsten Begriffe und Sätze über Maxima und Minima im Gebiet der ebenen Elementargeometrie. Das Verfahren ist, von wenigen Artikeln abgesehen, synthetisch. Über 100 Figuren dienen zur Veranschaulichung. Kap. I bringt eine Zusammenstellung der Definitionen und Sätze, die in den Entwicklungen von Kap. II, dem Hauptteil der Arbeit, gebraucht werden. 36 Übungsaufgaben, z. T. mit Andeutungen der Lösungen, bilden den Schluß der Arbeit. — Das zweite Kapitel beginnt in § 1 mit einer allgemeinen Betrachtung über die Notwendigkeit, bei jeder Extremalaufgabe sich zu vergewissern, ob ein Extremum existiert oder nicht, eine Frage, über die man noch bis in die Neuzeit (Jacob Steiner!) stillschweigend, oder mit intuitiven oder experimentellen Betrachtungen hinweggegangen ist. Es ist dankenswert, daß Verf. seine Ausführungen sogleich mit der Klärung dieser Grundfrage beginnt. In fünf weiteren Paragraphen behandelt er eine große Zahl von ebenen Extremalaufgaben. Die beiden letzten Paragraphen bringen elementare Isoperimetrie, Einschreibbarkeit und Extremalaufgaben vom Kreis. Den Satz, daß unter den isoperimetrischen ebenen Figuren der Kreis den größten Inhalt hat, beweist er unter ausdrücklicher Voraussetzung der Existenz des Maximums, wohl weil ihm der mögliche Beweis ohne diese Voraussetzung über den Rahmen seines Buches hinauszugehen scheint.

M. Zacharias.

Di Noi, Salvatore: La retta come linea di lunghezza minima. *Archimede* **10**, 152—154 (1958).

Axiomatische Betrachtungen zum Beweis des Satzes, daß eine Seite eines Dreiecks kleiner ist als die Summe der beiden andern.

M. Zacharias.

Schopp, J.: Über eine Extremaleigenschaft des Simplex im n -dimensionalen Raum. *Elemente Math.* **13**, 106—107 (1958).

Parameswaran, S.: Trigonometry retold. *Math. Gaz.* **42**, 81—83 (1958).

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

● **Grotemeyer, Karl Peter:** *Analytische Geometrie.* Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1958. 220 S., 73 Abb. DM 5,80.

Verf. beschränkt sich bewußt auf die Geometrie des dreidimensionalen Raumes, unter dem man sich den euklidischen Anschauungsraum vorzustellen hat; auf Fragen der ebenen Geometrie wird nicht besonders eingegangen. Systematische Anwendung der Vektorrechnung mit Skalar-, Vektorprodukt und Determinante und den zugehörigen Umrechnungsformeln und später die Verwendung der Matrizenrechnung erlauben kurze Relationen und Rechnungen, so daß auf dem knappen Raum über die wichtigsten invariantentheoretischen Begriffsbildungen und Zusammenhänge hinaus auch zugehörige geometrische Fragen behandelt werden. Inhalt: I. Einleitung (7), II. Die Vektoralgebra (7–26), III. Das Koordinatensystem (26–31), IV. Geraden und Ebenen (32–52), V. Kugeln (52–60), VI. Der Matrizenkalkül (60–74), VII. Affine Abbildungen (74–85), VIII. Bewegungen (85–98), IX. Ähnliche (äquiforme) Abbildungen (98–99), X. Die Flächen 2. Ordnung (100–155), XI. Einführung in die Projektive Geometrie des Raumes (155–176), XII. Behandlung der Quadriken im Rahmen der projektiven Geometrie (177–199).

M. Barner.

● **Convegno internazionale reticoli e geometrie proiettive.** Palermo, 25–29 ottobre 1957; Messina, 30 ottobre 1957. Roma: Edizioni Cremonese 1958. VI, 139 p. L. 1800.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

Kelly, L. M. and W. O. J. Moser: *On the number of ordinary lines determined by n points.* Canadian J. Math. 10, 210–219 (1958).

Es sei P eine aus n Punkten der reellen projektiven Ebene bestehende Menge, S die Menge aller Verbindungsgeraden der Punkte von P , und es sei $|S| > 1$ vorausgesetzt, d. h. die Punkte von P sollen nicht alle auf einer Geraden liegen. Dann besagt eine 1893 von Sylvester ausgesprochene Vermutung, daß es in S „gewöhnliche“ (d. h. mit nur zwei Punkten von P inzidente) Geraden geben muß. Diese Vermutung ist von verschiedenen Autoren bewiesen worden, jedoch ist die Frage nach der Anzahl m der gewöhnlichen Geraden in S noch nicht befriedigend geklärt. Das bisher beste Ergebnis $m > \sqrt{2}n - 2$ von Motzkin (dies. Zbl. 43, 146) wird von Verff. verbessert: es gilt $m \geq \frac{3}{7}n$. Für $n = 7, 8$ ist kein schärferes Resultat möglich, wie an Beispielen gezeigt wird; Verf. vermuten jedoch, daß $m \geq \frac{1}{2}n$ gilt für $n > 7$. [Anm. d. Ref.: Die Gültigkeit der bewiesenen Ungleichung beschränkt sich nicht auf die reelle projektive Ebene; vielmehr lassen sich die Beweise wörtlich u. a. auf zur reellen topologisch äquivalente projektive Ebenen übertragen, z. B. auf die bekannte Moultonsche Ebene.]

P. Dembowski.

Pišl, Milan: *Zirkulare Kubiken und bizirkulare Quartiken.* Pokroky Mat. Fys. Astron. 3, 32–41 (1958) [Tschechisch].

Verf. diskutiert die reellen ebenen Kurven dritter und vierter Ordnung, die einmal bzw. zweimal durch die absoluten Kreispunkte gehen, wobei er sich der zweckmäßigen Darstellung in Minimalkoordinaten bedient. (Die absoluten Punkte als „isolierte“ Doppelpunkte der bizirkularen Quartik zu bezeichnen, weil die Tangenten daselbst nicht reell sind, ist allerdings nicht am Platz). — Ermittelt werden u. a. die ordentlichen und außerordentlichen Brennpunkte der rationalen Exemplare, die Tangenten in und aus dem dann vorhandenen (in den Ursprung verlegten) eigentlichen Doppelpunkt, sowie die Doppeltangenten. Auf geometrische Erzeugungen und Eigenschaften wird nicht eingegangen.

W. Wunderlich.

Busulini, Bruno: *Sul gruppo delle pseudo-congruenze.* Ann. Univ. Ferrara, n. Ser. 6, 27–39 (1957).

Betrachtung über die Gruppe der Ähnlichkeiten in der komplexen Ebene, die

durch ähnliche Minimalstrahlenbüschel erzeugt gedacht werden. Analytisch läuft dies auf die Verwendung von isotropen Koordinaten $u = x + iy$, $v = x - iy$ hinaus, die eine gleichsinnige Ähnlichkeit durch $u' = \alpha u + a$, $v' = \beta v + b$ beschreiben, während für eine ungleichsinnige Ähnlichkeit u' und v' zu vertauschen wären. $\alpha\beta$ gibt das Quadrat des (linearen) Ähnlichkeitsverhältnisses an, so daß die kongruenten Transformationen durch $\alpha\beta = 1$ gekennzeichnet sind; als „Pseudokongruenzen“ werden die zu $\alpha\beta = -1$ gehörigen Transformationen bezeichnet, die demnach im Reellen nicht existieren. W. Wunderlich.

Schwerdtfeger, Hans: Zur Geometrie der Möbius-Transformation. Math. Nachr. 18, H. L. Schmid-Gedächtnisband 168—172 (1958).

Es wird die Frage erörtert, ob sich die perspektive Beziehung zwischen zwei geraden Punktreihen durch eine (gleichsinnige) Möbiustransformation $z' = (\alpha z + \beta) : (\gamma z + \delta)$ vermitteln läßt. Eine Gerade l geht dann und nur dann wieder in eine Gerade l' über, wenn sie den Verschwindungspunkt $v = -\delta/\gamma$ enthält, und l' geht analog durch den Fluchtpunkt $u' = \alpha/\gamma$. Die Zuordnung der Reihen l und l' ist auf jeden Fall eine projektive, und sie wird speziell zur Perspektivität, wenn der Schnittpunkt von l und l' sich selbst entspricht, also in einen der Fixpunkte $z_1 = z'_1$, $z_2 = z'_2$ fällt. Es gibt mithin im allgemeinen zwei reelle Geraden l_1, l_2 , die auf ihre entsprechenden l'_1, l'_2 perspektiv bezogen werden, nämlich die Verbindungsgeraden von v mit z_1, z_2 , die in die Verbindungsgeraden von u' mit z_1, z_2 transformiert werden. Wegen $z_1 + z_2 = u' + v$ bilden die vier genannten Geraden ein (unter Umständen ausgeartetes) Parallelogramm und $z_2 (z_1)$ ist das Perspektivitätszentrum für $l_1, l'_1 (l_2, l'_2)$. Da dieses „charakteristische Parallelogramm“ jede beliebige Gestalt annehmen kann, so läßt sich auch umgekehrt jede vorgelegte Perspektivität in eine (loxodromische oder elliptische) Möbiusverwandtschaft einbetten. — Bei einer elliptischen (nichtinvolutischen) Möbiustransformation ist das charakteristische Parallelogramm ein Rhombus, dessen u' und v verbindende Diagonale eine Fixgerade ist; auf der zweiten, z_1 und z_2 verbindenden Diagonale schneiden sich entsprechende Gerade l, l' . [Anm. d. Ref.: Im allgemeinen Fall erfüllen die Schnittpunkte ll' eine dem charakteristischen Parallelogramm umschriebene gleichseitige Hyperbel, die als Erzeugnis der gegenseitig-kongruenten Strahlbüschel $v(l)$ und $u'(l')$ entsteht.] W. Wunderlich.

● **Spain, Barry:** Analytical conics. (International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics. Vol. 3.) London and New York: Pergamon Press 1957. IX, 145 p. 30 s. net.

Das „textbook“ der analytischen Geometrie der Kegelschnitte ist — dem angelsächsischen Bildungswesen entsprechend — für Studenten des ersten College-Semesters und für Schüler, die Mathematik als Wahlfach wählen, bestimmt. Verf. strebt für diesen Zweck, von den Anfangsgründen ausgehend, eine kurze und bündige Darstellung der grundlegenden Ideen und Methoden an. — Inhaltsübersicht: Die Gerade; der Kreis; Ellipse; Hyperbel; Parabel (jeweils in analytischer Normalform); Translationen und Drehungen des Koordinatensystems; Diskussion der allgemeinen quadratischen Gleichung; homogene cartesische Koordinaten, die uneigentliche Gerade; Pol und Polare, konjugierte Durchmesser bei allgemeiner Kegelschnittsgleichung; Kegelschnittbüschel; das Doppelverhältnis auf der Geraden und im Strahlenbüschel; Geradenkoordinaten, Polarverwandtschaft, Dualitätsprinzip; allgemeine projektive Koordinaten. Die Lösungen der zahlreichen Übungsbeispiele werden in einem Anhang diskutiert. — Bei Verwendung der Index-Schreibweise würden viele Formeln übersichtlicher werden und die (verallgemeinerungsfähigen) invariantentheoretischen Aussagen deutlicher hervortreten. M. Barner.

McMahon, James J.: Matrix proof of Pascal's theorem. Amer. math. Monthly 65, 24—27 (1958).

Durch zwei ebene Schnitte einer Quadrik gehen zwei quadratische Kegel. Aus

vier ebenen Schnitten erhält man so 12 Kegelspitzen, deren Konfiguration Verf. in unvollständiger Weise untersucht. Das ebene Analogon läuft auf den Pascalschen Satz hinaus.

H. Lenz.

● Gordevskij, D. Z.: Aufgaben zur analytischen Geometrie über die Erzeugung von Kurven und Flächen. [Zadači po analitičkoj geometrii na obrazovanje linij i poverchnočet.] Chaikov: Verlag der staatlichen A. M. Gorkij-Universität zu Chaikov 1958. 62 S. R. 1,40. [Russisch].

Facciotti, Guido: Sulle quartiche sgheembe di seconda specie. Periodico Mat., IV. Ser. 36, 93—109 (1958).

Si tratta di una monografia sulla curva gobba del quarto ordine, K , che non è base di un fascio di quadriche, scoperta dal Salmon nel 1849, e, poco più tardi, qualificata „di seconda specie“ dal Cremona. Le sue proprietà più notevoli sono soprattutto collegate al gruppo delle omografie che la mutano in sè, e all'esistenza di particolari corde principali (terna di bisecanti che escono da un medesimo punto, detto centro del Bertini) e di quattro punti stazionari (nei quali il piano osculatore possiede un contatto del terzo ordine). La K è razionale e il birapporto dei quattro punti stazionari ne costituisce un invariante, dando luogo all'esame dei casi armonico ed equianarmonico. L'esposizione dell'A. si presenta completa ed esauriente, con qualche accorgimento che conduce a semplificare i procedimenti classici.

L. Campedelli.

Palman, Dominik: Flächen dritter Ordnung mit zwei absoluten Doppelpunkten, die den absoluten Kegelschnitt enthalten, und zirkuläre Kurven dritter Ordnung. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. 13, 41—55 (1958).

Verf. erzeugt diese Flächen Ω in folgender Weise: c sei eine zirkuläre Kurve 3. Ordnung (Geschlecht 1 oder 0) in einer Ebene π des R_3 . In jeder Ebene eines Büschels θ , senkrecht zu π und parallel zur Asymptote von c , werde nun derjenige Kreis konstruiert, der die beiden endlichen Schnittpunkte dieser Ebene mit c als Endpunkte eines Durchmessers besitzt. Die Gesamtheit dieser Kreise bildet Ω . Daß hiermit alle in der Überschrift genannten Flächen erfaßt werden, wird nicht ausdrücklich gezeigt, aber gelegentlich benutzt. Verf. behandelt dann das System der Geraden auf Ω und bringt eine Reihe von Sätzen über Symmetrie von Ω , über den Berührkegel an Ω im absoluten Kegelschnitt (insbesondere einige bemerkenswerte Eigenschaften von Ω im Zusammenhang mit dem Scheitel dieses Kegels) und über die Möglichkeit, Ω als Schnittgebilde eines Kugelbüschels und eines dazu projektiven Ebenenbüschels zu erzeugen (Analogie zu einem Satz von Czuber über zirkuläre kubische Kurven). Den Schluß der Arbeit bildet ein Satz über die zur Asymptote parallelen und die durch den endlichen Asymptotenschnittpunkt gehenden Tangenten an c (τ_i bzw. σ_j): Der Schnittpunkt von τ_i und σ_j hat von den beiden Berührungspunkten jeweils die gleiche Entfernung.

H. Germer.

Algebraische Geometrie:

Šafarevič (Shafarevich), I. R.: Birational equivalence of elliptical curves. Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 267—270 (1957) [Russisch].

Die rationalen Klassen von elliptischen Kurven über einem beliebigen Körper k mit von 2 oder 3 verschiedener Charakteristik und vorgegebener Jacobischer Mannigfaltigkeit ω mit der Gleichung $y^2 = x^3 + ax + b$ ($a, b \in k$) bilden eine Gruppe (vgl. A. Weil, dies. Zbl. 56, 34 und 65, 142). Verf. findet, daß diese zur eindimensionalen Cohomologiegruppe $H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{A}_{\tilde{k}})$ isomorph ist. Hier bedeutet \mathcal{G} die Galoissche Gruppe der separablen algebraischen Hülle \tilde{k} des Körpers k und $\mathfrak{A}_{\tilde{k}}$ die diskrete Gruppe der Punkte auf ω mit Koordinaten aus \tilde{k} . Die Ordnung einer elliptischen Kurve γ aus jener Gruppe ist ein Teiler der kleinsten positiven Ordnung einer Divisorenklasse auf γ (Exponent). Ist k algebraischer Zahlkörper, so gibt es zu einer vor-

gegebenen absoluten Invariante j und einem Primdivisor ersten Grades in einer vorgegebenen endlichen Erweiterung von k nur endlich viele birational nicht-äquivalente Kurven über k . Dasselbe gilt, wenn k der Körper der p -adischen Zahlen ist.

W. Engel.

Šafarevič (Shafarevich), I. R.: Exponents of elliptic curves. Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 714—716 (1957) [Russisch].

Einer algebraischen Kurve γ über einem Körper k können außer dem Geschlecht g folgende ganzzahlige Invarianten zugeordnet werden: der kleinste positive Grad f eines Divisors auf γ , der kleinste Grad d einer Kurve, die birational äquivalent zu γ über k ist und der kleinste Grad ν eines Primdivisors auf γ . Für elliptische Kurven ist $\nu = f$, $d = f$ für $f > 2$; $d = 4$ für $f = 2$ und $d = 3$ für $f = 1$. f wird der Exponent der Kurve γ genannt, und es gilt $f \mid 2g - 2$. Verf. zeigt, daß über dem Körper der rationalen Zahlen elliptische Kurven γ mit beliebig großem Exponenten existieren, wobei sich sogar die Jacobische Kurve ω der Kurve γ vorschreiben läßt. Für den Beweis verwendet er die Gruppe, die die Klasse der über k birational äquivalenten Kurven mit vorgegebener Jacobischer Kurve ω bilden. Die Konstruktion dieser Gruppe hat Verf. in der oben referierten Arbeit angegeben. *W. Engel.*

Buquet, A.: Sur la détermination de points rationnels d'une cubique à partir de points rationnels de base. Mathesis 67, 27—44 (1958).

Aus zwei rationalen Punkten A, B einer Kubik Γ vom Geschlecht 1, deren Gleichung rationale Koeffizienten hat, erhält man bekanntlich einen weiteren rationalen Punkt C von Γ , indem man die Gerade AB mit Γ zum Schnitt bringt. Stellt man die Punkte von Γ mittels eines elliptischen Parameters x dar, so besteht die Menge der aus einer Basis von rationalen Punkten A_0, A_1, \dots, A_p mit Parameterwerten x_0, x_1, \dots, x_p auf diese Weise hervorgehenden Punkte nach Poincaré aus den Punkten $(3n_0 + 1)x_0 + n_1(x_1 - x_0) + \dots + n_p(x_p - x_0)$, Verf. stellt eine dieser entsprechende Formel auf elementarem Wege her — also ohne Benützung der Parameterdarstellung, lediglich mit Hilfe geometrischer Sätze — und verwendet dazu eine symbolische Rechnung mit den Punkten und Punktepaaren von Γ . Jedem Punkt P von Γ wird ein Punkt $-P$ von Γ zugeordnet. Daß A, B, C auf einer Geraden liegen, wird durch eine der folgenden Gleichungen ausgedrückt: $A + B + C = 0$, $B + C = (B, C) = -A$, $-B - C = (-B, -C) = A$. Für jeden Punkt P von Γ gilt ferner $(P, -P) = (-P, P) = 0$. Für das „gemischte Paar“ $(A, -B) = (-B, A)$ besteht keine Reduktionsmöglichkeit. Der Aufbau dieses Kalküls mit nicht wenigen Definitionen und Konventionen, deren Widerspruchsfreiheit keineswegs offenkundig ist, erscheint indessen weder besonders einfach, noch logisch ganz einwandfrei. — Verf. wendet sich dann unter der Annahme, daß eine Basis von $p + 1$ ($p = 0, 1, 2, 3$) rationalen Punkten bekannt ist, der tatsächlichen Berechnung der durch die gewonnene Formel bestimmten weiteren rationalen Punkte zu. Die Gleichung von Γ wird zuvor jedesmal mittels rationaler Kollineationen in geeigneter Weise reduziert. Ein zur Erfassung dieser Punkte benütztes alternierendes Verfahren $[A, B; P_0]$ besteht darin, daß man auf Grund zweier Basispunkte A und B sowie eines weiteren Punktes P_0 durch Ziehen der Geraden $AP_0, P_1, BP_1, P_2, AP_2, P_3, BP_3, P_4, \dots$ und $BP_0, P_1', AP_1', P_2', BP_2', P_3', AP_3', P_4', \dots$ die „Kette“ $\dots P_4' P_3' P_2' P_1' P_0 P_1 P_2 P_3 P_4 \dots$ bildet. Für ihre Punkte besteht dann bei ganzem n eine der Darstellungen $P_0 + n(A - B)$ und $-P_0 - A + n(B - A)$. Ist nur ein Basispunkt A bekannt, so kann, falls A kein Wendepunkt ist, als zweiter sein Tangentenpunkt $-2A$ und als P_0 der Punkt A selbst gewählt werden. In diesem Fall werden für das Auftreten kurzer Perioden einfache Bedingungen angegeben. Bei 2 und mehr Basispunkten müssen mehrere solche Ketten gebildet werden. — Den Schluß bildet eine (streng genommen nicht hierher gehörige) Überführung der Gleichung einer Kubik in die Form $T' T'' + z^2 (p x + q y + r z) = 0$, wenn keine rationalen Punkte benützt werden können.

E. Schönhardt.

Morin, Ugo: Problemi di razionalità ed analisi indeterminata. Rend. Sem. mat. fis. Milano **27**, 160—166 (1958).

Es handelt sich hier um algebraische Mannigfaltigkeiten, welche ein rationales System von rationalen Kurven des Index 1 besitzen: damit birational äquivalent sind Hyperflächen V_r^n des S_{r+1} , die eine Gerade g ($n - 2$)-fach enthalten. Die Ebenen durch g schneiden auf der Hyperfläche V_r^n ein System K von Kegelschnitten aus. Das Problem besteht nun darin, anzugeben, unter welchen Voraussetzungen eine rationale Φ_{r-2} existiert, welche jeden Kegelschnitt in einem Punkt schneidet (unisekant). Das läuft darauf hinaus, für eine Kegelschnittsgleichung, deren Koeffizienten einem rationalen Funktionenkörper angehören, die Existenz einer Lösung im Grundkörper nachzuweisen. Verf. hat in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **21**, 153) eine geometrische Bedingung dafür angegeben; hier leitet er eine damit äquivalente, algebraisch formulierte Bedingung ab. W. Gröbner.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Ginatempo, Nicola: Sull'integrazione delle formule di Serret-Frenet. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **13**, 112—115 (1958).

Verf. verbessert ein, von T. Poeschl (dies. Zbl. **48**, 150) stammendes Resultat, wonach die Integration der Serret-Frenetschen Formeln auf die Integration einer Differentialgleichung von Riccatischem Typ zurückführbar ist. Verf. zeigt, daß diese Riccatische Differentialgleichung mit einer homogenen linearen Differentialgleichung (natürlich mit veränderlichen Koeffizienten) gleichbedeutend ist. S. Fenyő.

Bilinski, Stanko: A note on the fundamental equations of the theory of surfaces. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. **13**, 121—124 (1958).

Langwitz, Detlef: Eine Bemerkung über Flächenabbildungen. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **60**, 93—96 (1958).

Eine Abbildung zweier Flächen aufeinander ist höchstens a) konform, b) i. w. flächentreu, c) geodätisch (Geodätische werden aufeinander abgebildet). Besitzt sie zwei dieser Eigenschaften, so auch die dritte, und sie ist dann i. w. längentreu. (i. w. = bis auf einen konstanten Faktor). Gilt nicht für höhere Dimensionen.

K. Legrady.

Kreyszig, Erwin and Tibor Radó: On rigidity properties of developable surfaces. J. Math. Mech. **7**, 419—432 (1958).

C sei eine Raumkurve mit den Grundvektoren ξ_1, ξ_2, ξ_3 ; S sei eine durch C gehende abwickelbare Fläche, bestimmt durch den Flächennormalenvektor $\xi = \beta_2 \xi_2 + \beta_3 \xi_3$, $\beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$, $\beta_2 \neq 0$. Durch C geht eine zweite zu S isometrische Fläche S mit $\xi = -\beta_2 \xi_2 + \beta_3 \xi_3$. — Der Satz ist (Bem. d. Ref.) ein Spezialfall eines bekannten: Bianchi-Lukat, Differentialgeometrie (2. Aufl., Leipzig 1910), § 110. — S ist von S verschieden, wenn C nicht geodätisch auf S ist ($\beta_3 \neq 0$), sonst mit S identisch; aber es gibt im letzteren Fall eine isometrische Abbildung von S auf sich selbst, die nicht die Identität ist. Die isometrische Abbildung von S auf S ist „starr“, d. h. erhält die räumlichen Entfernungen der Flächenpunkte, dann und nur dann wenn C eben ist; es handelt sich dann um Spiegelung an der Ebene von C . E. Rembs.

Bojarskij, B. V. und I. N. Vekua: Ein Beweis für die Starrheit der stückweise regulären, geschlossenen, konvexen Flächen nicht-negativer Krümmung. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **22**, 165—176 (1958) [Russisch].

It is known that if the Gaussian curvature K is a continuous differentiable function of position on an ovaloid, then the ovaloid is not deformable. In order to generalize this theorem known as the rigidity theorem for an ovaloid, the authors have utilized the integral identity of Blaschke and demonstrated the rigidity of a very wide class of closed piecewise regular convex surfaces of non-negative curvature.

Su Buchin.

Sun Ché-sén (Sun Ho-shen): Some rigidity characters of surfaces of revolution. Doklady Akad. Nauk SSSR 116, 758—761 (1957) [Russisch].

Vekua [Czechosl. math. J. 6, 143—160 (1956)] has derived some theorems on the non-deformability of ovaloids after proving certain criterions on the non-deformability of surfaces of positive constant Gauss curvature in the case of infinitesimal deformations. The present paper deals with some characterizations of rigidity of ovaloids of revolution as well as a certain class of surfaces of revolution of negative curvature.

Su Buchin.

Trost, E.: Eine charakteristische Eigenschaft der Rotationsflächen zweiten Grades. Elemente Math. 12, 73—75 (1957).

Kurzer und einfacher Beweis für die Tatsache, daß die einzigen Drehflächen, die von umschriebenen Zylindern in ebenen Kurven berührt werden, Quadriken sind.

W. Blaschke.

Kovancov (Koventzov), N. I.: Des champs de vecteurs associés à un complexe réglé. Ukrain. mat. Žurn. 10, 37—58, français. Zusammenfassg. 58 (1958) [Russisch].

In a given rectilinear complex C consider the vector field defined by a point M on each ray r of C , so called the centre of the field, and a vector \vec{v} parallel to r . The central field in which its centre coincides with the centre of r belongs to such fields. The pairs (M, \vec{v}) may be taken as generators of non-holonomic surfaces σ , so that we associate with the fields two quadratic forms, the principal curvatures, and in particular, the mean curvature and total curvature of σ . The latter vanishes when and only when the field is central. By means of Cartan's method of exterior forms it is proved that the decomposition of the complex C into a one-parametric family of normal congruences (in case the surfaces σ are holonomic) depends upon an arbitrary function of two arguments. The author has especially studied three particular cases where the surfaces σ are, respectively, of constant curvature, minimal and the family of normal congruences is of Lamé. In the first case the decomposition can be achieved either by at most four manners, or an infinity of manners; in the second, it can be achieved either by at most two manners, or an infinity of manners. The last case gives rise to special complexes which admit the maximum number of such decompositions. More particularly, for a linear complex the number of decompositions is given by two functions of one argument, while any non-singular and non-linear complex admits a less number of decompositions. The paper is concluded by showing that at most nine fields can be associated with a complex C , such that the central curves are circles, and examining the degenerate case where the fields form an infinite set.

Su Buchin.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Ščerbakov (Sheherbakov), R. N.: Projective invariant marks of a ruled surface belonging to a given congruence. Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 390—393 (1957) [Russisch].

Gegeben sei eine Geradenkongruenz des dreidimensionalen projektiven Raumes. P_1, P_2 seien die Brennpunkte auf der betrachteten Kongruenzgeraden. P_4 die Laplace-transformierte von P_1 , P_3 die Laplacetransformierte von P_2 . Wählt man in der zweiparametrischen Geradengesamtheit eine einparametrische Untermannigfaltigkeit aus, so entsteht eine Regelfläche R_1 in der Geradenkongruenz; mit R_1 ist eine zweite Regelfläche R_2 in der Geradenkongruenz invariant dadurch verbunden, daß die Torsalrichtungen der Kongruenz die zu R_1 und R_2 gehörigen Richtungen harmonisch trennen. Für das Regelflächenpaar R_1, R_2 in der Kongruenz sollen invariante Bezugssysteme A_1, A_2, A_3, A_4 konstruiert werden. Man wählt A_1, A_2 auf der Kongruenzgeraden harmonisch bezüglich der Brennpunkte P_1, P_2 . Die Tangentenebene an R_1 in A_1 fällt dann mit der Tangentenebene an R_2 in A_2 zusammen, und die Tangenten-

ebene an R_2 in A_1 ist identisch mit der Tangentenebene an R_1 in A_2 . Wählt man dann für A_3 und A_4 die beiden Schnittpunkte der Geraden durch P_3, P_4 mit den beiden Tangentenebenen, so ist diese Festlegung symmetrisch bezüglich der beiden Regelflächen R_1, R_2 . Die endgültige Festlegung der Punkte A_1, A_2 auf der Kongruenzgeraden geschieht auf zwei verschiedene Weisen: 1. A_1, A_2 beschreiben die Mediankurven (G. Bol, dies. Zbl. 37, 391) bezüglich der Brennpunktskurven P_1, P_2 oder 2. A_1, A_4 und A_2, A_3 liegen in dem Komplex, der von dem Kongruenzstrahl und zwei Paaren von Nachbarerzeugenden der Regelflächen R_1 und R_2 aufgespannt wird. — Es werden die Invarianten in diesen Bezugssystemen berechnet und Sonderfälle analytisch und geometrisch diskutiert. — Der Verf. verwendet die Methoden und Formeln nach Finikoff, „Theorie der Kongruenzen“ (dies. Zbl. 72, 168). Die entsprechende invariantentheoretische Frage für die euklidische und affine Geometrie hat der Verf. früher [Lehrbriefe burjat.-mongol. päd. Inst. 5, 61 (1954); Mat. Sbornik, n. Ser. 37 (79), 527—556 (1955)] behandelt. *M. Barner.*

Karapetjan, S. E.: Lineare Komplexe der abwickelbaren Flächen von Kongruenzen. Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady 25, 97—100 (1957) [Russisch].

Zu einem Kongruenzstrahl einer Geradenkongruenz des dreidimensionalen projektiven Raumes gehören zwei Komplexe, die Schmiegekomplexe der beiden Torsallinien an der betrachteten Stelle (ein solcher Schmiegekomplex ist bestimmt durch fünf längs einer Torsallinie benachbarte Kongruenzgeraden). Für Kongruenzen in einem festen linearen Komplex fallen diese beiden Schmiegekomplexe zusammen. Im allgemeinen Fall haben die beiden Schmiegekomplexe eine lineare Kongruenz gemein. Deren Leitlinien bestimmen auf der Kongruenzgerade das Punktepaaar M_1, M_2 und in dem Ebenenbüschel durch die Kongruenzgeraden das Ebenenpaaar m_1, m_2 . Verwendet man weiter die Brennpunkte A_1, A_2 , bzw. die Brennebenen a_1, a_2 der Geradenkongruenz, so entstehen zwei Doppelverhältnisse $D = DV(A_1, A_2, M_1, M_2)$ bzw. $d = DV(a_1, a_2, m_1, m_2)$. Für W -Strahlensysteme gilt $Dd = 1$. Es ist $D = d$, wenn eine der Leitgeraden durch einen Brennpunkt geht und die andere Leitgerade in der Brennebene des anderen Brennpunktes liegt. Die Klasse der Geradenkongruenzen, bei denen beide Leitgeraden durch die Brennpunkte gehen (auf diesen Geraden liegen dann die Laplacetransformierten), hängt von sechs Funktionen einer Veränderlichen ab. Die Klasse der Kongruenzen mit $D = -1$ hängt von einer willkürlichen Funktion zweier Veränderlicher ab; das gleiche gilt für die Klasse der Kongruenzen mit $d = -1$: die beiden Klassen fallen nicht zusammen. — Die Arbeit baut analytisch auf die Formeln des IX. Kapitels des Buches von Finikoff „Theorie der Kongruenzen“ (dies. Zbl. 72, 168) (erscheint demnächst in deutscher Sprache) auf. *M. Barner.*

Italiani, Mario: Sulle congruenze di piani dello spazio proiettivo S_4 . Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 13, 105—111 (1958).

L'A. se propose d'étudier les congruences des plans dans un espace projectif S_4 , en utilisant la notion de points focaux de premier et du second ordre. Le point de départ est un théorème selon lequel la condition nécessaire et suffisante pour que par le plan générateur de la congruence passent ∞^1 surfaces développables, est que sa conique focale soit dégénérée. À l'aide de celle-ci on divise les congruences des plans de l' S_4 en congruences pour lesquelles par le plan générateur passe un seul système infini de surfaces développables, ou deux systèmes (distincts ou confondus) ou enfin une infinité de systèmes de surfaces développables. Excepté ces catégories il y a encore des congruences en général, quand la conique focale est proprement dite et dans ce cas la congruence ne contient pas de systèmes infinis de surfaces développables. C'est dans ce cas qu'on utilise les points focaux du second ordre qui considérés en nombre fini décrivent une nappe focale (ayant éventuellement plusieurs parties) qui se trouve sur la variété qui est le lieu des coniques focales. À l'aide de la classification et des notions introduites l'A. établit une série de propriétés.

Gh. Th. Gheorghiu.

Gejdel'man, R. M.: Metrische Charakterisierung der Kreiskongruenzen, die Familien von Kanallflächen besitzen. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 4 (76), 281—284 (1957) [Russisch].

Eine zweiparametrische Kreisesamtheit des dreidimensionalen euklidischen Raumes heißt Kreiskongruenz. Die speziellen Kreiskongruenzen mit der Möbius-invarianten Eigenschaft, daß es in der Kreiskongruenz eine oder zwei einparametrische Systeme aus Kreisflächen gibt, die Kanallflächen sind, hat der Verf. früher (dies. Zbl. 44, 365) vom Möbius-geometrischen Standpunkt aus behandelt. In der vorliegenden Arbeit werden die euklidischen Eigenschaften dieser speziellen Kreiskongruenzen untersucht. Die Kreisachsen bilden eine Geradenkongruenz; die Brennpunkte auf einer Achse sind notwendig die Mittelpunkte der Kugeln, die längs Torsallinien der Achsenkongruenz Kanallflächen erzeugen. Die Klasse der Kreiskongruenzen mit einem Kanallflächensystem (bzw. mit zwei Kanallflächensystemen) hängt von einer Funktion (bzw. von null Funktionen) zweier Veränderlicher und von einer Funktion (bzw. von zwei Funktionen) einer Veränderlichen ab.

M. Barner.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Eisenhart, Luther P.: Spaces for which the Ricci scalar R is equal to zero. Proc. nat. Acad. Sci. USA 44, 695—698 (1958).

Verf. gibt für dreidimensionale Räume mit der Metrik $ds^2 = g_{11} dx_1^2 + g_{22} dx_2^2 + g_{33} dx_3^2$ den Krümmungsskalar R explizit an und bestimmt einige spezielle Lösungen der Gleichung $R = 0$ von der Form 1. $\sqrt{g_{ii}} = x_1^{a_i} x_2^{b_i} x_3^{c_i}$ und 2. $\sqrt{g_{11}} = x_2^{b_1} + x_3^{c_1}$; $\sqrt{g_{22}} = x_1^{a_2}$, $\sqrt{g_{33}} = x_1^{a_3}$ wobei a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) Konstante bedeuten. D. Geißler.

Allamigeon, André-Claude: Espaces harmoniques décomposables. C. r. Acad. Sci., Paris 245, 1498—1500 (1957).

Im n -dimensionalen V_n bezeichne $\Omega(s) = \frac{1}{2} s^2$ das halbe Quadrat des geodätischen Abstandes zweier Punkte und ρ die zu dem Punktepaar gehörende Rusesche Invariante. Gilt für den harmonischen V_n : $\rho = e^{k\Omega}$, dann wird er als ein solcher mit zum Parameter k gehörenden exponentiellen Invarianten bezeichnet. Verf. beweist folgenden Satz 1. Ist ein harmonischer V_n Produktraum von V_μ und V_ν , dann ist sowohl V_μ als V_ν harmonisch mit zum gleichen Parameter gehörenden exponentiellen Invarianten. Im Satz 2 werden einige Bedingungen angegeben, die verbürgen, daß der Produktraum V_n vollständig harmonisch ist. O. Varga.

Nagano, Tadashi: On conformal transformations of Riemannian spaces. J. math. Soc. Japan 10, 79—93 (1958).

If the conformal transformation group of a Riemannian space M (metric positive definite) is indicated by $C(M)$, and the isometry group by $I(M)$, then M is called conformally reducible if a space M' can be found such that $C(M) \subset I(M')$. It is shown that this condition holds for a submanifold M' of M when M is not conformally flat. Use is made of a "theorem H " which states that if the conformal tensor does not vanish at any point of a space M , then M is conformally equivalent to a space M^* such that $C(M)$ is naturally isomorphic to $I(M^*)$; furthermore M^* does not admit an infinitesimal transformation but for a Killing vector field (V. Hlavaty, this Zbl. 11, 175). A consequence is that when $n > 4$ and the dimension of the $C(M)$ is $> n(n-1)/2 + 7$, then M is conformally flat (H. Hiramutu, this Zbl. 77, 352). Now flat spaces are studied for which the method of reduction is not applicable, which leads a. o. to a sharpening of a result of N. H. Kuiper (this Zbl. 41, 93). The paper ends with some theorems on the structure of M such that $\dim M > n(n-1)/2 + 2$, both in the case of transitive and intransitive $C(M)$ (See also K. Yano-T. Nagano, this Zbl. 79, 156).

D. J. Struik.

Vranceanu, Gheorghe: *Espaces de Riemann partiellement projectifs à métrique indéfinie*. Math. Nachr. 18, H. L. Schmid-Gedächtnisband 123—126 (1958).

Man sagt, daß eine Riemannsche n -dimensionale Mannigfaltigkeit V_n teilweise projektiv ist, wenn es ein Koordinatensystem x^1, x^2, \dots, x^n gibt, in welchem ein Teil der Gleichungen der geodätischen Linien durch lineare Gleichungen ausgedrückt wird. Insbesondere ergibt sich dies, wenn die Christoffelsymbole zweiter Art (1) $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ r s \end{smallmatrix} \right\} = \delta_r^\alpha \varphi_s + \delta_s^\alpha \varphi_r$ sind, ($\alpha = m+1, \dots, n$), wo φ_s Funktionen von x^1, x^2, \dots, x^n und δ_s^α die Kronecker-Symbole sind. Wenn $m=0$, ist V_n projektiv euklidisch und dann ist V_n eine Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung (Beltrami 1868 — Schläfli 1871), wenn $m=1$ ist, hat man die subprojektiven Mannigfaltigkeiten von Kagan. Verf. hat früher gezeigt, daß, wenn die Metrik von V_n positiv definit ist und (1) mit $0 < m < n-1$ gilt, die Metrik von V_n sich auf folgende kanonische Form bringen läßt

$$ds^2 = a_{ij} dx^i dx^j + \psi b_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (i, j \leq m, \alpha, \beta > m),$$

wo a_{ij} und ψ Funktionen von x^1, x^2, \dots, x^m sind, und $b_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ die Metrik einer $n-m$ dimensionalen Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung ist. In dieser Arbeit will Verf. entsprechendes für den Fall erreichen, wo die Metrik indefinit ist. Er betrachtet die Mannigfaltigkeiten V_n , welche ∞^{n-m} Mannigfaltigkeiten $x^\alpha = c^\alpha$ ($\alpha = m+1, \dots, n$; c^α willkürliche Konstanten) als Nullmannigfaltigkeiten enthalten. Es folgt leicht, daß nicht $m > n-m$ sein kann, oder die Metrik von V_n wäre ausgeartet. Wenn die Metrik von V_n Nullmannigfaltigkeiten der höchsten Ordnung enthält ($n=2m$), so läßt sie sich schreiben in der Form

$$ds^2 = 2dx^i dx^{m+i} + \varphi (x^i dx^{m+i})^2 + b_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

wo φ und $b_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta > m$) nur von den Koordinaten x^α abhängig sind.

I. Cattaneo-Gasparini.

Tonolo, Angelo: *Classi di ds^2 ternari le cui geodetiche ammettono integrali primi quadratici*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 24, 230—238 (1958).

Levi-Civita a étudié les espaces riemanniens dont le système d'équations des géodésiques admet une intégrale première quadratique. Dans un V_3 , en posant $\varrho_{hk} = \gamma_{h+1, h+2, k}$ [les indices congruents (mod 3) étant considérés équivalents] où γ sont les coefficients de Ricci d'un système de trois congruences de courbes — la condition, pour que la susdite intégrale existe, est que l'on puisse trouver trois fonctions $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ telles que

$$(\varrho_2 - \varrho_3) \varrho_{11} + (\varrho_3 - \varrho_1) \varrho_{22} + (\varrho_1 - \varrho_2) \varrho_{33} = 0; \quad i_h^\lambda \partial_\lambda \varrho_h = 0,$$

$$i_{h+1}^\lambda \partial_\lambda \varrho_h = 2(\varrho_{h+1} - \varrho_h) \varrho_{h+2, h}, \quad i_{h+2}^\lambda \partial_\lambda \varrho_h = 2(\varrho_h - \varrho_{h+2}) \varrho_{h+1, h}, \quad \partial_\lambda = \partial / \partial x^\lambda, \quad i_j^\lambda = \partial x^\lambda / \partial s_j,$$

ds_j étant l'élément d'arc dans la direction de la congruence d'indice j . En partant d'ici, l'A. déduit: 1. la métrique de Stäckel

$$ds^2 = \Omega [(dx^1)^2 / \Omega_{11} + (dx^2)^2 / \Omega_{21} + (dx^3)^2 / \Omega_{31}]; \quad \Omega = \det (\omega_{ij}), \quad \omega_{ij} = \omega_{ij}(x),$$

Ω_{ij} = complément algébrique de ω_{ij} , dans le cas $\varrho_1 \neq \varrho_2 \neq \varrho_3 \neq \varrho_1$, les congruences étant normales; 2. la métrique de Painlevé

$$ds^2 = [\Gamma(x^1, x^2) + K(x^3)] [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2],$$

si les congruences sont normales et isotropes (c.-à-d. telles que le vecteur de courbure géodésique de chaque congruence ait la direction de la bisectrice des deux autres);

3. la métrique de Levi-Civita

$$ds^2 = (dx^1)^2 + [\psi(x^1) - K] \Gamma_{\mu\nu}(x^2, x^3) dx^\mu dx^\nu,$$

dans le cas où une des congruences est normale et géodésique et $\varrho_1 \neq \varrho_2 = \varrho_3$.

M. Haimovici.

Pan, T. K.: Relative first curvature and relative parallelism in a subspace of a Riemannian space. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 11, 3—9 (1957).

The author generalizes to subspaces V_n of a Riemannian space V_m the concepts and results previously obtained for hypersurfaces ($n = m - 1$) (this Zbl. 55, 156).

L. A. Santaló.

Kaul, R. N.: Union curvature of a vector field. Tensor, n. Ser. 7, 185—189 (1957).

The author considers and gives some properties of the union curvature of a vector field with respect to a curve on a hypersurface immersed in a Riemannian space. The subject generalizes certain points of the work of Springer on union curves (this Zbl. 39, 178).

L. A. Santaló.

Sato, Kenkichi: On curvature and harmonic forms with values in analytic vector bundles. Osaka math. J. 10, 1—10 (1958).

Mit Hilfe der Greenschen Formel für eine kompakte, orientierbare, Riemannsche Mannigfaltigkeit M (S. Bochner, dies. Zbl. 17, 62) gelang es, folgenden Satz zu erhalten: Ist die Ricci-Krümmung auf M positiv definit, so existieren auf M keine harmonischen Vektoren, d. h. es verschwindet dann B_1 , die erste Betti'sche Zahl. [Siehe K. Yano-S. Bochner: Curvature and Betti numbers (dies. Zbl. 51, 394), p. 37.] Verf. erweitert dieses Resultat auf kompakte Kählersche Mannigfaltigkeiten. Er beweist zunächst eine entsprechende „Greensche Formel“ und gibt schließlich ein Kriterium dafür an, daß ein (r, s) -Tensor mit Werten in W (einem analytischen Vektorbündel über M) harmonisch ist. Daraus erhält Verf. eine ähnliche Aussage über die Nichtexistenz solcher harmonischer Tensoren (wenn nämlich ein der Ricci-Krümmung entsprechender Ausdruck positiv definit ist).

H. Götz.

Halder, Gita and Ram Behari: Some properties of automorphic equivalents of vectors in a Kaehler hypersurface. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A 23, 405—411 (1957).

Automorphic equivalence in the sense of the authors is the transformation by the complex transformation of the Kähler structure, i. e. $z \rightarrow iz$, $\bar{z} \rightarrow -i\bar{z}$. It is shown that conjugate directions, asymptotic lines and lines of curvature are invariant under this transformation.

H. Guggenheimer.

Rapcsák, A.: Eine neue Charakterisierung Finslerscher Räume skalarer und konstanter Krümmung und projektiv-ebene Räume. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 8, 1—18 (1957).

Diese Arbeit stellt eine Verallgemeinerung desjenigen Satzes der Riemannschen Geometrie für Finslersche Räume dar, der die Räume konstanter Krümmung durch die unbeschränkte Existenz totalgeodätischer Flächen (Ebenen) charakterisiert. Verf. definiert drei Arten von Ebenen: die Ebenen erster Art, die totalgeodätische Flächen sind; die Ebenen zweiter Art, die totalquasigeodätische Flächen sind, d. h. jede quasigeodätische Raumkurve, die durch ein Linienelement der Fläche bestimmt ist, gehört ganz zur Fläche und die Ebenen dritter Art, die Flächen sind, deren Normalen im Sinne der Raummetrik parallel sind. Verf. beweist die drei folgenden bemerkenswerten Sätze. Satz 1: In einem Finslerschen Raume kann dann und nur dann zu jeder (durch ein orthogonales Linienelement bestimmten) Stellung eine Ebene erster Art gelegt werden, falls derselbe projektiv-eben und von skalarer Krümmung ist. Nach Satz 2 ist die unbeschränkte Existenz von Ebenen zweiter Art ausschließlich in Finslerschen Räumen möglich, die nicht nur projektiv-eben und von skalarer Krümmung sind, sondern in denen darüber hinaus die kovariante Ableitung des Torsionstensors der Relation $A_{\alpha\beta\gamma|0} = 0$ genügt. Nach Satz 3 charakterisiert die unbeschränkte Existenz von Ebenen dritter Ordnung die Riemannschen Räume konstanter Krümmung.

O. Varga.

Katsurada, Yoshie: Alcune trasformazioni parallele di varietà algebriche $\{H, K\}$ di Del Pezzo-Segre. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 22, 719—725 (1957).

In bezug auf eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M_n mit affinem Zusammenhang erörtert der Verf. die Theorie des Zusammenhangs der algebraischen Mannigfaltigkeit $\{H, K\}$ von Del Pezzo-Segre (s. dies. Zbl. 72, 159), in der jedem kurvilinearen Differentialelement der Ordnung H mit dem Zentrum P die Punkte der M_n assoziiert sind. Dabei wird die Parallelübertragung von Extensoren benutzt [s. H. V. Craig, dies. Zbl. 17, 378 und A. Kawaguchi, dies. Zbl. 23, 169]. Der affine Zusammenhang von M_n sei durch $\Gamma_{jk}^i(x)$ gegeben. Dann kann man die Symbole $\tilde{I}_{\beta\gamma k}^{*\alpha i}$ durch mehrmalige Differentiation längs einer Kurve $x^i = x^i(t)$ erhalten. Diese Symbole definieren die Parallelübertragung von Extensoren und sind von einem Differentialelement $(x - \beta - \gamma)$ -ter Ordnung abhängig. Wir nehmen einen projektiven Raum einer Dimension $\geq \binom{n+B}{n} - 1$, in den die M_n eingebettet ist. Dann kann man jedem regulären kurvilinearen Differentialelemente $E_H(x^{(1)i}, \dots, x^{(H)i})$ der Ordnung H im Punkt P eine solche algebraische Mannigfaltigkeit $\{H, K\}$ der Dimension $(K - H)n + H$ zuordnen, daß sie der geometrische Ort von $\infty^{(K-H)(n-1)}$ den Punkt P bei veränderlichen E_k (regulär) berührenden Räumen S_k ist, wobei E_k auf M_n gerichtet ist und E_H enthält. Diese Mannigfaltigkeit besteht aus Differentialelementen $E_K(x_0^{(1)i}, \dots, x_0^{(H)i}, x^{(H+1)i}, \dots, x^{(K)i})$, wobei $x_0^{(1)i}, \dots, x_0^{(H)i}$ feste Werte und $x^{(H+1)i}, \dots, x^{(K)i}$ Variable bezeichnen. Wenn wir durch die Parallelübertragung von Extensoren aus dem Differentialelement E_H das Differential-element \tilde{E}_H erhalten, dann heißt das: $\{H, K\}$ und $\{\tilde{H}, \tilde{K}\}$ bestehend aus den Elementen $\tilde{E}_K(x_0^{(1)i}, \dots, x_0^{(H)i}, \tilde{x}^{(H+1)i}, \dots, \tilde{x}^{(K)i})$ sind parallel. A. Kawaguchi.

Su Buchin: Axiom of the plane in a descriptive geometry of K -spreads. Math. Nachr. 16, 215—226 (1957).

Der die Riemannschen Räume konstanter Krümmung charakterisierende Satz von der unbeschränkten Existenz totalgeodätischer Flächen wurde zunächst von Wang Hsien-Chung (dies. Zbl. 31, 276) für allgemeine Räume von Bahnen verallgemeinert. In der vorliegenden Arbeit erfährt dieser Satz eine Verallgemeinerung für die projektive Theorie der K -spreads. Bezeichnet S eine Untermannigfaltigkeit des K -spreads-Raumes und L einen im Punkte P von S berührenden L -Vektor, dann heiße S in P eben, falls S alle L in P berührenden K -spreads enthält. Falls diese Eigenschaft für jeden Punkt von L besteht, so heiße S totaleben (totally flat). Das Ebenen-Axiom besagt dann, daß für eine gewisse natürliche Zahl L ($1 < K < L < N$) eine zweimal differenzierbare totalebene Untermannigfaltigkeit von L Dimensionen existiert, die in einem beliebigen Raumpunkt einen willkürlich vorgegebenen L -Vektor berührt. Verf. beweist dann folgenden Satz. Gilt in einem Raum der K -spreads das Ebenen-Axiom, dann ist der Raum projektiveben.

O. Varga.

Su Buchin: A generalization of descriptive collineations in a space of K -spreads. Math. Nachr. 16, 227—232 (1957).

Gegenstand der vorliegenden Arbeit besteht in der Untersuchung der Kollineationen in der projektiven Theorie der K -spreads. Aus dem Geschwindigkeitsvektor, der eine infinitesimale Transformation bestimmt, sowie den die projektive Theorie der K -spreads festlegenden geometrischen Objekten konstruiert Verf. einen sogenannten assoziierten Tensor. Das Verschwinden dieses Tensors ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die fragliche Transformation eine Kollineation ist. Diese Relation ist ein Differentialgleichungssystem für den Geschwindigkeitsvektor. Die Kollineation existiert, falls die Integrabilitätsbedingungen dieses Gleichungssystems erfüllt sind. Unter Benützung entsprechend ver-

allgemeinerter Liescher und projektiv-kovarianter Ableitungen eines geometrischen Objektes, kann Verf. diese Integrabilitätsbedingungen in recht übersichtlicher Form gewinnen.

O. Varga.

Matsumoto, Makoto: *Relative Riemannian geometry. I. On the affine connection.* Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A **31**, 65—82 (1958).

In this paper the author introduces a notion of a relative affine connection of a pair of manifolds (M, N) . The connection in M is determined in relation to a so-called observing point in N . Further he considers a mapping „ g “ from the tangent vector space at a point of M to that at a point of N , and imposes the condition that the mapping „ g “ has its inverse. The author assumes that the dimension of M is equal to that of N and that the determinant of the tensor $g^i_j(x, y)$ defining the mapping „ g “, does not vanish. Under these considerations, the author defines a covariant differentiation and develops the theories, following to the ordinal affine connections. Various curvature tensors are derived according as an observing point displaces or not. Considering that a point of M displaces to the direction corresponding to the displacement of an observing point by the mapping „ g “, the author introduces another covariant differentiation and a new curvature tensor. In the last part of this paper, the author defines a path with respect to an observing point and a remarkable class of connections.

T. Postelnicu.

Moór, Arthur: *Untersuchungen in Räumen mit rekurrenter Krümmung.* J. reine angew. Math. **199**, 91—99 (1958).

Der Riemannsche Raum mit rekurrenter Krümmung ist gekennzeichnet durch die Gleichung $R^i_{jkl,m} = \kappa_m R^i_{jkl}$, wo das Symbol: „ m “ die kovariante Ableitung und κ_m einen kovarianten Vektor bedeutet. Die Theorie dieser Räume wurde von H. S. Ruse und A. G. Walker in mehreren Arbeiten eingehend studiert (dies. Zbl. **38**, 343; **39**, 177; **43**, 370). In dieser Arbeit entwickelt der Verf. diese Theorie für die affinzusammenhängenden Räume und für diejenigen metrischen Räume, in denen die Übertragungsparameter der Parallelübertragung der Vektoren nicht-symmetrisch sind. Am Anfang werden die Fundamentalformeln der affinzusammenhängenden Räume und der allgemeinen metrischen Übertragungen zusammengestellt. Weiter wird das Problem der Metrisierbarkeit der affinzusammenhängenden Räume von rekurrenter Krümmung, die Zerlegbarkeit dieser Räume und die Form des Krümmungstensors behandelt. In dem letzten Teil der Arbeit werden die allgemeinen metrischen Punkträume von rekurrenter Krümmung untersucht.

T. Postelnicu.

Haimovici, A.: *Sur quelques invariants dans les espaces à connexion affine à trois dimensions.* Ann. Polon. math. **3**, 300—303 (1957).

Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildet die Ermittlung derjenigen dreidimensionalen affinzusammenhängenden Räume, die für ein System von mehreren Richtungen gegenüber Parallelübertragungen invariante Funktionen gestatten. Sind die p von dem Punkt (x) ausgehenden Richtungen in Richtung der Vektoren X^i_a ($a = 1, 2, \dots, p$) gelegen, dann genügen die fraglichen Invarianten $f(x, X)_{(a)}$ den Systemen

$$X^i_a \partial f / \partial X^i_{(a)} = 0, \quad \partial f / \partial x^i - \Gamma^h_{ji} X^j_a \partial f / \partial X^h_{(a)} \quad (\text{nicht summieren hinsichtlich } a)$$

von Differentialgleichungen. Die Integrabilitätsbedingungen dieser Gleichungen ergeben eine Kette von Gleichungen, aus denen Verf. nicht nur die Invarianten explizit bestimmen kann, sondern auch die verschiedenen Typen von Räumen angeben kann, in denen solche Invarianten existieren. Ohne die verschiedenen Raumtypen der Reihe nach aufzuzählen, sei bloß erwähnt, daß es sich um Räume handelt, in denen es ein oder zwei Felder von totalgeodätischen Flächen bzw. ein oder zwei Scharen absolut paralleler Richtungsfelder gibt, bzw. eine Kombination dieser Fälle möglich ist.

O. Varga.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

• Schmerler, Georg: Eine Verallgemeinerung ordnungsgeometrischer Sätze über Kurven. Nürnberg: Omnia-Drucke H. Müller K. G. 1957. 15 S. (Auszug aus Diss.)

Verschiedene ordnungsgeometrische Sätze von Juelschem Typus über Bogen, insbesondere ebene Bogen, sind Spezialfälle von Sätzen über Korrespondenzen in einer Strecke S ; darunter werden verstanden Abbildungen aus einem, etwa k -fachen, Produkt $S \times \cdots \times S$ von S mit sich in ein m - oder, allgemein s_0 -faches Produkt von S , wobei $k < m$ ist. Von dieser Bemerkung ausgehend stellt Verf. im ersten Teil seiner Arbeit Bedingungen für Korrespondenzen in S auf, die hinreichen, um die Gültigkeit z. B. des sogenannten Reduktions- und Kontraktionssatzes zu gewährleisten. Im zweiten Teil werden die Entwicklungen des ersten Teiles benutzt, um die früher auf verallgemeinerte Kegelschnitte übertragenen Sätze von Böhmer, Mohrmann und Mukhopadhyaya (vgl. z. B. Ref., dies. Zbl. 28, 91) zu Sätzen über Korrespondenzen zu erweitern. Im dritten Teil wird gezeigt, daß die gewonnenen Sätze über Korrespondenzen die entsprechenden Sätze über Bogen (und Kurven) als Spezialfälle umfassen.

Otto Haupt.

Mirguet, Jean: Sur la convergence biunivoque des plans tangents à une orthosurface. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 1956—1957 (1958).

In Beantwortung einer früheren Frage von G. Bouligand gibt Verf. eine direkt-geometrische Bedingung an dafür, daß für eine Orthofläche F mit stetiger Tangentialebene $T(x)$ (in $x \in F$) folgendes gilt: Konvergiert $x \in F$ in Richtung der Halbtangente t an F in p gegen p und konvergiert $T(x) \cap T(p)$ gegen die Trägergerade g von t , so ist g Paratingente an F in p von höherem Rang als 1 (von höherer Ordnung als 2). Bezüglich des nicht ganz einfachen Wortlautes der fraglichen Bedingung sei auf die Note selbst verwiesen.

Otto Haupt.

Eggleston, H. G.: Tangential properties of Fréchet surfaces. Proc. Cambridge philos. Soc. 54, 187—196 (1958).

Let Π be a Fréchet surface of the type of the 2-cell in Euclidean 3-space R^3 and let $\Phi(x) = lm$ where Φ is a representation of Π , m is a continuous monotone mapping from a closed disk H in a plane onto a space \mathcal{M} and l is a continuous light mapping from \mathcal{M} into R^3 . For a point p in \mathcal{M} the concept of an approximate tangential plane to Π at $l(p)$ is defined. A suitable metric is introduced in \mathcal{M} and in terms of this metric a 2-dimensional Hausdorff measure $\mathcal{E}(\mathcal{L})$ is defined for sets \mathcal{L} in \mathcal{M} . By using a quasi-conformal representation due to Cesari the author proves the following theorem of Reifenberg (this Zbl. 46, 283). If T is the subset of points p of \mathcal{M} such that there is an approximate tangential plane to Π at $l(p)$ then, if the Lebesgue area $L(\Pi)$ of Π is finite, $\mathcal{E}(T) = L(\Pi)$.

E. Mickle.

Haupt, Otto: Bestimmung der Kontinua im E_n ohne n richtungsabhängige Paratingenten ($n \geq 2$). S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1956, 295—327 (1957).

E_n sei der euklidische n -dimensionale Raum. Eine Menge $M \subset E_n$ hat den Rang r , wenn es einen r -dim. aber keinen $(r-1)$ -dim. linearen Unterraum von E_n gibt, der M enthält. M hat den Komponenten-Ordnungswert (KO) k , wenn der Durchschnitt von M mit jeder Hyperebene höchstens k Komponenten besitzt. Die Gerade G ist Paratingente an M im Punkt p , wenn sie Limes von Geraden durch je zwei verschiedene, gegen p konvergierende Punkte von M ist. Ist b ein Büschel paralleler Hyperebenen in E_n , so hat M den Paratingenten-Ordnungswert (PO) t bezüglich b , wenn es (genau) t Paratingenten an M gibt, die in Hyperebenen von b enthalten sind; dabei wird eine Gerade, die Paratingente an M in r Punkten von M ist, von denen keine zwei der gleichen in M enthaltenen Strecke angehören, r -mal als Paratingente gezählt. M heißt von endlichem PO, bzw. vom PO t , wenn der PO

von M bezüglich aller Büschel paralleler Hyperebenen endlich, bzw. höchstens t ist. Ist K ein Kontinuum, das in keiner Hyperebene von b enthalten ist, und liegen die Hyperebenen H_i von b , die Paratingenten von K enthalten, in b nirgends dicht, so ist K Vereinigung der Durchschnitte $H_i \cap K$ und abzählbar vieler halboffener oder offener Bogen, die untereinander und zu allen H_i fremd und vom KO 1 bezüglich b sind. Gibt es n linear unabhängige, die Voraussetzung erfüllende Büschel b_i , so ist K zusammenhängend im Kleinen. — Als Stern sei jede Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Strecken im E_2 bezeichnet, die alle einen Punkt als Endpunkt gemeinsam haben. Für Kontinua im E_n ohne n zur gleichen Hyperebene parallele Paratingenten gilt dann der Satz: Ist K ein Kontinuum im E_n ($n \geq 2$) vom PO $t \leq n - 1$, so ist entweder $t = n - 1$ und K ein einfacher Bogen vom KO n und Rang n , der überall eine Tangente besitzt und dessen in einer Hyperebene enthaltenen Teilbogen Strecken sind, oder es ist $t = 1$ und K eine Strecke; im Falle $t = 1$, $n = 2$ kann K auch ein Stern von endlichem KO sein. *H. Künneth.*

Kelly, Paul and Ernst Straus: Curvature in Hilbert geometries. *Pacific J. Math.* 8, 119—125 (1958).

Es sei im Inneren einer geschlossenen, konvexen Kurve C eine Hilbertsche Metrik definiert. Dann heißt ein Punkt p hieraus positiv oder negativ gekrümmt, wenn eine Umgebung U von p existiert, so daß für jedes $x, y \in U$ gilt: $2h(\bar{x}, \bar{y}) \geq h(x, y)$ oder $2h(\bar{x}, \bar{y}) \leq h(x, y)$, wenn $h(p, q)$ den Hilbertschen Abstand zwischen den Punkten p und q bedeutet und \bar{x}, \bar{y} die Mittelpunkte der Abschnitte von p nach x bzw. y im Hilbertschen Sinne darstellen. Ist in p die Krümmung weder positiv noch negativ, so heißt die Krümmung an diesem Punkte unbestimmt. Ferner heißt ein Punkt projektives Zentrum von C , wenn eine projektive Transformation π existiert, so daß πp das affine Zentrum von πC ist. Dann wird folgender Satz bewiesen: Ist p ein Punkt bestimmter Krümmung, dann ist er projektives Zentrum von C . Ist speziell die Krümmung in jedem Punkt bestimmt, dann ist C eine Ellipse und die Hilbertsche Geometrie hyperbolisch. — Das gefundene Ergebnis wird auf das Innere einer n -dimensionalen mit einer Hilbertschen Metrik versehenen konvexen Fläche verallgemeinert. Die Definitionen für Krümmung und projektives Zentrum bleiben dabei ungeändert. Verff. vermuten, daß eine Hilbertsche Geometrie keine Punkte positiver Krümmung enthalten könne. *H. Fieber.*

Efimov, N. V. and S. B. Stečkin (Stechkin): Some properties of Chebyshev sets. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 118, 17—19 (1958) [Russisch].

On démontre le théorème suivant: dans un espace de Banach à n dimensions B le fait que la sphère unité soit strictement convexe et n'ait pas de points coniques, équivaut à la condition suivante: l'ensemble des parties bornées et convexes coïncide avec l'ensemble des parties bornées M telles que pour tout $x \in B$ il existe un élément $y \in M$ et un seul, tel que la distance entre x et M soit égale à la distance entre x et y . *G. Marinescu.*

Stein, Sherman K.: Continuous choice functions and convexity. *Fundamenta Math.* 45, 182—185 (1958).

Es sei E^n der euklidisch n -dimensionale Raum, A eine offene Teilmenge und $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$; A ist dann und nur dann konvex, wenn auf der Menge $\{E^r \cap A: E^r \subset E^n\}$ aller r -dimensionalen Schnitte von A eine stetige Auswahl-funktion f existiert. Dabei ist allemal f eine Abbildung auf A . Ohne die Offenheit von A ergibt sich eine Charakterisierung nur solcher konvexer Mengen, deren Stützhyperebenen einen einzigen Berührungspunkt mit A haben ($r = n - 1$). Ähnliche Sätze gelten bezüglich der Menge aller Durchschnitte von A mit Halbräumen. *G. Aumann.*

Hadwiger, H.: Über Eibereiche mit gemeinsamer Treffgeraden. *Portugaliae Math.* 16, 23—29 (1957).

Folgender Satz wird bewiesen: Ist M eine endliche oder abzählbar-unendliche

Menge in der Ebene disjunkt liegender Eibereiche, so existiert dann und nur dann eine Gerade, die alle Eibereiche von M trifft, wenn sich in der Menge M eine Ordnungsbeziehung derart festlegen läßt, daß je drei Eibereiche von M von einer geeigneten Geraden in der Reihenfolge der in M festgelegten Ordnung getroffen werden.

L. A. Santaló.

Linis, Viktors: Ovals with equichordal points. Amer. math. Monthly **64**, 420—422 (1957).

Auch dieser Beweisversuch dafür, daß eine Eilinie nicht mehr als einen Speichenpunkt haben kann, muß leider als mißlungen angesehen werden. Herr Dirac hat bemerkt (Math. Reviews **19**, 446), daß „ $R'(\beta_1(\alpha)) = 0$ dann und nur dann, wenn $R'(\beta_2(\alpha)) = 0$ “ unrichtig ist.

H. Gericke.

Radziszewski, Konstanty: Sur une fonctionnelle définie sur les ovals. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A **10**, 57—59, poln. u. russ. Zusammenfassg. **9** (1958).

Verf. beweist: Es sei A ein konvexer ebener Bereich, und es bedeute $|Q_\alpha|$ den Inhalt desjenigen umschriebenen Quadrats Q_α , dessen Seiten mit der x -Achse die Winkel α bzw. $\alpha + \frac{1}{2}\pi$ bilden. Ist dann $|A|$ der Inhalt von A , so gilt

$$|A| \leq \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q_\alpha| d\alpha \right\}.$$

Verf. führt an, daß diese Ungleichung von Biernacki vermutet wurde, gibt jedoch keine diesbezügliche Literaturangabe an.

A. Dinghas.

Valentine, F. A.: The intersection of two convex surfaces and property P_3 . Proc. Amer. math. Soc. **9**, 47—54 (1958).

Haben zwei konvexe Körper im R^3 innere Punkte gemein und liegt der Durchschnitt Q ihrer Begrenzungen im Innern der konvexen Hülle ihrer Vereinigung, so besteht D aus endlich vielen einfach geschlossenen fremden Kurven. Zu diesem Ergebnis kommt Verf. über einen allgemeineren Satz: Die kompakte Teilmenge S eines endlich-dimensionalen Raumes habe die Eigenschaft P_3 (d. h. mit je drei Punkten von S gehört auch wenigstens eine der drei Verbindungsstrecken zu S); ferner besitze der konvexe Kern von S innere Punkte und schließlich liege die Menge aller Punkte lokaler Nicht-Konvexität von S im Innern der konvexen Hülle von S ; alsdann besteht Q aus endlich vielen fremden geschlossenen $(n-2)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten.

G. Aumann.

Ohmann, D.: Kurzer Beweis einer Abschätzung für die Breite bei Überdeckung durch konvexe Körper. Arch. der Math. **8**, 150—152 (1957).

T. Bang has proved (this Zbl. **39**, 391) that if a convex set K is contained in the union of convex sets K_i then the widths $\Delta(K)$, $\Delta(K_i)$ of the sets satisfy $\Delta(K) \leq \sum \Delta(K_i)$; and he has conjectured (this Zbl. **57**, 386) that the stronger affine invariant result $\sum \Delta(K_i; \xi_i) / \Delta(K; \xi) \geq 1$ holds, where $\Delta(C; \xi)$ denotes the perpendicular distance between the tac-planes to a convex set C normal to the direction ξ . In this paper the author obtains Bang's conjecture by use of a simple but malicious argument. At one stage the author rightly states that an affine transformation can be used to transform a set of linearly independent directions ξ_1, \dots, ξ'_m into an orthogonal set ξ_1^*, \dots, ξ_m^* , but he assumes tacitly and wrongly that this affine transformation will carry the various tac-planes normal to the directions ξ_2, \dots, ξ'_m into tac-planes parallel to the direction ξ_1^* .

C. A. Rogers.

Block, H. D.: Discrete isoperimetric-type inequalities. Proc. Amer. math. Soc. **10**, 860—862 (1957).

Wird ein Gebiet G in der (x, y) -Ebene vom Inhalt A und stückweise glatttem Rand der Länge L mit einem Gitter $x = n\rho$, $y = n\rho$, $n = 0, \pm 1, \dots$ überzogen, so sei T die Anzahl der Gitterpunkte in G , M die mit ihren Vielfachheiten k gezählten Randgitterpunkte“ (d. i. ein Gitterpunkt in G , von dem k (≥ 1) der 4 nächsten

Gitterpunkte nicht in G liegen). Es wird auf elementare Weise gezeigt, daß $M \geq 4(A^{1/2}/\rho - 1)$ und $M \geq 4T^{1/2}$. Dreht man das Gitter und bildet Integralmittelwerte, so gelangt man zu $L \geq \pi A^{1/2} - 2\pi\rho$, was die klassische isoperimetrische Ungleichung ziemlich gut wiedergibt.

G. Aumann.

Topologie:

McDowell, Robert H.: Extension of functions from dense subspaces. Duke math. J. 25, 297—304 (1958).

Es handelt sich um eine systematische Untersuchung der Frage der stetigen Fortsetzbarkeit einer stetigen Abbildung $\varphi: X \rightarrow Y$ auf einen den topologischen Raum X als dichten Unterraum enthaltenden Oberraum E . Ausgehend von einer einfachen Aussage über die Struktur einer solchen Fortsetzung $\varphi: E \rightarrow Y$ werden neben neuen Resultaten bekannte Sätze und Verallgemeinerungen solcher aus diesem Fragenkomplex elegant gewonnen. Wegen der Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

H. Bauer.

Ponomarev, V.: A new space of closed sets and many-valued mappings of bicompacts. Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 1081—1084 (1958) [Russisch].

Die Gesamtheit der nicht leeren abgeschlossenen Teilmengen eines beliebigen T_1 -Raumes X macht Verf. zu einem zusammenhängenden, kompakten T_0 -Raum $\varkappa X$, indem er als eine Umgebung einer abgeschlossenen Menge F von X die Gesamtheit der abgeschlossenen Mengen A von X nimmt, die ganz in irgendeiner offenen, F umfassenden Menge O enthalten sind. Die Topologie von $\varkappa X$ ist gröber, als die früher (dies. Zbl. 78, 150) betrachtete Topologie für die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen eines Kompaktums. Ein Raum X ist genau dann homöomorph einem Raum Y , wenn $\varkappa X$ homöomorph $\varkappa Y$ ist. Eine Zerlegung eines kompakten T_2 -Raumes X in disjunkte, abgeschlossene Mengen A_i ist genau dann stetig (d. h. jede der Mengen A_i besitzt beliebig kleine, aus vollen Mengen A_k bestehende Umgebungen), wenn die Gesamtheit der A_i eine kompakte Teilmenge von $\varkappa X$ bildet; also ist eine Abbildung eines kompakten Hausdorff-Raumes X in einen anderen genau dann stetig, wenn die Menge der vollen Urbilder der Punkte kompakt in $\varkappa X$ ist [siehe P. Alexandroff, Math. Ann. 96, 555—571 (1926)]. Im weiteren werden „mehrwertige“ Abbildungen eines Raumes X in einen Raum Y betrachtet; das sollen Abbildungen von X in die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von Y sein. Für jede solche Abbildung f und jede Teilmenge $B \subseteq Y$ heißt $f' B = \{x \in X: f x \cap B \neq \emptyset\}$ das „große“ Urbild von B und $f^* B = \{x \in X: f x \subseteq B\}$ das „kleine“ Urbild von B . Eine mehrwertige Abbildung f von X in Y wird stetig genannt, wenn das kleine Urbild jeder offenen Menge von Y offen, d. h. wenn das große Urbild jeder abgeschlossenen Menge von Y abgeschlossen in X ist. Die mehrwertigen stetigen Abbildungen f eines kompakten Hausdorff-Raumes X in einen kompakten Hausdorff-Raum Y sind durch jede der folgenden Bedingungen charakterisiert: (1) Für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ ist $f A$ abgeschlossen in Y und für jeden Punkt $y \in Y$ ist $f' y$ abgeschlossen in X . (2) Die von f induzierte eindeutige Abbildung von $\varkappa X$ in $\varkappa Y$ ist stetig im gewöhnlichen Sinn. (3) Für jeden Punkt $y \in Y$ ist $f' y$ abgeschlossen in X und für jede abgeschlossene Menge $B \subseteq Y$ ist die Menge der $f' y$ mit $y \in B$ eine kompakte Teilmenge von $\varkappa X$. (4) Konvergiert die Folge $\{x_i\}$ mit i aus einer beliebigen gerichteten Indexmenge in X gegen einen Punkt x_0 , so konvergiert die Folge der abgeschlossenen Mengen $f x_i$ in Y gegen die Menge $f x_0$. (5) Der Graph $\{(x, y); x \in X, y \in f x\}$ von f ist eine abgeschlossene Teilmenge des Produktes $X \times Y$. — Eine mehrwertige Abbildung wird stark stetig genannt, wenn das kleine und das große Urbild jeder offenen Menge offen ist. Das Bild eines zusammenhängenden Raumes unter einer stark stetigen Abbildung ist zusammenhängend, wenn wenigstens ein Punkt auf eine zusammenhängende Menge abgebildet

wird. Es folgen noch einige Sätze über Beziehungen zwischen zusammenhängenden Komponenten bei offenen mehrwertigen Abbildungen. Beweise werden nicht gegeben.
H. Salzmann.

Mrówka, S.: A generalization of a theorem concerning the power of a perfect compact metric space. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. **6**, 89—93 (1958).

The main theorem is: (Th. 1) If each point of a compact space X is of character $\geq m$, then the cardinal of the space is $\geq 2^m$ (for any cardinal m). As consequences are deduced then the theorems: Th. 2. If X is a compact m -almost-metrizable space and each point of X is of character m , then the cardinal of X is 2^m . Th. 3. If X is a locally compact space and each point of X is of character $\geq m$, then the cardinal of X $\geq 2^m$. Corollaries are also deduced for compact and locally compact topological groups, relating their cardinality to the cardinality of the character at the unit element.
V. S. Krishnan.

Mrówka, S.: An example of a non-normal completely regular space. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. **6**, 161—163 (1958).

Es wird ein einfaches Beispiel eines nicht-normalen vollständig regulären Raumes gegeben, der eine abzählbare dichte Menge enthält, in jedem Punkte das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und ein Q -Raum ist. Ein sehr ähnliches Beispiel (mit denselben Eigenschaften) stammt von J. Dieudonné⁴ [Anais Acad. Brasil. Ci., **19**, 67—69 (1947)].
M. Katětov.

Mrówka, S.: On the convergence of nets of sets. Fundamenta Math. **45**, 237—246 (1958).

Given a (regular, Hausdorff) space X the family 2^X of all non-null closed subsets of X may be considered as a space with (i) the Vietoris topology, given by taking, as a (open sets) basis, sets of the form $[U_1, U_2, \dots, U_n]$ for arbitrary open sets U_i of X , this set comprising the A (from 2^X) contained in the union of the U_i and meeting each of them; (ii) the lbc-topology defined in this paper, when X is locally bicomcompact, by taking a basis of sets of the form $[U_1, U_2, \dots, U_n; V_1, V_2, \dots, V_j]$, where the U and V are arbitrary open sets of X with bicomcompact closure, and this set is defined to be the set of those A (from 2^X) which meet each of the U_i and are disjoint with each of the \bar{V}_j ; (iii) a topological convergence of nets (A_n) , n from a directed set D , A_n from 2^X , defined by: $\lim A_n = A$, if $\text{Li } A_n = \text{Ls } A_n = A$, where the limit inferior Li (the limit superior Ls) of the family A_n consists of the points of X having every neighbourhood meeting A_n for almost all (arbitrarily large) n from D , that is for a residual (cofinal) set of the indices n . The main results of the paper are Th. 2. If X is a bicomcompact space, then the Vietoris topology for 2^X coincides with the lbc-topology. Th. 3. For a locally bicomcompact space X , the space 2^X with the lbc-topology is also locally bicomcompact. Th. 4. The lbc-topology for 2^X (when X is locally bicomcompact) induces the (topological) convergence of nets from 2^X . Th. 6. If X is locally bicomcompact but not bicomcompact, then the Vietoris topology for 2^X does not induce convergence of nets. Th. 7. The set of continua (bicomcompact connected subsets) of a bicomcompact space X is a closed set in 2^X (with the Vietoris or lbc-topology). Th. 8. The limit in 2^X of a convergent net of continua of the bicomcompact space X is also a continuum. Th. 9. The intersection of a monotone directed family of continua is also a continuum (in a bicomcompact space X). Th. 10. If X is non-locally bicomcompact (but regular and Hausdorff), then there exists no topology in 2^X which induces the topological convergence of nets of sets. The referee noted a few minor errors that may be corrected: p. 239, line 3, read \geq for \leq ; p. 239, line 6 read $\text{Ls } A_n = \cap \bar{A}_m$; p. 242, line 14 replace 6 by 5; p. 242, line 23 replace 7 by 8.
V. S. Krishnan.

Nagata, Jun-iti: On countable-dimensional spaces. Proc. Japan Acad. 34, 146—149 (1958).

Ein topologischer Raum R wird abzählbar-dimensional genannt, wenn er als eine Vereinigung von abzählbar vielen null-dimensionalen Untermengen dargestellt werden kann. Es werden verschiedene notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß ein metrischer Raum R abzählbar-dimensional ist, darunter die folgenden: es gibt eine Folge $\{\mathfrak{B}_i\}$ von offenen Überdeckungen des Raumes R derart, daß $\mathfrak{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{B}_i$ eine offene Basis von R ist und jedes $x \in R$ nur in endlich

vielen $\bar{V} - V$, $V \in \mathfrak{B}$, liegt (Satz 1); es gibt eine Menge $S \subset N(\Omega)$ und eine abgeschlossene stetige Abbildung f von S auf R derart, daß jede Menge $f^{-1}(x)$, $x \in R$, endlich ist (Satz 4); dabei bedeutet $N(\Omega)$ den sog. verallgemeinerten Baireschen Raum, d. h. das Produkt von abzählbar vielen diskreten unendlichen Räumen.

Besitzt R eine offene Basis \mathfrak{B} von der Form $\mathfrak{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{B}_i$, wo (für jedes i) jede Menge $V_0 \in \mathfrak{B}_i$ nur mit endlichvielen Mengen $V \in \mathfrak{B}_i$ gemeinsame Punkte hat, so ist R abzählbar-dimensional dann und nur dann, wenn R mit einer Menge $S \subset N(\Omega) \times R_\omega$ homöomorph ist; R_ω besteht hier aus denjenigen Punkten des Würfels I_ω , die nur endlich-viele rationale Koordinaten haben. *M. Katětov.*

Isbell, J. R.: Euclidean and weak uniformities. Pacific J. Math. 8, 67—86 (1958).

Es sei X ein simplizialer Komplex [die Menge aller Punkte $x = (x_\alpha)$ der Simplexe von X wird ebenfalls mit X bezeichnet]. Verf. bezeichnet mit μ diejenige uniforme Struktur, die auf X durch die Metrik $d(x, y) = \max |x_\alpha - y_\alpha|$ induziert wird, und nennt μX einen uniformen Komplex. Ist μX einer Menge $S \subset E^n$ uniform äquivalent, so heißt μX (und ebenfalls X) ein Euklidischer Komplex. Diese und andere verwandte Begriffe werden in § 1 untersucht. Verf. charakterisiert Euklidische Komplexe mit Hilfe der Abbildungen des Eckpunktbereiches in E^n ; es zeigt sich dabei, daß sie (bis auf gewisse mehr formale Unterschiede) mit den „gleichmäßigen Komplexen“ von Ju. M. Smirnov (dies. Zbl. 72, 179) zusammenfallen. Es wird weiter eine Charakterisierung der abzählbaren stern-endlichen endlich-dimensionalen Komplexe X durch die Eigenschaften von μX gegeben; diese Komplexe entsprechen den Lebesgueschen Komplexen von Smirnov (loc. cit.). Im § 2 werden notwendige und hinreichende Bedingungen gegeben für die uniforme Äquivalenz eines uniformen Raumes mit einer Untermenge der Zahlengeraden (insbesondere, mit einem offenen Intervall). Im § 3 definiert Verf. die „schwache Ableitung“ $w\mu$ einer schwachen (d. h. durch eine Menge reeller Funktionen induzierten) uniformen Struktur μ (auf einer Menge X) und zeigt, daß $w\mu$ durch die Menge aller Funktionen $g(f_1, \dots, f_n)$, g stetig (auf E^n), f_i gleichmäßig stetig auf μX , induziert wird. Man betrachtet jetzt E^n mit der feinsten uniformen Struktur, die mit der (gewöhnlichen) Topologie von E^n verträglich ist. Dann ist ein uniformer Raum μX dann und nur dann für ein passendes n mit einer (abgeschlossenen) Menge $S \subset E^n$ uniform äquivalent, wenn das Folgende gilt: μ ist schwach, $w\mu = \mu$, und es gibt eine gleichmäßige Überdeckung $\{U_\beta\}$ von μX derart, daß jedes U_β totalbeschränkt (kompakt) metrisierbar ist und die vollständigen Hüllen von U_β von beschränkter Dimension sind.

M. Katětov.

Whyburn, Gordon T.: Uniform convergence for monotone mappings. Proc. nat. Acad. Sci. USA 43, 992—998 (1957).

Let $\{f_n\}$ be a sequence of mappings from X to Y and let f be a mapping from X to Y . Four conditions are given each of which implies that $\{f_n\}$ converges uniformly (almost uniformly) to f on X . The first theorem reads: If X and Y are continua and Y is cyclic and semilocally connected, if $\{f_n\}$ is a sequence of monotone mappings from X onto Y , and if there is a nonconstant mapping f from X to Y such that each

$x \in X$ has arbitrarily small neighborhoods whose boundary C satisfies $\limsup [f_n(C)] \subset f(C)$, then $\{f_n\}$ converges uniformly to f on X . The proof of this theorem is given as well as an application to the case where X is a regular curve. If in the above theorem one deletes „ Y cyclic“ and inserts instead an additional condition on f , the same conclusion can be obtained. A more detailed exposition including proofs for two theorems stated in the paper is promised in a later treatment. *Ch. J. Neugebauer.*

Whyburn, Gordon T.: On the invariance of openness. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **44**, 464—466 (1958).

A topological space X is said to have the Brouwer Property provided that any subset of X which is homeomorphic with an open subset of X is itself necessarily open. L. E. J. Brouwer has shown [*Math. Ann.* **71**, 97—115 (1911)] that Euclidean manifolds have this property. The principal theorem of the paper asserts that if $f(X) = Y$ is a mapping where X and Y are locally connected generalized continua and if there exists a closed set F in Y such that no locally compact set homeomorphic with a subset of F separates any region in Y and such that f is locally topological on $X - f^{-1}(F)$, then if X has the Brouwer Property, so also has Y . Examples, including a 2-dimensional space, of non-Euclidean manifolds with the Brouwer Property are given as a consequence of this invariance theorem. *W. R. Utz.*

Lelek, A.: Sur l'unicohérence, les homéomorphismes locaux et les continus irréductibles. *Fundamenta Math.* **45**, 51—63 (1957).

Eilenberg a posé en 1935 le problème suivant: un continu localement connexe X n'étant pas unicohérent et $fX = Y$ étant une homéomorphie locale (pour chaque $x \in X$ il existe un entourage ouvert U_x tel que fU_x est ouvert dans Y et homéomorphe à U_x), est ce que le continu Y n'est pas unicohérent? Un exemple de Marty (1937) montre que la réponse est négative. Reconsidérant cette question l'A. prouve que la réponse est affirmative lorsque $\dim Y = 1$ et qu'on peut dans ce cas même exiger une hypothèse plus faible à savoir que f soit une homéomorphie au sens large (c'est à dire qu'il n'est plus nécessaire dans la définition donnée plus haut que fU_x est ouvert dans Y). La thèse plus forte que l'A. prouve est alors: Toute homéomorphie locale au sens large qui transforme un continu X en une dendrite est une homéomorphie. Par un contre-exemple il est démontré que la connexité locale de Y est essentielle, même si l'on exige que f est une homéomorphie locale tout courte. L'exemple donné repose sur quelques propriétés des continus irréductibles qui sont prouvés à la fin de l'article. *A. van Heemert.*

Rudin, Mary Ellen: A property of indecomposable connected sets. *Proc. Amer. math. Soc.* **8**, 1152—1157 (1957).

In this paper the author proves the following theorem. If I is a connected indecomposable subset of the plane and if p is a limit point of I , then $I \cup \{p\}$ is also an indecomposable connected set. This answers a question raised by P. M. Swingle (this *Zbl.* **43**, 169). *Ch. J. Neugebauer.*

Whyburn, G. T.: Topological characterization of the Sierpiński curve. *Fundamenta Math.* **45**, 320—324 (1958).

As stated in the introduction of the paper under review, the author was urged by B. Knaster that publication of his results (1930) on the Sierpiński plane universal curve be made. This paper is the answer to this request. By an S -curve is meant a plane 1-dimensional locally connected continuum S such that the boundary of each complementary domain of S is a simple closed curve no two of which intersect. By a successive subdivision process of S and S' , two S -curves, the author obtains the result that S, S' are homeomorphic, and consequently they are homeomorphic to a Sierpiński curve. A necessary and sufficient condition for a 1-dimensional locally connected plane continuum to be an S -curve is that it possesses no local separating points. *Ch. J. Neugebauer.*

Knaster, B. et J. Mioduszewski: Division des régions partielles par les frontières et des frontières par les points. *Fundamenta Math.* **45**, 306—313 (1958).

Let R be a region of a topological space and let F denote its frontier. Let H denote a region relative to \bar{R} . The following conditions are considered. I. Each closed set that separates two points in R also separates them in \bar{R} . II. F does not separate any relative region H of \bar{R} . III. No point of F separates the component of F to which it belongs. It is shown that I is equivalent to II and that II is equivalent to III provided F is locally connected. W. R. Utz.

Mioduszewski, J.: Sur l'accessibilité des points d'ensembles fermés dans les espaces euclidiens. *Fundamenta Math.* **45**, 314—319 (1958).

A result of the paper reviewed above by Knaster and the author is used to prove that all points of each of the components of F are accessible from $E^2 - F$ provided the closed set $F \subset E^2$ has as components dendrites with the property that corresponding to $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that if $p, q \in F$ are in the same dendrite then there is an arc pq in F of diameter less than ε . W. R. Utz.

Piranian, George: The boundary of a simply connected domain. *Bull. Amer. math. Soc.* **64**, 45—55 (1958).

Carathéodory prime ends can be of four kinds: 1. with one principal point and no subsidiary point, 2. with one principal point and with subsidiary points, 3. with more principal points and no subsidiary points, 4. with more principal points and with subsidiary points. The structure of the point sets U_i (set of the prime ends of the i -th kind) in the space U of prime ends of a simply connected plane domain is studied. The main theorem states: Let U_4 be void. Then the sets $U_2 \cup U_3$ and U_3 are characterized by the existence of two sequences of sets F_n and M_n in U such that $U_3 = \bigcup M_n$, $U_2 \cup U_3 = \bigcup F_n$, and such that the F_n are disjoint, every $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ is closed, every $M_n \subset F_n$, every M_n is a G_δ set, both M_n and $F_n \setminus M_n$ have continuous cardinality on every open subset of F_n . H. Freudenthal.

Kodama, Y.: On a closed mapping between ANR's. *Fundamenta Math.* **45**, 217—227 (1958).

Ein metrisierbarer Raum R heißt ein absoluter Retrakt (Umgebungsretrakt) für metrische Räume (abgekürzt AR, AUR), wenn das Folgende gilt: ist $X_1 \supset X$ metrisierbar, X abgeschlossen in X_1 , so ist X ein Retrakt (Umgebungsretrakt) in X_1 . Es werden verschiedene Erhaltungssätze für homotopische Eigenschaften bei einer abgeschlossenen stetigen Abbildung f von X auf Y , wo X, Y AUR sind, bewiesen. Die Hauptsätze kann man etwa wie folgt wiedergeben: sind X, Y endlich-dimensional und ist jedes $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, ein AR, so gibt es eine stetige Abbildung g von Y in X mit $fg \sim 1$, $gf \sim 1$, so daß X, Y homotopisch äquivalent sind; wird stattdessen nur vorausgesetzt, daß $\dim Y \leq n$ und jedes $f^{-1}(y)$ „im Großen q -dimensional zusammenhängend“ [vgl. z. B. Kuratowski, *Topologie* (II 1950; dies. Zbl. **41**, 96)] ist (wobei $n - 1 \leq q$), so hat man noch immer $fg \sim 1$, und die Homotopiegruppen $\pi_i(X)$, $\pi_i(Y)$, $i \leq q$, sind isomorph (ein Isomorphismus wird von g induziert). M. Katětov.

Berstein, I.: On the factorizability of maps of S^n into S^n . *Fundamenta Math.* **45**, 138—142 (1958).

Eine stetige Abbildung f der 1-Sphäre S_1 in sich ist genau dann unwesentlich, wenn sie sich in der Form $f = gh$ mit einer stetigen Abbildung g von S_1 in die reelle Zahlengerade R und einer stetigen Abbildung h von R in S_1 darstellen läßt. Angeregt durch eine Frage von Borsuk [*Ann. Soc. Polon. Math.* **25**, 268—272 (1952; dies. Zbl. **49**, 403)] konstruiert Verf. für jedes $n > 1$ eine stetige unwesentliche Abbildung Φ der n -Sphäre S_n in sich, die sich nicht in die Hintereinanderausführung $\Phi = \varphi\psi$ einer stetigen Abbildung φ von S_n in R^n und einer stetigen Abbildung ψ von R^n in S_n

zerlegen läßt und beweist mit Hilfe dieser Abbildung Φ , daß es für $n > 1$ überhaupt keinen parakompakten Raum X der Dimension n mit der folgenden Eigenschaft gibt: Eine stetige Abbildung f von S_n in sich ist genau dann unwesentlich, wenn sie von der Form $f = g \circ h$ mit einer stetigen Abbildung g von S_n in X und einer stetigen Abbildung h von X in S_n ist.

H. Salzmann.

Skornjakov, L. A.: Kurvensysteme in der Ebene. Trudy Moskovsk. mat. Obšč. 6, 135—164 (1957) [Russisch].

Verf. gibt eine ausführliche Darstellung für sein früher (dies. Zbl. 56, 162) angekündigtes Ergebnis. Er betrachtet in der euklidischen Ebene ein System Σ von Kurven, die alle homöomorph zur reellen Zahlengeraden oder Kreislinie sind und eines der Axiome einer affinen Ebene erfüllen, nämlich: Durch je zwei verschiedene Punkte der Ebene geht genau eine Kurve aus Σ hindurch. Dann beweist er: Alle Kurven aus Σ sind homöomorph zur reellen Zahlengeraden; entweder sind alle Kurven aus Σ abgeschlossen in der Ebene, oder es gibt einen (eindeutig bestimmten) Punkt z in der Ebene, so daß genau die durch z hindurchgehenden Kurven aus Σ abgeschlossen in der Ebene sind, während die abgeschlossene Hülle jeder anderen Kurve L aus Σ homöomorph zur Kreislinie ist und außer den Punkten von L genau den Punkt z enthält. (Ein System der zweiten Art geht durch Inversion an einem Kreis um z in ein System der ersten Art über, wenn man den Punkt z noch zu den Bildern aller durch ihn hindurchgehenden Kurven hinzugefügt, und umgekehrt.) Der Beweis besteht aus diffizilen Konvergenzbetrachtungen für Folgen von Kurvenbögen und ist in über 30 Hilfssätze gegliedert. Einer von ihnen besagt, daß sich zwei in der Ebene abgeschlossene Kurven aus Σ niemals berühren können in dem Sinn, daß die eine von ihnen in der Nähe eines gemeinsamen Punktes ganz auf der einen Seite der andern liegt. Besteht Σ aus lauter in der Ebene abgeschlossenen Kurven, so folgt aus den Hilfssätzen auch, daß die „Verbindungskurve“ zweier verschiedener Punkte stetig von diesen Punkten abhängt, wenn man Σ mit der Topologie der Mengenkonvergenz versieht. Schließlich bemerkt Verf., daß man mit unbedeutenden Änderungen seines Beweises die Nichtexistenz eines entsprechenden Kurvensystems auf der Kugel zeigen kann. Die Frage, ob es auf anderen Flächen außer der projektiven Ebene solche Kurvensysteme gibt, bleibt offen; ebenso die Frage, ob man analoge Resultate erhalten kann, wenn man in Σ auch Kurven zuläßt, die homöomorph zu einem abgeschlossenen oder halboffenen reellen Intervall sind. Als Problem nennt er auch, ob jedes entsprechende Kurvensystem in der projektiven Ebene topologisch zu dem System aller Geraden äquivalent ist.

H. Salzmann.

Tao, Junzo: Some properties of $(n-1)$ -manifolds in n -space. Proc. Japan Acad. 34, 92—95 (1958).

Diese Note gibt einige, teilweise sehr interessante Sätze mit Beweisskizzen — aus einer im Osaka Journal zu erwartenden Arbeit des Verf. — zu Einbettungsproblemen polyedraler Mannigfaltigkeiten P^{n-1} der Dimension $n-1$ in den n -dimensionalen Raum R^n . Eine k -dimensionale Hyperebene H^k aus R^n heißt zur r -dimensionalen polyedralen Mannigfaltigkeit P^r aus R^n im Punkte $p \in P^r$ transversal, wenn die Verbindungsgerade zweier beliebiger Punkte einer entsprechenden Umgebung von p in P^r mit H^k einen Winkel $\geq \varepsilon > 0$ einschließt. P^r ist in normaler Position in R^n , wenn es eine stetig von P^r abhängende Schar von $H^{n-r}(p)$ gibt, P^r ist in lokal normaler Position, wenn dies nur für jeden Stern von P^r gilt. Das grundlegende Theorem sagt aus, daß für P^{n-1} aus der lokalen Normalität schon die Normalität folgt. Der Beweis besteht aus einer induktiv konstruierten Fortsetzung der Transversalen. Dieses Theorem ist mit Ergebnissen von Cairns und Whitney zu kombinieren, wonach es zu einer solchen P^{n-1} eine einparametrische, eine ganze Umgebung von P^{n-1} ausfüllende Schar von Mannigfaltigkeiten M_t^{n-1} ($|t| < 1$, $P^{n-1} = M_0^{n-1}$) gibt, welche alle zu P^{n-1} homöomorph und für $t \neq 0$ analytisch

sind. Ist P^{n-1} kompakt, dann stimmt die Curvatura integra der M_l^{n-1} mit derjenigen von P^{n-1} überein.

H. Götz.

Bruhat, François et Henri Cartan: Sur la structure des sous-ensembles analytiques réels. C. r. Acad. Sci., Paris **244**, 988—990 (1957).

Soit Ω un ouvert de l'espace R^n . Un sous-ensemble E de Ω est analytique (réel) dans Ω s'il est défini, au voisinage de chaque point de Ω , par un nombre fini d'équations analytiques. D'où la notion de germe E_a analytique en $a \in \Omega$, de composante irréductible de E_a ; le complexifié \tilde{E}_a de E_a est le plus petit germe analytique-complexe de C^n en a contenant E_a ; on appelle dimension de E_a la plus grande des dimensions (complexes) des composantes irréductibles de \tilde{E}_a . On note $V_p(E)$ l'ensemble des points de E où E est une sous-variété analytique de dimension p . Théorème 1: soit $a \in E$ tel que le germe E_a soit irréductible de dimension p ; il existe un voisinage ouvert U de a tel que: 1. $U \cap V_p(E)$ ait un nombre fini de composantes connexes A_i ; 2. pour chaque i , il existe un arc γ_i d'extrémité a tel que $\gamma_i - \{a\} \supset A_i$. Théorème 2: soit $a \in E$. Il existe un voisinage ouvert U de a tel que, si un sous-ensemble analytique F de Ω induit en a un germe $F_a \supset E_a$, alors, $F \supset E \cap U$. (La démonstration utilise l'espace de tous les germes analytiques irréductibles de dimension p , réels ou complexes, dans Ω .) Corollaire: toute intersection de sous-ensembles analytiques de Ω est un sous-ensemble analytique de Ω .

J. Dixmier.

Postnikov, M. M.: Cubical resolvents. Doklady Akad. Nauk SSSR **118**, 1085—1087 (1958) [Russisch].

In dieser Note wird die bekannte Postnikovsche Theorie der natürlichen Systeme für Würfelkomplexe hergeleitet. Mit der gewöhnlichen Definition eines Würfelkomplexes wird begonnen und dann die Kohomologietheorie der Würfelkomplexe kurz erläutert. Um zur sog. Auflösung eines Würfelkomplexes zu kommen, muß man noch den Komplex $E(G, p)$ kennen, der aus allen p -Koketten eines n -dimensionalen Würfels besteht. Entsprechend kann man den Unterkomplex $Q(G, p) \subset E(G, p)$ definieren, der aus allen Kozyklen in $E(G, p)$ besteht. Die Konstruktion eines sog. natürlichen Systems, oder, wie der Verf. es jetzt nennt, einer kubischen Resolvente geht ganz analog zu der entsprechenden für semisimpliziale Komplexe vor sich, nur scheint es, daß die Formalismen an manchen Stellen etwas einfacher und natürlicher sind. Diese Note ist nur eine Vorbereitung für eine nachfolgende, in der die kubischen Resolventen charakterisiert werden sollen.

F. W. Bauer.

Postnikov, M. M.: Limit complexes of cubic resolvents. Doklady Akad. Nauk SSSR **119**, 207—210 (1958) [Russisch].

Diese Note ist eine Fortsetzung der oben referierten und behandelt die Frage, unter welchen Umständen ein beliebiger Würfelkomplex K isomorph zum Limeskomplex einer kubischen Resolvente ist. Die Antwort lautet, daß dazu notwendig und hinreichend ist, daß K ein EN -Komplex ist. Ein E -Komplex ist kurz gesagt ein solcher, in dem jeder Würfel σ enthalten ist, dessen Randseiten alle in K liegen, bis auf eine. Zwei Würfel σ_0, σ_1 heißen vergleichbar, wenn sie den gleichen Rand haben. Ein EN -Komplex ist nun ein solcher, der nur ein 0-dimensionales Simplex enthält und bei dem je zwei vergleichbare Würfel σ_0, σ_1 entweder gleich oder aber nicht homotop sind. Außer dem Beweis des oben genannten Satzes, der den größten Teil der Note einnimmt, enthält sie noch die Konstruktion eines Minimalkomplexes eines E -Komplexes. Dieser Minimalkomplex ist selber ein EN -Komplex. Ist X ein topologischer Raum, so kann man den singulären kubischen Komplex von X bilden und zu einem Minimalkomplex desselben übergehen. Man kann die kubische Resolvente dieses Komplexes bilden, die wegen allgemein bekannter Sätze den Homotopietyp von X charakterisiert. Am Schluß der Note wird auf die Beziehungen der Untersuchungen des Verf. zu einer anderen Arbeit (s. K. Aoki, E. Homma, T. Kaneko,

dies. Zbl. 72, 405) hingewiesen und ein in dieser Arbeit enthaltenes Resultat als falsch nachgewiesen.

F. W. Bauer.

Tutte, W. T.: A homotopy theorem for matroids. I, II. Trans. Amer. math. Soc. 88, 144—160, 161—174 (1958).

Teil I: Ein Matroid auf einer endlichen Menge M ist eine Klasse \mathcal{M} nicht-leerer Untermengen von M mit den Eigenschaften (I) $X \leq Y$, $Y \leq X$ für alle $X, Y \in \mathcal{M}$, (II) Zu $X, Y \in \mathcal{M}$ mit $a \in X \cap Y$, $b \in X - X \cap Y$ existiert $Z \in \mathcal{M}$ mit $b \in Z \leq X \cup Y - \{a\}$ (Whitney, s. dies. Zbl. 12, 4). Ein „flat“ ist eine Vereinigung V von Mengen aus \mathcal{M} , seine Dimension ist -1 , wenn $V = \emptyset$, und d , wenn V minimal mit Dimension $> d - 1$ ist. Diese „flats“ haben ähnliche Eigenschaften wie die Unterräume eines projektiven Raumes, z. B. gilt die Dimensionsformel $d(S \cup T) + d(S \cap T) = d(S) + d(T)$, und die Verbindungsgerade zweier „Punkte“ (d. h. nulldimensionaler flats, oder zu \mathcal{M} selbst gehöriger Mengen) ist eindeutig, wenn sie existiert, was aber nicht immer der Fall zu sein braucht. Ein Weg in \mathcal{M} ist eine endliche Folge $P = (X_1, \dots, X_n)$ von Punkten derart, daß zu je zwei aufeinanderfolgenden unter ihnen die Verbindungsgerade L existiert und zusammenhängend, d. h. nicht als Vereinigung disjunkter Untermengen $F, F' \leq M$ darstellbar ist, für welche $X \leq F$ oder $X \leq F'$ gilt, für alle mit L inzidenten Punkte X . Es wird bewiesen: Jeder geschlossene Weg (d. h. einer mit $X_1 = X_n$) ist nullhomotop, d. h. läßt sich durch endlich viele Einschreibungen und Weglassungen von Wegen der Typen (X, Y, X) und (X, Y, Z, X) mit koplanaren X, Y, Z in einen nur aus einem Punkt bestehenden Weg überführen. Dies folgt aus dem allgemeineren Satz: Jeder geschlossene Weg ist nullhomotop bezüglich jeder zu ihm fremden konvexen Teilmenge C von \mathcal{M} , d. h. kann durch endlich viele Deformationen der oben beschriebenen und zweier weiterer etwas komplizierterer Arten („elementarer Deformationen“) derart in einen Punkt überführt werden, daß C auch zu allen Zwischenwegen fremd ist. Die Konvexität von C ist auf die naheliegende Art erklärt: Mit X, Y gehört jeder mit der Verbindungsgeraden von X und Y inzidente Punkt zu C . Teil II: Es sei M eine endliche Menge und R entweder der Ring Z der ganzen Zahlen oder der Restklassenring Z_p nach einer Primzahl p . Dann bilden die Abbildungen von M in R (M -Ketten über R) eine abelsche Gruppe, deren Untergruppen M -Kettengruppen über R heißen. Für jede M -Kette f über R sei $|f|$ die Menge aller $x \in M$ mit $f(x) \neq 0$. Die zur M -Kettengruppe N gehörige M -Kette $f \neq 0$ heißt sodann N -elementar, wenn für alle $g \neq 0$ in N stets $|g| \leq |f|$ ist. Die Klasse $\mathcal{M}(N)$ der Teilmengen $|f|$ von M mit N -elementaren $f \in N$ ist ein Matroid. Ein beliebiges Matroid heißt binär bzw. regulär, wenn es in der Form $\mathcal{M}(N)$ mit binärer bzw. regulärer Kettengruppe N darstellbar ist; dabei heißt N binär, wenn $R = Z_2$ ist, und regulär, wenn $R = Z$ und zu jeder N -elementaren Kette $f \in N$ ein $f' \in N$ mit $|f'| = |f|$ und $f'(M) = 0, 1, -1$ vorhanden ist. Das Ziel des zweiten Teils der Arbeit ist die Charakterisierung der binären und regulären Matroide durch geometrische Eigenschaften. Nennt man die von den „flats“ gebildete geometrische Struktur $G(\mathcal{M})$, so lassen sich die Ergebnisse folgendermaßen formulieren: (1) \mathcal{M} ist genau dann binär, wenn jede zusammenhängende Gerade in $G(\mathcal{M})$ genau drei Punkte trägt. (2) \mathcal{M} ist genau dann regulär, wenn \mathcal{M} binär ist und $G(\mathcal{M})$ keine Fano- oder dazu duale Konfiguration enthält. Unter einer Fano-Konfiguration ist dabei die projektive Ebene über $GF(2)$ zu verstehen. Während (1) verhältnismäßig einfach zu beweisen ist, erfordert der Beweis von (2) den tieferliegenden Homotopiesatz des Teils I. Es werden einige interessante Anwendungen auf die Theorie der endlichen Graphen angekündigt, die in einer anderen Arbeit veröffentlicht werden sollen.

P. Dembowski.

Harary, Frank: The number of oriented graphs. Michigan math. J. 4, 221—224 (1958).

Ein gerichteter Graph heißt „orientiert“, wenn zwei Punkte höchstens in einer

Richtung durch eine Kante verbunden sind. Für die Anzahl der nichtisomorphen orientierten Graphen mit p Punkten wird die abzählende Potenzreihe nach den Methoden von Polya (dies. Zbl. 17, 232) abgeleitet, indem gezeigt wird, wie man aus dem Zyklenzeiger für die symmetrische Gruppe den Zyklenzeiger für die Permutationsgruppe der gerichteten Punktpaare erhält. Für $p \leq 6$ wird die auf diese Weise erhaltene abzählende Potenzreihe angegeben.

H. Künneht.

Sprague, Roland: Über teilerfremde Paare imprimitiver Gruppen. Math. Nachr. 18, H. L. Schmid-Gedächtnisband 222—225 (1958).

Dans un précédent travail (ce Zbl. 42, 177), l'A. avait considéré deux partitions E_1 et E_2 d'un ensemble fini M et avait été conduit à introduire les groupes G_1 et G_2 de permutations $\in \mathfrak{S}_M$, qui laissent respectivement E_1 et E_2 invariantes. Un cas important était celui où les deux groupes d'automorphisme des deux partitions étaient premiers entre eux $G_1 \cap G_2 = 1$. Deux exemples sont donnés ici: (i) Un réseau de 12 noeuds d'ordre 3 et de 18 arêtes, dont le groupe d'automorphisme se réduit à l'identité, donne naissance à deux partitions de l'ensemble $(1, 2, 3, \dots, 36)$, l'une E_1 en 12 parts de longueur 3, l'autre E_2 en 18 parts de longueur 2. Les groupes d'automorphisme de E_1 et de E_2 n'ont aucun élément commun en dehors de l'unité. (ii) Deux partitions de l'ensemble $(1, 2, 3, \dots, 24)$ en 8 parts de 3 éléments ont des groupes d'automorphisme premiers entre eux. La démonstration est obtenue au moyen d'une matrice (cf. ce Zbl. 42, 177).

A. Sade.

Theoretische Physik.

● **Holton, Gerald and Duane H. D. Roller:** Foundations of modern physical science. (Addison-Wesley Physics Series.) Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1958. XXIII, 782 p. \$ 8,50.

Das Werk will der Empfehlung der American Association of Physics Teachers (AAPT) [Amer. J. Phys. 25, 417—424 (1957)] entsprechen, Lehrbücher im Hinblick auf „a precise understanding of the basic concepts of physics“ zu gestalten. Die Verf., ein Experimentalphysiker (Holton) und ein Wissenschaftshistoriker (Roller) glauben dieses Ziel am ehesten auf dem entwicklungsgeschichtlichen Wege zu erreichen. Das Werk ist sowohl durch die Anordnung des Stoffs, als auch durch das instruktive Illustrationsmaterial, welches die erfahrene Hand des Pädagogen verrät, wertvoll. Originell sind historisch-pädagogische „Übungsaufgaben“ in den „additional problems“ zu den einzelnen Kapiteln. Die Gefahr allzu verdünnter ideengeschichtlicher Schematisierungen wird durch eine vielleicht etwas zu betonte — aber für die angelsächsische Literatur oft typische — Verhaftung im bunten Detail des Konkreten gebannt. Der Stoff umfaßt das Gebiet der „Experimentalphysik“. Schon allein dadurch entfallen ganze Teile der modernen Atomphysik, wie etwa die Wellenmechanik. Diese „Foundations of Physics“ bringen keine erkenntnistheoretische Analyse der problematischen Randgebiete und der „Grundlagen“ der theoretischen Physik, sondern eine geschickte wissenschaftsgeschichtlich orientierte Darstellung der Physik als Naturwissenschaft. Die mathematischen Hilfsmittel sind dementsprechend minimal, wodurch das Werk aber umgekehrt als pädagogischer Wegweiser für den Lehrstoff der Experimentalkollegia nur gewinnen dürfte. Der Inhalt gliedert sich in 9 Teile wie folgt: I. Erforschung der Bewegung (Geschwindigkeit und Beschleunigung, Galilei und die Kinematik des freien Falls, Bewegung der Projektile). II. Erforschung der Kräfte (Newtons Bewegungsgesetze, Gleichförmige Kreisbewegung). III. Die Planetensysteme (Astronomie der Antike, Heliocentrische Theorie des Kopernikus, Wesen einer wissenschaftlichen Theorie, Keplers Gesetze, Galileis Beiträge zur Astronomie, Die Theorie der universellen Gravitation, Konsequenzen der Newtonschen Theorie). IV. Struktur und Methode in der Physik (Das Wesen der Begriffe, Dualität und Wachstum der Wissenschaft, Die wissen-

schaftliche Entdeckung). V. Erhaltungssätze (Erhaltungssatz der Masse, des Impulses und der Energie in der Mechanik, Wärmeerscheinungen und kalorische Theorie, Ausdehnung des Energieprinzips). VI. Die Ursprünge der Atomtheorie in Physik und Chemie (Gase und Materiestruktur, Daltons Atomtheorie der Chemie, Aufschwung der modernen Chemie, Das periodische System der Elemente, Kinetische Theorie der Materie und der Wärme). VII. Die Feldtheorien der Elektrizität und des Magnetismus (Quantisierung in der Elektrik, Weiterentwicklung der Elektrostatik, Elektrochemie und Elektromagnetismus, Elektromagnetische Lichttheorie). VIII. Die Quantenphysik des Lichtes und der Materie (Prinzipien der Optik, Kontinuierliche Spektren und die Geburt der Quantentheorie, Photoelektrischer Effekt und Einsteins Photonentheorie, Gasspektren, Das Atommodell von Rutherford und Bohr, Weitere Erfolge der Bohrschen Theorie der Atomstruktur). IX. Der Atomkern (Radioaktivität, Isotopen, Kernstruktur und Kernenergie, Weitere Entwicklungen der Kernphysik).
J. Fleckenstein.

● Nelkon, M.: *Solutions to advanced level physics questions*. London: William Heinemann, Ltd. 1958. IV. 75 p. 5 s.

Mechanik:

● Ames, Joseph Sweetman and Francis D. Murnaghan: *Theoretical mechanics. An introduction to mathematical physics*. Unabridged and unaltered republication of the first edition (1929). New York: Dover Publications, Inc. 1958. IX, 462 p. \$ 2,00.

Durch die Herausgabe billiger Neudrucke von Büchern aus dem Gebiet der Mathematik und Naturwissenschaft hat sich der Verlag schon ein großes Verdienst erworben. Das vorliegende Werk beginnt mit einem Kapitel über Vektorrechnung, das nach der Definition des Vektor- und Tensorbegriffes mit Hilfe der Transformationseigenschaften bis zu den Integralsätzen und den krummlinigen Koordinaten reicht. In den folgenden Kapiteln werden die Kinematik des starren Körpers und die Dynamik des einzelnen Massenpunktes und der Punktsysteme behandelt. Nach einer kurzen Erörterung der phänomenologischen Stoßtheorie wenden sich Verff. zur Kreiseltheorie und zu allgemeinen Sätzen der Dynamik (Lagrangesche und kanonische Gleichungen). Hier fällt auf, daß das Prinzip von D'Alembert nicht erwähnt wird. Ein Kapitel über die Theorie der kleinen Schwingungen führt zu den Wirkungsprinzipien und zur Hamilton-Jacobischen Theorie, die auf das Zweizentrenproblem der Himmelsmechanik angewandt wird. Weitere Kapitel sind den nicht-holonomen Systemen und den Integrationsmethoden der analytischen Mechanik (Integralinvarianten und Poisson-Klammern) gewidmet; hier wird auch etwas auf das Dreikörperproblem eingegangen. Ein kurzes Kapitel über die Potentialfunktion leitet zur Untersuchung der Wellenbewegung über, in dem u. a. die Riemannsche Integrationsmethode und die Begriffe der Gruppengeschwindigkeit und der Dispersion erläutert werden. Abgeschlossen wird das inhaltsreiche und gut lesbare Werk durch ein Kapitel über die Lorentz-Transformation und über Dimensionen physikalischer Größen.
A. Weigand.

● Sears, Francis Weston: *Mechanics, wave motion, and heat*. (Principles of Physics Series.) Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1958. XIII, 664 p., 311 illus. \$ 9.00.

Das Lehrbuch ist als Einführung in die Anfangsgründe der Physik gedacht; es bringt in breiter einfacher Darstellung die Grundtatsachen der elementarsten Mechanik, Elastizitätslehre, Hydrodynamik und Wärmelehre. Die schönen zahlreichen Abbildungen erleichtern dem Studenten das Verständnis; die große Anzahl von Aufgaben mit Lösungen dürfte dazu beitragen, daß der Leser eine ausreichende Übung in der Behandlung von Fragen der Elementarmechanik erwirbt.
W. Bader.

Tatarkiewicz, Krzysztof: Une généralisation des équations de Maggi et d'Appell. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 10, 5—27, poln. u. russ. Zusammenfassg. 28—32 (1958).

In the study of non-holonomic dynamical systems it is usually assumed that the constraints depend solely on the time, the position and the velocity of the constrained system. However, constraints which depend in addition on the acceleration of the system have occasionally been considered [Stäckel, Ber. Heidelberger Akad. Wiss. math.-naturw. Kl. 1919, Nr. 11, 25 S. (1919); Przeborski, this Zbl. 5, 221]. The present paper is devoted to further generalisations: it is assumed that the constraints depend on derivatives up to the s^{th} order with respect to time of the positional coordinates of the system (here s is an arbitrary, fixed integer; when $s = 0$ the system is holonomic, and when $s = 1$ the system may be non-holonomic in the usual sense). It is assumed that the constraints do not perform work. The author's method appears to consist chiefly of successive eliminations of generalised Lagrange multipliers, while a new type of total r^{th} order derivatives is defined and applied with considerable success. The equations of Lagrange for such systems are developed, while generalisations of the equations of Maggi and Appell (see, for instance, Amaldi and Levi-Civita, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. 2, parte I, s. this Zbl. 45, 123) are derived, firstly with, and secondly without multipliers. Unfortunately these equations are too complicated for reproduction within the limits of a review.

H. Rund.

● **MacMillan, William Duncan:** Theoretical mechanics. Statics and the dynamics of a particle. Unabridged and unaltered republication of the first edition (1927). New York: Dover Publications, Inc. 1958. XVIII, 430 p. \$ 2,00.

Der erste Teil dieser elementaren Einführung in die Statik und in die Kinetik des Massenpunktes enthält eine Erläuterung der mechanischen Grundbegriffe (Geschwindigkeit, Beschleunigung usw.). Im zweiten Teil werden die Grundlagen der Statik des starren und des elastischen Körpers besprochen, wobei Verf. nur an wenigen Stellen (z. B. bei der Besprechung der Seilkurven unter Berücksichtigung der elastischen Dehnung) etwas über das allgemein Übliche hinausgeht. Der dritte Teil ist der Dynamik des Massenpunktes gewidmet. Auch hier findet man meist den üblichen Stoff; etwas ausführlicher werden das astronomische Ein- und Zweikörperproblem behandelt. Die drei letzten Kapitel enthalten einiges aus der analytischen Mechanik (u. a. D'Alembertsches Prinzip, Lagrangesche und kanonische Gleichungen). Da Verf. sich aber auf die Untersuchung des Massenpunktes beschränkt, wird der Anfänger die Bedeutung dieser Verfahren kaum richtig beurteilen können.

A. Weigand.

Vodička, Václav: Integration of the equations of motion of a particle on an ellipsoidal surface. Arch. Mech. stosow. 10, 143—146 (1958).

Further comments on the motion of a point on an ellipse. *M. M. Peixoto.*

Parkyn, D. G.: The effect of friction on elliptic orbits. Math. Gaz. 42, 96—98 (1958).

Kooistra, R.: Über einen in der Mechanik auftretenden geometrischen Ort. Euclides, Groningen 33, 261—263 (1958) [Holländisch].

Elementary example: A particle resting on a rough horizontal plane V with given coefficient of friction is just on the point of moving under the action of a force K inclined at an angle α to V . As α varies over a given range, the end-point of K describes a certain locus, which is to be determined by means of graphical representations of K and of the normal reaction N . — The purpose of this article seems to be chiefly of a pedagogical nature.

H. Rund.

Benney, D. J.: On the limiting equilibrium of n masses. Amer. math. Monthly 65, 9—17 (1958).

Ein starres Gebilde stütze sich in $n + 1$ Punkten A_i auf eine waagrechte, rauhe

Ebene. Eine in A_0 angreifende horizontale Kraft P wird so lange gesteigert, bis unter Überwindung der Reibungskräfte Bewegung einsetzt. Die Frage nach den möglichen Lagen des anfänglichen Momentanzentrums M wird für zwei spezielle Annahmen diskutiert. 1. Die Stützpunkte A_i seien äquidistant auf einer Geraden angeordnet und die Auflagedrucke gleich. M ist dann an eine (algebraische) Ortslinie k gebunden, die als Kraftlinie eines elektrischen Feldes gedeutet werden kann, welches von n in den A_i angebrachten Ladungen vom Betrag $A_0 A_i$ erzeugt wird; die Lage von M auf k hängt dabei von der Richtung der Kraft P ab. Im allgemeinen geht die Ortslinie k durch einen ganz bestimmten Stützpunkt A_r , welcher durch $2r > |2r^2 - n^2 - n|$ gekennzeichnet ist; dieser Stützpunkt kann mithin zum Momentanzentrum werden, wenn P innerhalb eines angebbaren Winkelbereichs angreift. Existiert jedoch ein Index r , für welchen $2r - 2r^2 - n^2 > n$, dann geht k zwischen A_r und A_{r+1} hindurch und es kann keiner der Stützpunkte zum Drehzentrum werden; dieser Fall liegt vor für $n = 3, 20, 119$ usw. — 2. Die Stützpunkte A_i seien auf die Ecken eines regulären Polygons verteilt und die Auflagedrucke wieder gleich. Auch hier kann das anfängliche Momentanzentrum M mit einem Stützpunkt zusammenfallen, und zwar mit A_r oder A_{n-r+1} ($r \leq n/2$), wenn $\sin(r\pi/n) \cdot \operatorname{tg}(\pi/2n) > \cos^2(r\pi/n)$, wobei P auf einen gewissen Winkelbereich beschränkt bleibt. — Durch Verdichtung der Stützpunktfolge gelangt man in der Grenze zu bekannten Aussagen über einen auf einer rauhen Ebene ruhenden gleichförmigen Stab bzw. Ring.

W. Wunderlich.

Miele, Angelo: Generalized variational approach to the optimum thrust programming for the vertical flight of a rocket. Z. Flugwiss. 6, 69—77 (1958).

The problem of the optimum performance for a rocket in vertical flight has received considerable attention in recent years. Earlier investigations (Malina, Smith, Ivey, Bowen, Oborny) were limited to the class of arcs composed of two sub-arcs (a constant thrust trajectory and a coasting flight). The optimum thrust was found to be about two to four times the initial weight of the rocket. Further, the variational problem of optimum thrust programming attracted the attention of other authors (Goddard, Hamel, Tsien, Evans). In view of accepted hypotheses the dynamic behaviour of the rocket-powered vehicle in vertical flight is represented by the following set of equations: $\dot{m} + \beta = 0$; $\dot{h} - V = 0$; $\dot{V} + g + (D - T)/m = 0$; $L = 0$; $T = \beta V_e$; $0 \leq \beta \leq \beta_{\max}$ where are: m the variable mass, h the altitude, T the thrust, D the drag, L the lift, V the velocity, V_e the exit velocity, β mass flow. This flow is represented as a function of a parameter (α) which is considered as the independent parameter of the rocket engine (it varies between $-\infty$ and $+\infty$). By using the indirect methods of the calculus of variations it is shown that the totality of extremal arcs is composed of zero-thrust sub-arcs, sub-arcs to be flown with maximum engine output and variable-thrust sub-arcs. The variational problem is formulated within the general frame of the problems of Mayer type: among all sets of unknown functions $m(t)$, $h(t)$, $V(t)$ and $\alpha(t)$ satisfying the three above first equations and certain prescribed end conditions is determined the special set which minimizes the difference between the final and initial values of an arbitrarily specified function $G(h, V, m, t)$. Closed form solutions are obtained for the following particular cases: flight in vacuum, flight in a uniform atmosphere and flight in an isothermal atmosphere. The instantaneous acceleration of the rocket vehicle has the form $\dot{V}/g = f(x, M_e, M)$; it is plotted for $x = 1,5$ and for several values of the engine parameter (M_e). This graph shows that the acceleration rapidly increases with the Mach number (M); $M_e = V_e/c$ is the ratio of equivalent exit velocity to atmospheric speed of sound (c). The boundary value problem is investigated for an isothermal atmosphere. It consists of determining the special combination of sub-arcs which satisfies a set of prescribed

end-conditions. The analytic criterion can be deduced in order to establish the character of the initial and final sub-arcs of the extremal solution. A numerical example is included having the object of illustrating the general procedure in the present analysis. The diagram of thrust required along the extremal path is determined and plotted. [See also L. E. Ward. US Naval Ord. Test Station. China Lake Calif. TN 3503/2 (1955); G. Leitmann, *Astronautica, Acta* 2, Fasc. 2 and 3, 55—62; 119—124 (1956)].

D. Rašković.

King-Hele, D. G.: The effect of the earth's oblateness on the orbit of a near satellite. *Proc. roy. Soc. London, Ser. A.* 247, 49—72 (1958).

Es werden die Bewegungsgleichungen eines Erdsatelliten, der um eine abgeplattete Erde im Vakuum umläuft, mit Hilfe eines Störungsverfahrens direkt integriert. Das Verfahren ist von demjenigen der üblichen astronomischen Störungstheorie unterschiedlich, in der die Bewegungsgleichungen der gestörten Elemente aufgestellt und integriert werden. Die erhaltenen Resultate werden mit den Erfahrungen an den beiden ersten russischen Erdsatelliten verglichen. *F. Winterberg.*

King-Hele, D. G. and D. C. M. Leslie: Effect of air drag on the orbit of the russian earth satellite 1957: Comparison of theory and observation. *Nature* 181, 1761—1763 (1958).

Es werden für einen Erdsatelliten mit Luftreibung die Bahnelemente als Funktion der Zeit angegeben und mit der Erfahrung verglichen. Die Lösung der Bewegungsgleichung erfolgt unter 6 Annahmen: (1) Die Erde und die Atmosphäre sind kugelsymmetrisch; (2) Die Dichte ρ der Atmosphäre ist unabhängig von der Zeit; (3) ρ hängt vom Abstand r des Erdmittelpunkts aus gerechnet nach dem Gesetz [$\rho = \rho_0 \exp(-r/H)$] ab, wo ρ_0 und H festzulegende Konstanten sind; (4) Die Reibungskraft wirkt in Richtung der Bahntangente und ist gegeben durch $\rho v^2 S$, wo S eine Konstante des Satellitenkörpers ist; (5) Die Exzentrizität der Bahn ist klein, so daß Größen mit e^n , $n > 1$ zu vernachlässigen sind; (6) Der Einfluß der Luftreibung darf als Störung behandelt werden. Es zeigt sich eine im ganzen gesehen gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung. Abweichungen treten im Kleinen auf und haben den Charakter von zufälligen Störungen. Sie lassen sich z. B. dadurch erklären, daß die Dichte der Atmosphäre zeitlich nicht konstant ist.

F. Winterberg.

Kurth, R.: On Lagrange's triangular solution of the problem of three bodies. *Arch. der Math.* 8, 381—392 (1957).

It will be shown that the Lagrange's theorem: „The three fictitious mass-points abstracting three bodies in the corresponding three-body problem of celestial mechanics form an equilateral triangle at each moment (and also a similar theorem for four bodies)“ holds for all kinds of central forces. The author proves also the validity of certain generalisations of Lagrange's theorem to systems of more than three bodies (A. Wintner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton, 1947) for all forces proportional to any power r^a of the distance r of two mass-points acting upon each other, except the case $a = 3$.

D. J. Mangeron.

● **Easthope, C. E.:** Three dimensional dynamics. A vectorial treatment. London: Butterworths Scientific Publications 1958. VIII, 277 p. 42 s.

Nach zwei einleitenden Kapiteln über Vektoralgebra und über die räumliche Bewegung eines Massenpunktes behandelt Verf. die Kinematik und die Kinetik des starren Körpers, wobei vektorielle Methoden ausgiebig benutzt werden. Die Darstellung ist hauptsächlich für Physiker bestimmt, da Beispiele aus der Technik fast völlig fehlen. Ausführlich werden u. a. die Bewegung von Kugeln auf glatten und rauen Flächen und der auf einer Ebene spielende Kreisel behandelt. Auch auf Stabilitätsfragen wird eingegangen, insbesondere in der Kreiseltheorie. Im letzten Kapitel untersucht Verf. plötzliche Fixierungen bewegter starrer Körper und Bewegungen, die durch Stoßkräfte eingeleitet werden. Im Anhang sind die wichti-

sten Begriffe und Sätze aus der räumlichen Statik zusammengestellt. Der Anfänger kann aus dem Buch viel lernen, dem Dozenten gibt es Anregung für die Behandlung der Kinetik in der Vorlesung; auch kann er aus ihm manches Beispiel entnehmen.

A. Weigand.

Charlamova-Zabelina, E. I.: Die schnelle Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt bei Vorhandensein einer anholonomen Bindung. Vestnik Moskovsk Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 12, Nr. 6, 25—34 (1958) [Russisch].

Il n'est pas facile de trouver une réalisation mécanique d'un mouvement où un corps solide, ayant un point immobile, est soumis à des liaisons nonholonomes. L'A. donne un exemple d'un tel mouvement où l'axe de rotation reste toujours dans un plan lié au corps. Le problème peut être résolu par des quadratures et conduit à l'étude d'une intégrale elliptique. L'A. considère plus spécialement le cas où le mouvement se produit avec une grande vitesse de rotation.

C. Woronetz.

Fedorčenko (Fedorchenko), A. M.: On the motion of an asymmetric heavy gyroscope with a vibrating fulcrum. Ukrain. mat. Žurn. 10, 209—217, engl. Zusammenfassung 217—218 (1958) [Russisch].

In a previous paper (cf. this Zbl. 80, 175) the author described a special canonical method of averaging for a mechanical system, the Hamiltonian of which depends on the time. In this paper the author considers the problem of the motion of a rapidly rotating asymmetric heavy gyroscope with a vibrating fulcrum, represented by a mathematical schema where the Hamiltonian of the system depends on a certain angular variable ζ . The elaborated method is applied without any particular modification to this case. They are mentioned some qualitative features of the motion of the investigated mechanical system obtained by means of this method.

D. J. Mangeron.

Weidenhammer, F.: Auswanderungserscheinungen in Schwingungsmeßgeräten. Ingenieur-Arch. 26, 43—60 (1958).

Aus einem Drehschwinger bestehende Meßgeräte können unter Einwirkung von Erschütterungen hoher Frequenz und bestimmter Richtung erzwungene Schwingungen um eine andere Mittellage als ihre statische Ruhelage ausführen, so daß das Gerät aus seiner Sollage auswandert und falsche Anzeigen liefert. Diese Erscheinung wird hier durch Aufstellen der infolge großer Winkelausschläge nichtlinearen Schwingungsgleichung untersucht. Die numerische Lösung und Stabilitätsuntersuchung der Gleichungen gelingt mit Fourier-Ansätzen. Als Ergebnisse sind Mittellagen und Stabilitätsbereiche in Abhängigkeit von einem die Intensität der Erschütterung messenden Parameter dargestellt. Als wesentlich für den Verlauf der Auswanderung und die Stabilitätsbereiche erweist sich ein etwaiger Federaufzugsfehler. Dieses rechnerische Ergebnis wird auch durch einige Versuchsreihen deutlich bestätigt.

R. Zurmühl.

● **Leimanis, E. and N. Minorsky: Dynamics and nonlinear mechanics.** E. Leimanis: Some recent advances in the dynamics of rigid bodies and celestial mechanics. N. Minorsky: The theory of oscillations. (Surveys in Applied Mathematics. Vol. 2.) New York: John Wiley and Sons, Inc. 1958. XII, 206 p. \$ 7,75.

Das vorliegende Buch enthält zwei voneinander unabhängige Abschnitte. Im ersten Abschnitt behandelt Verf. E. Leimanis zunächst die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Er bringt die Eulersche Kreiselgleichung und zählt Sonderfälle auf, in denen sich die Gleichung integrieren läßt. Dann wendet er sich den Gleichungen von Hess und Schiff zu, die darauf beruhen, daß an Stelle der Winkelgeschwindigkeitskomponenten andere Bestimmungsgrößen eingeführt werden (skalares Produkt aus dem Ortsvektor des Schwerpunkts und dem Drehmoment, kinetische Energie und Quadrat des Drehmoments). Verf. erörtert noch die Abbildung der drei Bestimmungsstücke des Kreisels (z. B. der Eulerschen Winkel) auf die Einheitssphäre im vierdimensionalen Raum (Parameter von Cayley). Danach

widmet er sich dem Studium der Bewegungs-Differentialgleichungen eines rotierenden Geschosses, von denen noch keine analytische Lösung bekannt ist, so nicht erhebliche Vereinfachungen vorgenommen werden. Eine solche besteht darin, das Projektil als Punktmasse, die sich in ruhender Luft bewegt, zu betrachten. Für dieses Problem werden die Bewegungsgleichungen angegeben und in verschiedenen Spezialfällen, die sich durch die Annahmen hinsichtlich des Luftwiderstandes, der Luftdichte und -temperatur unterscheiden, erörtert. Die ausführlichen Bewegungsgleichungen, die die Rotation berücksichtigen, werden auch noch erörtert. Verf. wendet sich nun Problemen der Himmelsmechanik zu und beginnt mit dem Drei-Körper-Problem und seiner Lösung unter gewissen Einschränkungen. Es werden die numerische Lösung des allgemeinen Problems behandelt, und dann folgen einige Sätze über die periodischen Lösungen. Schließlich werden Definitionen und Kriterien für das Einfangen beim Drei-Körper-Problem gebracht und Untersuchungen zum verallgemeinerten n -Körper-Problem erläutert. Zu allen behandelten Aufgaben findet man zahlreiche Literaturhinweise. — Im zweiten Abschnitt des Buches gibt N. Minorsky einen Überblick über die Theorie der Schwingungen. Er beginnt mit dem Studium ebener stationärer Phasenbilder und ihrer singulären Punkte, die die Gleichgewichtszustände veranschaulichen, erörtert die verschiedenen Arten von Singularitäten und den Verlauf der Phasenbahnen in deren Nachbarschaft. Er studiert die Verteilung der Singularitäten in der Ebene zweier geeigneter Parameter, die sich aus den Koeffizienten der projektiven Ersatz-Differentialgleichung bilden lassen. Es folgt eine kurze Abhandlung über die Grenzzyklen und ihre Stabilitätseigenschaften, über topologische Konfigurationen und den Bendixson'schen Satz über die Existenz eines Grenzzyklus. Danach wird das Problem der synchronen oder orbitalen Stabilität nach der ersten Näherung skizziert. Nun widmet sich Verf. einigen Approximationsmethoden, die meistens zur Untersuchung periodischer Lösungen dienen (Poincaré, van der Pol, Krylow, Bogoljubow, stroboskopisches Verfahren). Das nächste Kapitel befaßt sich mit den Schwingungsvorgängen in quasilinearen Systemen. Das Problem der Synchronisation (Frequenzmitnahme) wird im einfachen Fall der Bewegungsgleichung mit linearer Feedbacklinie, harmonischer Erregung und kubischem Dämpfungsgesetz behandelt. Konstruktion und Stabilitätsanalyse der erzwungenen Schwingung geschieht nach einem Verfahren von van der Pol. Die Aufgabe der parametrischen Erregung wird am Beispiel der Mathieuschen Gleichung diskutiert. Anschließend wird über nichtlineare Resonanz, subharmonische Schwingungen, Kombinationstöne und Hysterese-Erscheinung bei der Resonanzkurve gesprochen. Ferner werden Schwingungen mit Totzeit-Gliedern erwähnt, die zu Differenzen-Differentialgleichungen angeben. Das letzte Kapitel gilt den Selbst- oder Relaxationsschwingungen, zu denen mehrere Beispiele angeführt werden. Am Schluß findet man einige Literaturhinweise.

R. Reißig

Schmieden, C.: Nichtlineare Schwingungen bei zwei Freiheitsgraden. II. *genieur-Arch.* 26, 110—128 (1958).

Verf. studiert die erzwungenen Schwingungen des dämpfungsfreien Systems mit zwei Freiheitsgraden und nichtlinearen elastischen Kräften, dessen freie Schwingungen von ihm in *Ing.-Arch.* 25, s. dies. Zbl. 79, 173 erörtert wurden. Er beginnt mit der inhomogenen Duffingschen Differentialgleichung für das nichtautonome System von einem Freiheitsgrad

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q + \beta \omega_0^2 q^3 = F \omega_0^2 \sin \Omega t,$$

wobei der Parameter β des nichtlinearen Gliedes hinreichend klein sein soll. Um zu erreichen, daß die gesuchte erzwungene Schwingung die Periode 2π erhält, transformiert Verf. die Zeitskala und setzt $\tau = \omega_0 t \sqrt{1 + \kappa}$; er findet

$$(1 + \kappa) q'' + q + \beta q^3 = F \sin \Omega \tau / \omega_0 \sqrt{1 + \kappa}.$$

erstermal die erzwungene Schwingung mit der Erregerperiode zu berechnen. Verf. $(\Omega/\omega_0)^2 = 1 + \kappa$ und $q = \theta_1 \sin \tau + \theta_3 \sin 3\tau + \dots$ an, wobei $\kappa = 1 + \kappa_0 + \kappa_1 \beta + \kappa_2 \beta^2 + \dots$, $\theta_i = \theta_{i0} + \theta_{i1} \beta + \dots$. (Es zeigt sich, daß θ_{2n+1} im allgemeinen proportional zu β^n sind.) Die Bestimmungsgleichungen der κ_i und θ_{ij} erhält Verf. durch Einsetzen der Größen $1 + \kappa$ und q in die Differentialgleichung, durch Koeffizientenvergleich der sukzessiven Harmonischen und durch anschließenden Koeffizientenvergleich der β -Potenzen. Verf. diskutiert nunmehr die Response-Kurve, d. h. die Abhängigkeit zwischen der Amplitude $\theta_1 = A$ der Grundharmonischen und der Erregerfrequenz Ω ; hierbei wird A als unabhängige Variable betrachtet und $(\Omega/\omega_0)^2 = 1 + \kappa$ als Potenzreihe in A und β angegeben. Diese und die konstruierte periodische Lösung konvergieren nicht für die sog. kritischen A -Werte: $A_1 = 9F/8$, $A_2 = 25F/24, \dots$. Für $A \approx A_1$ hat man $\Omega \approx \omega_0/3$, und der Koeffizient θ_3 von $\sin 3\tau$ erreicht die gleiche Größenordnung wie A . Verf. berechnet die Response-Kurve in der Nähe der Resonanz der Oberschwingung der Ordnung 3 ($\Omega = \omega_0/3$), indem er $\theta_3 = B$ als Parameter nimmt und $\theta_1 = \frac{9}{4}F + \beta + \dots$ setzt. Danach studiert er die subharmonische Schwingung der Ordnung 3, d. h. den Fall $(\Omega/\omega_0)^2 = 9(1 + \kappa)$, und der Ordnung 2, d. h. $(\Omega/\omega_0)^2 = (1 + \kappa)/4$, und zeigt zum Schluß, daß für jeden rationalen Wert von Ω/ω_0 eine Verzweigung vorliegt und die Verzweigungspunkte auf der Grundlösung für die Response-Kurve somit überall dicht liegen. Verf. geht dann zu dem System von zwei Freiheitsgraden über, dessen Differentialgleichungen die folgenden sind:

$$\ddot{\vartheta} + \alpha^2 \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \vartheta + \beta \omega_0^2 \vartheta^3 = F \omega_0^2 \sin \Omega t, \quad \ddot{\vartheta} + \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi + \beta \omega_0^2 \varphi^3 = 0.$$

Verf. verwendet die gleiche Zeittransformation wie bei der Duffingschen Differentialgleichung, macht für $1 + \kappa$ den gleichen Ansatz wie zuvor und setzt ferner $\vartheta = A \sin \tau + (q_{30} + q_{31} \beta + \dots) \sin 3\tau + \dots$, $\vartheta = (\vartheta_{10} + \vartheta_{11} \beta + \dots) \sin \tau + (q_{30} + q_{31} \beta + \dots) \sin 3\tau + \dots$. Er diskutiert den Verlauf der Amplituden A und ϑ in der Abhängigkeit von Ω/ω_0 , wenn $\beta = 0$ angenommen wird, und bestimmt bei $\Omega/\omega_0 > 0$ wie im Fall eines Freiheitsgrades die Anfangsglieder der Grundlösung. Ein Unterschied zur Behandlung dieses Falles tritt ein, wenn $\alpha = \frac{4}{3}$ ist; dann verhalten sich die Eigenfrequenzen des Systems für kleine Schwingungen wie 1:3. Verf. untersucht unter dieser Voraussetzung das Verhalten der periodischen Lösung in der Umgebung der Resonanz der Grundschwingung, wo $(\Omega/\omega_0)^2 \approx \frac{5}{9}$, und benutzt mit den Ansätzen $\kappa^2 = \frac{16}{25} + \xi \beta^{1/3}$, $1 + \kappa = \frac{5}{9} + \kappa_1 \beta^{1/3} + \kappa_2 \beta^{2/3} + \dots$, $A \beta^{-1/3}$, $\theta_1 = B \beta^{-1/3} + \theta_{11} + \theta_{12} \beta^{1/3} + \dots$. Er findet $B = \frac{5}{3} A$ und sucht nun einen Überblick über die Abhängigkeit des Parameters A von der Frequenz Ω zu gewinnen. Es folgt eine ausführliche Diskussion dieser A -Response-Kurve. Abschließend betrachtet Verf. noch das Verhalten der Lösung in der Nähe der Resonanzstelle für die Oberschwingung und berechnet wiederum die A -Response-Kurve.

R. Reifig.

Braunbek, Werner und Elmar Sauter: Erzwungene Schwingungen eines einfachen nichtlinearen Systems. II. Die nichtstationären Bewegungen. Z. Phys. 147, 517—519 (1957).

Nella 1ª Parte della ricerca (questo Zbl. 77, 375) è stato dimostrato che, se la funzione $\xi = u \cos(\omega t + q)$ dev'essere soluzione dell'equazione $\ddot{\xi} + 2r\dot{\xi} + \omega_1^2 \xi - \Omega_0^2 \xi^3 = 2\omega \cos \omega t$ le funzioni di modulazione $u(t)$, $q(t)$, supposte lentamente variabili debbono soddisfare al sistema differenziale $\dot{u} = -\sin q - r u$; $\dot{q} = \Omega - \omega^2 - (\cos q)/u$. Nel caso di assenza di smorzamento $r = 0$, è possibile effettuare una prima rigorosa integrazione di questo sistema. Una seconda integrazione conduce in generale a battimenti, ma in un caso limitè ad un'approssimazione temporaneamente asintotica a stati vibratorii stazionari instabili. Gli Autori studiano il comportamento qualitativo delle curve u , q . A considerazioni interessanti conduce la discussione di uno smorzamento molto piccolo.

G. Lampariello.

MacLachlan jr., Dan: Unified treatment of the vibrating arm. I. The solution when the restoring force is expressed as $F = -\psi^p$. II. The solution when the restoring force is positive and also when it is expressed as a power series in ψ . Amer. J. Phys. 25. 228—240; 241—248 (1957).

L'A. studia l'equazione dinamica $m \ddot{x} = -x^p$ con particolare riguardo all'analisi qualitativa delle soluzioni sul piano t, x e sul piano delle fasi. L'attenzione è particolarmente rivolta ai casi in cui le figure sono chiuse. — Seconda Parte dell'indagine dell'A. concerne i moti unidimensionali dovuti ad una forza repulsiva del tipo $K x^p$ o esprimibile mediante una serie di potenze di x . La discussione implica l'analisi delle funzioni iperboliche ed ellittiche. Il metodo usato dall'A. ha una validità più generale di quella che gli deriva dalla la risoluzione dei particolari problemi dinamici studiati.

G. Lampariello.

Rumjancev, V. V.: Über die Stabilität der Bewegung bezüglich eines Teils der Veränderlichen. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 12. Nr. 4, 9—16 (1958) [Russisch].

Verf. untersucht die Stabilität der Bewegung in bezug nur auf manche der Veränderlichen. So ist das Problem schon von Ljapunov (Untersuchung eines der speziellen Fälle des Problems der Stabilität der Bewegung, Moskau 1935) behandelt und Malkin (dies. Zbl. 21, 30) weist darauf hin, daß auch dann die Sätze von Ljapunov für die Stabilität der nicht gestörten Bewegung in bezug nur auf einige Veränderliche gelten, sobald die Funktion von Ljapunov die entsprechenden Bedingungen erfüllt. Verf. stellt fest, daß entsprechende Beweise der Sätze von Ljapunov in Wirklichkeit anwendbar sind. Es sind ebenso drei Beispiele konstruiert: zwei (Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt im Falle von Lagrange und Poisson: $A = B$. und Bewegung eines holonomen Systems mit von der Zeit unabhängigen Bindungen unter der Wirkung nur gyroskopischer Kräfte) zu dem Satz der Stabilität und eins (Bewegung eines holonomen Systems mit von der Zeit unabhängigen Bindungen unter der Wirkung potentieller, gyroskopischer und dissipativer Kräfte) zu dem Satz der asymptotischen Stabilität.

B. Dolaptschiew — G. Paskalew.

Putnam, C. R.: On future and past stability in incompressible systems. J. Math. Mech. 6, 669—672 (1957).

L'A. prova il seguente teorema. Sia Ω un insieme di punti $x = (x_1, \dots, x_n)$ di un E^n euclideo, aperto, non necessariamente di misura finita, invariante per il sistema differenziale autonomo $(') \, dx/dt = f(x)$, dove $f = (f_1, \dots, f_n)$ è di classe C^1

e soddisfa la condizione di incompressibilità $('') \, \operatorname{div} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$. Ogni so-

luzione $x(t)$ di $(')$ in Ω che sia stabile nel senso di Liapunov in futuro ovvero in passato e che sia quasi periodica (secondo Bohr) risulta stabile anche in passato ovvero, rispettivamente, in futuro. L'A. osserva che non è noto se l'essere $x(t)$ quasi periodica sia conseguenza delle altre ipotesi o, comunque, se il teorema sussista anche senza supporre $x(t)$ quasi periodica. In ogni modo è essenziale per la validità del teorema stesso l'ipotesi $('')$ senza la quale possono aversi soluzioni quasi periodiche (ad es. la $x = 0$ dell'equazione $dx/dt = -x$) che sono stabili in futuro, ma non lo sono in passato.

R. Conti.

Mangeron, D., C. Drăgan und V. Svijschi: Eine neue Methode zum Studium der Theorie der Mechanismen und Maschinen. Acad. Républ. popul. Romaine, Revue Méc. appl. 2, Nr. 1, 145—156 (1957).

Es sei $\alpha^{(i)}$ die Beschleunigung der Ordnung i eines Punktes (M) auf einem starren Körper, der eine parallele Bewegung zu einer unbeweglichen Ebene ausführt, ausgedrückt durch die verallgemeinerten Formeln von Somow. Dann gelten folgende Sätze: 1. Satz über Isoklinen [„Der geometrische Ort der Punkte M , $r^* =$

$r = \lambda_i \alpha^{(i)}$, in welchem M einen Erzeugungspunkt auf einer beliebigen Geraden (D) dieses Körpers bezeichnet, ist eine Gerade (D^*) welche mit (D) einen Winkel φ_i bildet, $\operatorname{tg} \varphi_i = \lambda_i B_i (1 - \lambda_i A_i)^{-1}$, wo $A_i(t)$, $B_i(t)$ durch rekursive Formeln erklärt sind.].
 2. Satz des Extremums in bezug auf die reduzierten Beschleunigungen, \therefore Hauptsatz über die Verteilung der Beschleunigungen verschiedener Ordnung in der Theorie der Mechanismen und Maschinen [„Der geometrische Ort der Endpunkte reduzierter Beschleunigungen i -ter Ordnung von Punkten einer Geraden (D) dieses Organs ist eine perpendikuläre Gerade zur ersten.“] Die obigen Sätze führen zur Methode der reduzierten Beschleunigungen. Diese Methode wird auf einige Assursche Gruppen (nach der neueren Klassifizierung von Baranow) angewendet (das Verteilungsproblem von Beschleunigungen erster und zweiter Ordnung). Die graphischen Konstruktionen und zwei neue Sätze (über den geometrischen Ort des Endpunktes der reduzierten Beschleunigung erster und zweiter Ordnung) sind gegeben. Der Verf. erwähnt in der Schlußbemerkung, daß die dargelegten Ergebnisse, welche das Problem der neuen, einheitlichen und fruchtbaren Methode der reduzierten Beschleunigungen beim graphoanalytischen Studium ebener Mechanismen erläutern und feststellen, eine Anzahl von neuen Problemen mit allgemeinerem Charakter anregen.

D. Rašković.

Bugaievski, E., R. Bogdan und C. Pelecudi: Zur Einteilung räumlicher Mechanismen. Acad. Républ. popul. Roumaine. Revue Méc. appl. 2, Nr. 1, 157—170 (1957).

Die Einteilung der Mechanismen auf Grund ihrer Gestalt hat eine besondere Bedeutung, da sie die kinematische und die Kräfteuntersuchung mit Hilfe der Zerlegung eines komplizierten Falles in einfache Fälle ermöglicht. Die Haupteinteilung der kinematischen Ketten erfolgt üblicherweise nach der Zahl der möglichen Bewegungen der einzelnen Glieder, innerhalb deren man eine weitere Unterteilung nach dem Beweglichkeitsgrad vornimmt (mit der Dobrowolskischen Gleichung). Beobachtungen zeigen, daß es möglich ist, die Einteilung der Mechanismen in erster Linie auf Grund der Zahl der geschlossenen Polygone und der Glieder vorzunehmen, und so kann man jede kinematische Kette als eine Familie mit einem größeren gemeinsamen Freiheitsgrad aller noch nicht verbundenen Glieder betrachten. Es ist gegeben: die Gleichung für den Austausch eines Gelenkes der Klasse k durch Gelenke einer gewünschten Klasse k' : die Anzahl der erhaltenen geschlossenen Umrisse (Polygone) mit der Formel $z = p_i - n - 1$, wo z die Zahl der überflüssigen Gelenke — oder die Polygonzahl —, p_i die Anzahl der inneren Gelenke (Zwischengelenke) und n die der zukünftigen Glieder bezeichne (R. Kraus findet auf andere Weise eine ähnliche Gleichung, s. Getriebelehre, Berlin 1951; Grundlagen des systematischen Getriebeaufbaus, Berlin 1952); verschiedene Formen der Freiheitsgradgleichung: Veränderung des Freiheitsgrades durch Beseitigung oder Hinzufügen von Gliedern und Gelenken; Bestimmung der Zahl der einfachen Glieder einer Kette und Zahl der äußeren Gelenke einer Kette, deren Beweglichkeitsgrad und Gliederzahl gegeben sind. Die Klasseneinteilung der kinematischen Ketten wird auch betrachtet. Einteilungstabellen sind angegeben.

D. Rašković.

Mewes, Ernst: Einflüsse der Schränkungen von Schubkurbelgetrieben auf die Bewegungsverhältnisse der Gleitstücke. Z. angew. Math. Mech. 37, 275—277 (1957).

Es wird über die Entwicklung der Fourierkoeffizienten bei der geschränkten Schubkurbel und über die bei den Koeffizienten auftretenden Reihenentwicklungen berichtet. Vgl. a. W. Meyer zur Capellen und Mitarbeiter: Die Bewegungsverhältnisse an der geschränkten Schubkurbel. Forsch.-Ber. Wirtsch.-Verkehrsm. Nordrhein-Westfalen, Nr. 449, Opladen 1957. *W. Meyer zur Capellen.*

Mewes, Ernst: Unbalanced inertia forces in slider-crank mechanisms of large eccentricity. J. appl. Mech. 25, 225—232 (1958).

Verf. stellt im wesentlichen die Entwicklungen dar wie in seinem früheren Aufsatz: „Formeln für die Massenkräfte und kinematische Zusammenhänge bei geschränkten Schubkurbelgetrieben“ (s. dies. Zbl. 71, 394). *W. Meyer zur Capellen.*

Elastizität. Plastizität:

Stüssi, Fritz: Zur Prandtlischen Membrananalogie der Torsion. *Z. angew. Math. Phys.* **9b**, Festschrift Jakob Ackeret 661—667 (1958).

Zwischen dem mittels der Spannungsfunktion formulierten Torsionsproblem und der Verformung einer gleichmäßig belasteten Membran besteht die bekannte von Prandtl angegebene Analogie. Verf. ersetzt die Membran näherungsweise durch zwei Streifensysteme, die sich senkrecht schneiden. Aus den Randbedingungen und den Bedingungen an den Kreuzungspunkten der Streifen ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die statisch Unbestimmten. An einem Beispiel (rechteckiger Querschnitt vom Seitenverhältnis 2:3) wird gezeigt, daß das Verfahren für die größte Schubspannung und für das Torsionsmoment bei sehr grober Teilung (nur drei innere Punkte) nur Fehler von rd. 1% ergibt. *A. Weigand.*

Skorobogat'ko, A. A.: Torsion of cylindrical shafts with circular grooves. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **119**, 896—898 (1958) [Russisch].

L'état de tension dans le cas de torsion des arbres à section variable se détermine par le potentiel complexe des tensions $w = w(Z) = \varphi + i\psi$, où $Z = r + iz$ ($\operatorname{Re} Z > 0$) et les fonctions φ (fonction de déplacement) et ψ (fonction de tension), tout en satisfaisant certaines conditions à la frontière, sont liées entre elles par les équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{\mu r^3} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{\mu r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

L'A., en utilisant la méthode des domaines majorants dont s'est servi G. N. Polozij à l'occasion de l'établissement d'un nombre de théorèmes variationnels et topologiques relatifs aux problèmes à la frontière dans la théorie de la torsion des arbres à section variable [ce *Zbl.* **64**, 185; voir aussi *Priklad. Mech.* **1**, N° 4, 391—399 (1955)], établit pour les tensions maxima les formules assez simples, tout en indiquant les limites de variation de l'erreur commise, dans le cas d'un arbre cylindrique infini aux cannelures circulaires, dans l'hypothèse que la surface latérale de celui-ci n'est pas soumise aux efforts extérieurs et la fonction ψ satisfait aux conditions à la frontière $\psi|_{r=0} = 0$, $\psi|_{r=L} = M/2\pi$, où M est le moment de torsion global. $r=0$ et $r=L$ sont les lignes de courant qui limitent la section axiale de l'arbre. *S. J. Mangeron.*

Čobanjan, K. S.: Die Torsion einer zusammengestellten Welle von veränderlichem Durchmesser. *Akad. Nauk Armjan. SSR. Doklady* **27**, 139—144 (1958) [Russisch].

In der Arbeit wird das Problem der Torsion einer Welle von veränderlichem kreisförmigem Querschnitt, zusammengesetzt aus verschiedenen, an den Seitenflächen verlöteten Materialien, untersucht. Ferner wird das Problem der Torsion einer Welle von veränderlichem Querschnitt mit einer dünnen verstärkenden Schale genähert behandelt. *Redaktion.*

Eringen, A. C.: Response of beams and plates to random loads. *J. appl. Mech.* **24**, 46—52 (1957).

With the use of generalized harmonic analysis the problem of vibrating damped beams and plates under stochastic loading is solved. The resulting equations give the cross-correlation functions for displacements, stresses, moments, and so on, in terms of the cross-correlation function of external pressure. Mean square values of these functions are special cases of these results. Using a method due to Rice, we also calculate the probable number of times per unit time the random displacements or stresses will exceed a given value. The case of supported bars, cantilever bars, clamped circular plates, and simply supported rectangular plates are worked out in detail. (Author's summary).

Teodorescu, Petre P.: Sur l'hypothèse des sections planes en résistance des matériaux. *An. Univ. C. I. Parhon București. Ser. Ști. Natur.* **14**, 41—46, russ. und französ. Zusammenfassung 46 (1957) [Rumänisch].

En considérant le cas de la flexion pure des barres prismatiques, on montre que l'hypothèse des sections planes n'est justifiée dans la Théorie de l'Elasticité que si l'on néglige la contraction latérale (c'est à dire le coefficient de Poisson).

Dan Gh. Ionescu.

Teodorescu, Petre P.: Sur la position de l'axe neutre aux poutres-parois continues. An. Univ. C. I. Parhon București, Ser. Ști. Natur. Nr. 16, 25—32, russ. und französ. Zusammenfassung 32—33 (1957) [Rumänisch].

Pour les poutres-parois élastiques, actionnées par des charges périodiques, en général on ne tient pas compte du fait que la déformation dans la direction de l'axe de la poutre est empêchée. C'est ainsi qu'apparaît une tension supplémentaire σ_x , uniformément distribuée sur la hauteur de la poutre. Cette tension est indépendante du rapport entre les deux dimensions de la poutre (a/b) et de la charge; elle ne dépend que de la charge moyenne sur un côté, le long d'une période, ainsi que du matériel de la poutre. La tension supplémentaire σ_x modifie la position de l'axe neutre, en l'abaissant au milieu de l'ouverture et en la haussant sur les appuis. Exemplifications à l'aide de quelques cas particuliers. *Dan Gh. Ionescu.*

Teodorescu, Petre P.: Considérations concernant l'application des méthodes élémentaires de calcul dans le problème plan de la théorie de l'élasticité. An. Univ. C. I. Parhon București, Ser. Ști. Natur. Nr. 16, 35—47, russ. und französ. Zusammenfassung 47 (1957) [Rumänisch].

On considère les poutres à section rectangulaire, pour lesquelles le rapport entre l'ouverture et l'hauteur de la section est $a/b \geq 2$. Après avoir analysé les cas d'appui simple de la poutre, on démontre la possibilité d'appliquer les méthodes élémentaires de calcul aussi dans le cas des charges discontinues ou à tangente discontinue, (exemples: charge concentrée au milieu et charge continue triangulaire). En comparant les résultats obtenus avec ceux donnés par la Résistance des Matériaux, on montre que l'on peut utiliser ces derniers résultats, avec une approximation technique suffisante, tant pour le calcul des tensions, que pour le calcul de la flèche de la poutre. *Dan Gh. Ionescu.*

Bassali, W. A.: The transverse flexure of thin elastic plates supported at several points. Proc. Cambridge philos. Soc. 53, 728—743; 744—754 (1957).

Im ersten Teil dieser Arbeit wird das Biegeproblem einer kreisförmigen, in beliebigen Punkten unterstützten, dünnen Platte untersucht. Der Plattenrand ist entweder vollkommen frei, oder in einzelnen Punkten unterstützt. Die Belastung ist achsensymmetrisch auf eine exzentrische Kreisfläche verteilt. Zur Lösung des Problems bedient sich Verf. der Methode von Muskhelishvili. Es werden geschlossene Ausdrücke für die Durchbiegungen, Biegemomente und Querkkräfte gegeben. Als Grenzfall wird eine unendliche, sowie eine nach einer Seite unendliche Platte betrachtet. — Im zweiten Teil gibt Verf. in geschlossener Form die exakte Lösung für das Biegeproblem einer unendlich ausgedehnten, innerhalb einer Kreisfläche achsensymmetrisch belasteten und punktförmig unterstützten dünnen Platte. Der äußere Rand ist vollkommen frei und der innere kreisförmige Plattenrand ist entweder vollkommen frei, oder in einzelnen Punkten unterstützt. Zur Lösung dieses Problems wird die Methode von Muskhelishvili angewendet. *V. Bogunović.*

Bassali, W. A. and R. H. Dawoud: Green's functions for thin isotropic plates containing holes. Proc. Cambridge philos. Soc. 53, 755—763 (1957).

This paper is concerned with the small transverse displacement of an infinite thin plane isotropic plate due to the application of a transverse force applied at an arbitrary point of the plate. The plate has its outer edge free, and is clamped along and bounded internally by a closed curve that can be mapped onto the unit circle by means of a polynomial. Three polynomials are considered and in each of these cases the deflexion is obtained in finite terms. Circular and elliptic holes as well as curvilinear polygonal holes are included as special cases. (From author's summary.) *V. Bogunović.*

Keller, Herbert B. and Edward L. Reiss: Iterative solutions for the non-linear bending of circular plates. Commun. pure appl. Math. 11, 273—293 (1958).

In dünnen auf Biegung beanspruchten Platten, deren Durchbiegung größer als

die Plattendicke ist, treten außer den Biegespannungen noch Membran- oder Gewölbespannungen auf. Ihre Berechnung wurde von Th. v. Kármán auf zwei gekoppelte nichtlineare partielle Differentialgleichungen für die Durchbiegung und die Spannungsfunktion zurückgeführt; für die symmetrisch belastete Kreisplatte reduzieren sich die partiellen auf gewöhnliche Differentialgleichungen, die näherungsweise u. a. mit Hilfe von Potenzreihen behandelt wurden. Verff. behandeln die gleichmäßig belastete Platte mit Hilfe eines Iterationsverfahrens, das zunächst auf das zugeordnete Integralgleichungsproblem angewandt wird. Die Methode konvergiert, falls ein der Belastung proportionaler dimensionsloser Parameter unterhalb einer festen Schranke bleibt. Durch Interpolation zwischen zwei Iterationen läßt sich die Konvergenz verbessern. Numerisch durchgerechnet wurde die am Rand eingespannte gleichmäßig belastete Kreisplatte. Dabei wurde das Iterationsverfahren auf das Differentialgleichungssystem angewandt, das durch das zugehörige System von Differenzgleichungen angenähert wurde. Diagramme für die Durchbiegung und die Spannungen zeigen das Ergebnis der Rechnung. *A. Weigand.*

Serman, D. I.: Über das elastische Gleichgewicht einer längs des Randes gestützten Platte. Akad. Nauk Armjan. SSR. Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk 10, Nr. 3, 35—46 (1957) [Russisch].

Das Biegeungsproblem einer längs des Randes L gestützten elastischen Platte wird auf folgende Randwertaufgabe zurückgeführt: Es sollen zwei in dem Gebiete S der Platte reguläre Funktionen $\varphi(z) = i\varphi_1(z)$ und $\psi(z) = i\psi_1(z)$ der komplexen Veränderlichen $z = x + yi$ gefunden werden, welche für t am Rande folgende Gleichungen erfüllen

$$\operatorname{Re} \{ dt/ds [\dot{\varphi}_1(t) + t\varphi_1'(t) + \psi_1(t) \} = f_1(s) \quad \text{und}$$

$$\operatorname{Re} \{ \lambda_0 \varphi_1'(t) - (dt/ds)^2 [t\varphi_1''(t) + \psi_1'(t)] \} = g_1(s),$$

wo f_1 und g_1 gegebene Funktionen der Bogenlänge s auf L sind, und λ_0 eine Konstante. Die Lösung wird in der Form

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^2 \int_L \varphi_n(s) G_n(t, z) dt, \quad \psi(z) = \sum_{n=1}^2 \int_L \psi_n(s) H_n(t, z) dt$$

gesucht, wo die passend gewählten Funktionen G_n und H_n logarithmische Glieder von dem Typus $\ln(1 - z/t)$ enthalten, so daß schließlich die unbekannten Dichten $\varphi_1(s)$ und $\psi_2(s)$ ein System von Fredholmschen Integralgleichungen

$$\varphi_j(s) + \sum_{n=1}^2 \int_L \varphi_n(s) K_{nj}(s, s_0) ds = f_j(s_0), \quad j = 1, 2,$$

erfüllen, wobei das wesentlichste ist, daß sich die Kerne K_{nj} als stetige Funktionen von s und s_0 erweisen. Schließlich wird die Eindeutigkeit der Lösungen der letztgenannten Integralgleichungen bewiesen. *S. Drobot.*

Seide, Paul: A comment on „Bending and buckling of clamped sandwich plates“. J. aeronaut. Sci. 24, 782 (1957).

This is a discussion of the paper by G. A. Thurston (s. this Zbl. 77, 378). The author points out that in Hoff's energy expression for sandwich plates used by Thurston it should be taken into account that the core is bonded to the inner surface of each cover sheet. With this correction the results would be more theoretically correct. *V. Bogunović.*

Chatterjee, B. B.: Stresses in a dumbbell-shaped disk rotating about an axis lying in its middle plane. J. appl. Mech. 25, 290—292 (1958).

L'A. utilise la méthode des fonctions de variable complexe pour trouver l'état de tension dans un disque plan en rotation autour d'une axe qui se trouve dans le plan médian de la plaque et est normale à l'axe de symétrie de celle-ci. On suppose un état de tension plane généralisée, les forces d'inertie étant considérées comme des forces massiques. Les tensions sur le contour sont aussi explicitées. *P. P. Teodorescu.*

Szelągowski, Franciszek: A rotating disc with a rigid circular inclusion at the centre. *Arch. Mech. stosow.* **10**, 155—161 (1958).

The problem of determination of the corresponding stresses for a steel rotating disc with a rigid circular inclusion at the centre is a simple example of application of the generalized Kolosov's and Muskhelishvili formulae recently established by the author [*Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV*, **4**, 2, 111—118 (1956)]. *D. J. Mangeron.*

Tameroğlu, S.: Torsionsschwingungen von Scheiben mit Exponentialprofil. *Ingenieur-Arch.* **26**, 212—219 (1958).

Es werden die Torsionseigenschwingungen von Kreisscheiben untersucht, deren Dicke mit dem Radius exponentiell abnimmt. Die gewöhnliche Differentialgleichung, der die Schwingungsform genügt, wird durch einen Reihenansatz integriert. Diese Reihe wird nach endlich vielen Gliedern abgebrochen, so daß sich die Eigenwerte aus einer algebraischen Gleichung ergeben. Die Rechnung wird für eine am Innenrand eingespannte und am Außenrand freie Scheibe durchgeführt, und zwar wird der kleinste Eigenwert für zwei Profilformen ermittelt. Das Verfahren führt für kleine r_i/r_a (r_i = Innen-, r_a = Außenradius) zu guten Ergebnissen; für $r_i/r_a \approx 0,25$ muß man im Reihenansatz wesentlich mehr Glieder berücksichtigen, um ausreichend genaue Ergebnisse zu erhalten. Die Schwingungsformen der Dehnungsschwingungen genügen einer ähnlichen Differentialgleichung; in diesem Fall konvergiert das Reihenverfahren aber wesentlich schlechter. *A. Weigand.*

•Pflüger, Alf: Elementare Schalenstatik. 2. erweiterte Aufl. der Einführung in die Schalenstatik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1957. VII, 112 S., 56 Abb. Ganzleinen DM 19,50.

Bei der vorliegenden zweiten erweiterten Auflage dieses sehr anschaulich geschriebenen Buches handelt es sich um eine leicht verständliche Darstellung von Grundsätzen der Schalentheorie. Das Buch gibt einerseits die Grundlagen für das Verständnis der schwierigen Gebiete der Schalentheorie, andererseits hilft es dem Ingenieur in der Praxis einfache Schalenkonstruktionen zu berechnen. Nach kurzer Einleitung werden die Membrantheorie der Rotation- und Zylinderschalen, sowie der allgemeinen Schalen, die Biegetheorie der Zylinderschalen und Einzelheiten des Spannungszustandes dargestellt (Kap. II bis VI). Der Anhang enthält eine ausführliche und für die Berechnung sehr nützliche Zusammenstellung von Lösungen der Membrantheorie. *V. Bogunović.*

Hoff, N. J.: Buckling of thin cylindrical shell under hoop stresses varying in axial direction. *J. appl. Mech.* **24**, 405—412 (1957).

Eine an den Enden $x = 0$ und $x = L$ einfach gestützte Kreiszyinderschale wird von einer Reifenspannung $\sigma_\theta = RE \sum_{m=0}^{\infty} s_m \cos \frac{m\pi x}{\lambda}$ beansprucht, wobei θ der Polarwinkel, E Elastizitätsmodul, $\lambda = L/a$, a Halbmesser, und R eine zu bestimmen bleibende Zahl ist. Die elastische Knickung der Schale wird mit Hilfe der sog. Donnelschen Gleichungen [s. N. J. Hoff, *J. appl. Mech.* **21**, 343—350 (1954)] untersucht, wobei sich das Verschwinden einer geeigneten Determinante als die Knickungsbedingung erweist. Es werden nur die Fälle untersucht, in denen von den Koeffizienten s_m in σ_θ nur s_0, s_1, s_2 oder s_0 und s_2 von Null verschieden sind, und für diese Fälle wird die entsprechende kritische Reifenspannung ermittelt. Es werden auch die Temperaturspannungen untersucht, von denen es sich erweist, daß sie die elastische Knickung nicht verursachen. *S. Drobot.*

Stippes, M.: Displacements in plane elasticity. *Z. angew. Math. Mech.* **38**, 71—72 (1958).

On présente le calcul des déplacements dans le problème plan de la théorie de l'élasticité, l'état de tension étant connu, en précisant les fonctions d'une seule variable qui y interviennent. *P. P. Teodorescu.*

Tolokonnikov, L. A.: A plane deformation of an incompressible material. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 119, 1124—1126 (1958) [Russisch].

L'A. fait quelques considérations sur un état de déformation plane d'un corps incompressible. On aboutit à une fonction de tension, qu'on peut développer en série d'après un petit paramètre, obtenant ainsi les premières approximations de la solution du problème.

P. P. Teodorescu.

Krylov, A. L.: Propagation of limit equilibrium in the axially-symmetrical two-dimensional elastic-loose body case. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 118, 882—883 (1958) [Russisch].

On fait quelques considérations pour un état de déformation plane d'un corps à symétrie axiale, élastique et pulvérulent, en précisant les équations auxquelles on aboutit dans l'hypothèse de Mises.

P. P. Teodorescu.

Bychawski, Z. and K. Piszczek: Pseudo-plane state of shrinkage distortion in a non-homogeneous circular cylinder. *Arch. Mech. stosow.* 10, 211—231 (1958).

L'A. étudie un état de déformation pseudo-plane dans un cylindre circulaire hétérogène, soumis à une déformation de contraction (par exemple pour le béton). Tels problèmes se rencontrent dans les structures précontraintes. L'étude théorique est suivie d'exemples numériques de calcul.

P. P. Teodorescu.

Roth, W.: Über eine zweckmäßige Walzenform für das Auswalzen dünner Folien. *Ingenieur-Arch.* 26, 333—337 (1958).

Varvák, P. M.: On the solution of the spatial problems of the theory of elasticity. *Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR* 1958, 1049—1052, russ. und engl. Zusammenfassung 1052—1053 (1958) [Ukrainisch].

The solution of the three-dimensional problem of the theory of elasticity is considered, applying Lamé's equations and the method of finite differences. The boundary conditions may be both static and kinematical. Final expressions are given for the fundamental equations and stress components for parallelepiped and cubic lattices. The method used is illustrated by a cube undergoing compression.

Redaktion.

Tremmel, E.: Über die Anwendung der Plattentheorie zur Bestimmung von Wärmespannungsfeldern. *Österr. Ingenieur-Arch.* 11, 165—172 (1957).

Im Anschluß an die ebene Theorie der Wärmespannungen (z. B. Melan-Parkus, Wärmespannungen, Wien 1953) besteht Übereinstimmung der Differentialgleichung der Wärmespannungsfunktion mit jener der Durchbiegung einer elastischen Platte, wenn eine der Laplace-Ableitung der Temperatur proportionale Belastung verwendet wird. Verf. weist darüber hinaus nach, daß auch die Randbedingungen übereinstimmen, wenn beim Wärmespannungsproblem ein prismatischer Stab mit einfach zusammenhängendem Querschnitt und freier Oberfläche betrachtet wird, während beim zugehörigen Plattenproblem eine Platte konstanter Dicke von derselben Kontur längs des ganzen Randes verdrehungsfrei eingespannt sein muß.

H. Neuber.

Williams, M. L.: Further large-deflection analysis for a plate strip subjected to normal pressure and heating. *J. appl. Mech.* 25, 251—258 (1958).

In an earlier paper by the same author (s. this Zbl. 77 379) an analysis was carried out to determine the stresses and deflections in an infinite strip plate undergoing large deflections when the plate was subjected to a combined normal loading and uniform temperature rise through the thickness, both of which were permitted to vary across the plate width. This paper extends the analysis and design charts to the case where the temperature distribution through the thickness of the plate may have any desired distribution. (From authors summary.)

D. Radenković.

● **Eirich, Frederick R. (edited by):** Rheology. Theory and applications. Vol. 2. New York: Academic Press Inc., Publishers; London: Academic Books, Ltd. 1958. 600 p. \$ 18,—.

The present second volume (vol. I s. this Zbl. 72, 194) of the three-volume compendium of theoretical and applied rheology deals with the rheology of various

substances. Of the thirteen chapters entitled: 1. Visco-elastic phenomena in amorphous high polymeric substances (**H. Leaderman**). — 2. Stress-relaxation studies of the viscoelastic properties of polymers (**A. V. Tobolsky**). — 3. The relaxation theory of transport phenomena (**T. Ree** and **E. Eyring**). — 4. The rheology of organic glasses (**R. Buchdahl**). — 5. The rheology of raw elastomers (**M. Mooney**). — 6. The rheology of cellulose derivatives (**E. B. Atkinson**). — 7. The rheology of fibers (**R. Meredith**). — 8. The rheology of gelatin (**A. E. Ward** and **P. R. Saunders**). — 9. Rheological properties of asphalts (**N. J. Saal** and **J. W. A. Labout**). — 10. Rheological problems of the earth's interior (**B. Gutenberg**). — 11. Experimental techniques for rheological measurements on viscoelastic bodies (**J. D. Ferry**). — 12. Fundamental techniques: Fluids (**B. A. Tams**). — 13. Goniometry of flow and rupture (**A. Jobling** and **J. E. Roberts**). only the first, third and last are of some mathematical interest; the chapter on the rheology of the interior of the earth derives its mathematical interest mainly from the discussion of the physical parameters entering geomechanical analysis. The remaining chapters are mainly designed to provide summaries of the existing rheological information with respect to the various substances, as well as discussions of the experimental techniques by which such information is obtained. In this respect the presentation is comprehensive and up-to-date; the book represents therefore an important contribution in the field of physical rheology and a valuable source of information which has, so far, been scattered in a multitude of journals. — Considering the parts of mathematical interest, the first chapter presents a survey of theoretical linear visco-elasticity limited to mechanical models, one-dimensional stress-strain-time relations, linear superposition and relaxation- and retardation-spectra; the interrelation is also discussed between molecular structure and linear viscous response. The third chapter represents an attempt to discuss fluid flow in terms of a generalized rate-theory based on the concept of relative motion (jumps) of molecular flow units with respect to each other on both sides of a shear plane, in the course of which the acting shear stress is released. The resulting well-known hyperbolic sine flow equation of Prandtl and Eyring is generalized by superposition of series of flow processes with different parameters, as well as by the introduction of the concept of „entanglement“ between flow units, expressed in terms of the associated relaxation times. With the aid of this concept thixotropic transformations and structural viscosity can be quantitatively represented. The last chapter dealing with the goniometry of laminar flow and the observation and measurement of the so-called „cross-effects“, first demonstrated by Weissenberg, is an attempt to summarize, in a rather elementary way, the results of the rigorous analysis of non-linear isotropic viscous fluids due to Reiner and Rivlin, and the associated principles of measurement of flow formulated by Weissenberg and embodied in his rheogoniometer. — The volume, as indeed the whole work, is clearly planned for the use of the large number of mathematically unsophisticated industrial rheologists who will find it an indispensable aid in their work.

A. M. Freudenthal.

Oldroyd, J. G.: The rheology of some two-dimensional disperse systems. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **53**, 514—524 (1957).

Si considera un continuo bidimensionale S costituito da un sistema isotropo omogeneo contenente delle intrusioni di una diversa sostanza sufficientemente lontane le une dalle altre perché in condizioni statiche abbiano forma circolare. Ammessa per l'uno e per l'altro componente una equazione di stato lineare nelle componenti di tensione e di deformazione e nelle loro derivate prime, seconde . . . , si rappresentano le proprietà reologiche macroscopiche dell'insieme composito mediante quelle di un conveniente continuo fittizio S' . La maggior parte del lavoro [che estende al caso bidimensionale precedenti ricerche dell'A. su sistemi tridimensionali, [questo *Zbl.* **50**, 416; *Proc. Roy. Soc. London*, Ser. A **232**, 567—577

(1955); Verformung und Fließen des Festkörpers. Koll. Madrid 26.—30. Sept. 1955, 304—313 (1956)] è intesa ad esprimere gli operatori relativi ad S' mediante quelli dei due componenti di S , e ad illustrare tale riduzione con esempi. Poiché si tiene anche conto della tensione superficiale e di quella tra i due componenti, il modello si adatta bene anche a rappresentare il comportamento dello strato di contatto tra due liquidi, o tra liquido e gas ecc. T. Manacorda.

Ericksen, J. L.: Characteristic direction for equations of motion of non-newtonian fluids. *Pacific J. Math.* **7**, 1557—1562 (1957).

In der Reiner-Rivlin'schen Theorie der nicht-newtonschen Flüssigkeiten, die durch einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen den Komponenten des Spannungs- und der zeitlichen Ableitungen des Deformationstensors definiert sind, wird die Frage nach den Eigenwerten und Eigenrichtungen des letzteren Tensors aufgeworfen und dafür notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben. Th. Seel.

Reiner, M.: The centripetal-pump effect in a vacuum pump. *Proc. roy. Soc. London, Ser. A* **247**, 152—167 (1958).

The paper presents experimental and theoretical studies on the centripetal-pump effect in an air vacuum pump. by means of an instrument which works as a centripetal air vacuum pump, designed under consideration of an elastico-viscous laminar air flow between stator and rotor plates, with tangential and cross-stresses (theory of the elastico-viscosity of air). The relation between D (thickness of the air bearing formed during rotation, which maintains a gap between the stator and rotor plates) and the speed of rotation was determined for different weights of the rotor. The results are interpreted in the light of Maxwell's theory of elastico-viscosity of air, which is in qualitative accordance with experimental data. For quantitative study, the observations and measurements made are not enough fine, and therefore not yet sufficient to prove the above mentioned hypothesis of elastico-viscosity. It is planned to continue researches in both theoretical and experimental directions. M. Lates.

Hu, Hai-chang: On two variational principles about the natural frequencies of elastic bodies. *Sci. Sinica* **7**, 298—312 (1958).

Es sei ω eine Eigenkreisfrequenz eines Hookeschen Körpers, (u, v, w) der Verschiebungsvektor, (σ, τ) der Spannungstensor. Ferner sei $V(\sigma, \tau)$ die spezifische Verzerrungsenergie, ρ die Dichte und es werde $\sigma = \omega^2 \bar{\sigma}$, $\tau = \omega^2 \bar{\tau}$ gesetzt. Dann ergeben sich die Eigenkreisfrequenzen als Extrema des Quotienten

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{\iiint \rho (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz}{\iiint V(\bar{\sigma}, \bar{\tau}) dx dy dz},$$

falls die Gleichgewichtsbedingungen und die Randbedingungen für die Spannungen erfüllt sind; die Randbedingungen für die Verschiebungen und die Verträglichkeitsbedingungen brauchen nicht erfüllt zu sein. Das Verfahren wird zur Ermittlung der Grundschwingungszahl eines Biegestabes und auf die schwingende Platte angewandt. Bei dem zweiten Variationsprinzip, das Verf. angegeben hat, brauchen die Spannungen und Verformungen von vornherein keine Bedingungen zu erfüllen: das zum Minimum zu machende Funktional ist so allgemein angesetzt, daß sich die Gleichgewichtsbedingungen usw. aus der Minimalforderung ergeben. Dieses Prinzip wird zur Begründung der Biegeschwingungstheorie von Timoschenko und einer Näherungstheorie für schwingende Platten angewandt, die von Ufliand und Mindlin angegeben wurde. A. Weigand.

Vodička, Václav: A class of problems on longitudinal vibrations. *Quart. appl. Math.* **16**, 11—19 (1958).

Es wird der Einschaltvorgang für die Längsschwingungen eines dünnen Stabes untersucht, der aus n Teilen von verschiedener Dichte (ρ_k) und verschiedenem E -Modul (E_k) besteht. Die Rechnung, bei der die Laplace-Transformation benutzt wird, läßt sich nur für den Sonderfall $E_k \rho_k = \text{const.}$ übersichtlich durchführen.

Folgende Beispiele werden behandelt: 1. Vertikal hängender Stab. Unteres Ende zur Zeit $t = 0$ plötzlich freigegeben. 2. Vorgespannter Stab mit Endmasse. Zur Zeit $t = 0$ plötzlich freigegeben. 3. Stoß zweier Stäbe, die sich mit der Geschwindigkeit v gegeneinander bewegen.

A. Weigand.

Moskvitin, V. V.: Elastisch-plastische Schwingungen ebenen Fachwerks. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 12, Nr. 3, 13—22 (1957) [Russisch].

The author presents the problem of vibrations of a plane frame considering and plastic deformations of certain bars. The frame is treated as a mechanical system with many degrees of freedom. The masses of bars are reduced on adjacent joints (m_i) thus the system has $2n$ degrees of freedom, where n is the number of the joints. The governed system of differential equations of plane motion is $m_i \ddot{\vec{q}}_i = \sum \vec{S}_{ik} - \vec{Q}_i(t)$, where \vec{q}_i is the generalized displacement of the i 'th joint (i. e. $q_i = x_i$ or y_i); \vec{S}_{ik} is the internal force in the bar (l_{ik}) and $\vec{Q}_i(t)$ the generalized external force acting on joint (i). The expressions for the dilatations and the stresses are deduced. The solution is supposed in the form of harmonic motion. It is shown that the frequencies of the free vibrations of the system with plastic deformations of certain bars are smaller than those obtained in the case of elastic system. The increase of the amplitudes is possible, but simultaneously one appears and damping. As an example a frame of five bars is analysed.

D. Rašković.

Beljaeva, G. M.: Anwendung der Störungstheorie auf das Problem der Schwingungen eines Balkens. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 12, Nr. 1, 11—21 (1957) [Russisch].

The problem of vibrations of a light beam carried with concentrated masses is very important in technical praxis (by the determination of critical velocities of axial compressor). The problem of a homogeneous beam with equal masses is reduced to the finite-differences equation of the fourth order with constant coefficients. But if a beam is nonhomogeneous and carried with different masses the problem becomes more difficult. In this case, following Courant-Hilbert's scheme [Methods of Mathematical Physics, Vol. I (s. this Zbl. 53, 28)], the author uses the theory of perturbations to obtain the eigenvalues and eigenvectors of the finite-differences equation with variable coefficients. One treats a straight line simply supported beam with the supports on the ends of beam carried with several masses. The amplitude equation is given in matrix form $(A - \lambda B) \{\vec{x}\} = 0$ where $\{\vec{x}\} = \{M_i\}$ is the amplitude vector of bending moments in adjacent points. Using the results of the homogeneous beam with same supports the author uses above method of perturbation. The problem of a free beam is discussed also as the problem of a simply supported beam. Two examples are given. The proof of convergency of the process of successive approximations is given.

D. Rašković.

Herrmann, G. and I. Mirsky: On vibrations of conical shells. J. Aero-Space Sci. 25, 451—458 (1958).

Es werden die Schwingungen biegesteifer kegelmuffförmiger Schalen für kleine Kegelwinkel untersucht, wobei für die Komponenten des Verschiebungsvektors eines Schalenpunktes die üblichen Annahmen gemacht werden. Für die an den Rändern freie Schale wird ein Ritz-Ansatz gemacht, der eine Determinantenbedingung für die gesuchten Eigenfrequenzen liefert. Ein Grenzübergang zur Zylinderschale liefert die streng gültige Frequenzgleichung für diese. Das allgemeine Ergebnis wird für $\alpha = 5^\circ; 10^\circ; 15^\circ$ ($\alpha =$ halber Kegelwinkel) numerisch ausgewertet. Schließlich werden noch die Bewegungsgleichungen der schwingenden Kegelschale aus dem Hamiltonschen Prinzip abgeleitet. Da sie sich nicht durch tabellierte Funktionen integrieren lassen, wird auf ihre numerische Untersuchung verzichtet.

A. Weigand.

Katsonov, A. M.: Die Fortpflanzung sphärischer thermo-visco-elastischer Störungen. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 12, Nr. 3, 39—49 (1957) [Russisch].

The treated problem is as follows: from a viscoelastic space which is in a starting moment ($t = 0$) in rest is cut up the sphere (of radius a) and in this moment acts on a sphere the constant pressure ($p_0 = \text{const}$) under a temperature ($T_0 = \text{const}$), then is necessary to determine the distribution of the stresses. The governed equations of motion in cylindrical coordinates are

$$\partial \sigma_r / \partial r + 2(\sigma_r - \sigma_\theta) / r = \rho \partial^2 u / \partial t^2; \quad \partial^2 T / \partial r^2 + 2r^{-1} (\partial T / \partial r) = k^{-1} (\partial T / \partial t)$$

with boundary conditions (for $r = a$ and $r = \infty$) and the initial conditions (for $t = 0$, there are $\varphi = 0$, $\partial \varphi / \partial t = 0$, $T = 0$). The second equation is solved by means of operational method. For the determination of originals the product theorem is used.

D. Rašković.

Kalandija, A. I.: Ein ebenes Problem vom Hertzschen Typus über das Zusammendrücken zylindrischer Körper. Soobšćenija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR 21, 3—10 (1958) [Russisch].

L'A. utilise la méthode des fonctions de variable complexe et les résultats de N. I. Muschelisvili pour faire certaines considérations sur le problème de contact entre deux corps cylindriques. On suppose un état de déformation plane et on donne un exemple complet de calcul.

P. P. Teodorescu.

Bollenrath, F. und A. Troost: Der axiale plastische Stoß. Z. Flugwiss. 6, 193—198 (1958).

Übersicht: Die Ausbreitung plastischer Dehnungswellen in langen Stäben unter axialer Zug- oder Druckbeanspruchung wird nach der üblichen Theorie besprochen. Anschließend werden Gültigkeitsgrenzen und Erweiterungsmöglichkeiten dieser Theorie aufgezeigt.

Zusammenfassg. der Autoren.

Hydrodynamik:

Nardini, Renato: Sulla formula risolutiva di un particolare problema della magneto-idrodinamica. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser. 5, 11—19 (1957).

Dans un travail antérieur [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 20, 457—462, 591—596 (1956)], l'A. avait étudié l'action mutuelle entre les phénomènes magnéto-hydrodynamiques et les phénomènes acoustiques dans un fluide compressible et électriquement conducteur. La présente Note contient une forme de la formule résolutive du problème, plus apte à l'interprétation physique.

Dan Gh. Ionescu.

Gheorghita, Șt. I.: Problemele d'hydrodynamique relativi la pexterior d'un cilindru demi-circular. An. Univ. C. I. Parhon București, Ser. Ști. Natur. Nr. 13, 15—24, russ. und französ. Zusammenfassg. 24—25 (1957) [Rumänisch].

La représentation conforme du demi-plan $y > 0$, dont on retranche l'ensemble des points pour lesquels $x^2 + y^2 \leq R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, sur le demi-plan $\text{Im}\{t\} > 0$ avec la correspondance des points frontières $z = 0$, $t = 0$; $z = R$, $t = 1$; $z = \infty$, $t = \infty$, permet à l'A. de traiter simplement les problèmes suivants: a) écoulement potentiel acyclique plan d'un fluide incompressible autour d'un demi-cercle dont le diamètre est normal à la vitesse à l'infini; b) écoulement potentiel acyclique autour du même obstacle, la vitesse à l'infini étant parallèle au diamètre; c) écoulement cyclique autour du demi-cercle, la vitesse à l'infini étant donnée; d) percussion verticale d'un cylindre demi-circulaire à moitié plongé dans un fluide; e) rotation d'un cylindre demi-circulaire en fluide illimité, l'axe de rotation étant la génératrice passant par le milieu du diamètre du demi-cercle de base. Tous ces problèmes se ramènent soit au problème de Dirichlet soit à celui de Volterra-Signorini pour le demi-plan, compte tenu des propriétés de symétrie des configurations considérées.

C. Iacob.

Darrieus, Georges: Le flux d'énergie en mécanique: Application aux turbomachines. *Z. angew. Math. Phys.* 9b, Festschrift Jakob Ackeret 225—232 (1958).

Le travail est consacré à l'extension de la notion de flux d'énergie introduite par Poynting en électrodynamique, et à l'application de cette notion dans la mécanique des fluides parfaits. L'A. partage le flux d'énergie en deux parties. La première est assurée par le transport d'énergie localisée (l'énergie interne et l'énergie cinétique). La seconde partie est due au travail effectué par des forces de volume distribuées de manière quelconque au sein du fluide et doit être considérée comme transmise à travers la matière indépendamment de son déplacement. L'étude des propriétés de flux d'énergie permet à l'A. d'éclairer plusieurs phénomènes que l'on observe, par exemple, dans le cas d'une grille d'aubes mobiles à grande vitesse spécifique.

C. Woronetz.

Belechova (Belekhova), N. G.: Taking account of three dimensionality of flow around turbine runner. *Vestnik Leningradsk. Univ.* 13, Nr. 1 (Ser. Mat. Mech. Astron. 1) 88—107, engl. Zusammenfassg. 107 (1958) [Russisch].

The paper presents an approximative method for calculation of flow in radial-axial turbines with given geometry and shape of turbine vanes, under assumption of frictionless incompressible fluid. The absolute flow in turbine is considered non-stationary and irrotational, discharge and angular velocity of runner are constant. The solution is based on a scheme proposed by S. V. Vallander and on substitution of integration of equation:

$$(\partial^2\varphi/\partial\xi^2) + (\partial^2\varphi/\partial\vartheta^2) - (\delta^2(\xi)/\delta(\xi)^2) (\partial\psi/\partial\xi) = 0$$

with: φ the velocity potential; ψ the stream function on the twodimensional stream surface; δ the variable thickness of the fluide layer between two closely spaced flow surfaces. and ξ, ϑ the adimensional coordinates; by integration of Euler-Darboux equation.

M. Lates.

Noll, Walter: On the rotation of an incompressible continuous medium in plane motion. *Quart. appl. Math.* 14, 317—319 (1957).

Eine nichtvisköse Flüssigkeit bekommt durch die Bewegung starrer, zylindrischer Körper (in einem fingierten Gefäß von unendlicher Ausdehnung) eine (rotationsfreie) Bewegung. Bezeichnet man diese Bewegung mit I und fügt ihr eine gleichförmige Rotation um eine Achse bei, die senkrecht steht zu jener Ebene, in der sich die Bewegung des Mediums abspielt (Bewegung II), so sind die durch Bewegung II entstehenden Spannungen nur durch einen skalaren Spannungsausdruck unterschieden von den durch I entstehenden Spannungen. Dieser Satz von G. I. Taylor (1916) wird ausgedehnt auf Körper von nichtzylindrischer Begrenzung (endliche Anzahl glatter Kurvenstücke).

E. Hardtwig.

Wood, W. W.: The asymptotic expansions at large Reynolds numbers for steady motion between non-coaxial rotating cylinders. *J. Fluid Mechnics* 3, 159—175 (1957).

Das Ziel dieser Arbeit ist, an einer nichttrivialen Lösung der vollständigen Navier-Stokesschen Gleichungen, die Grenzschichtcharakter hat, die Möglichkeit von höheren Näherungen der Grenzschichttheorie zu untersuchen. Aufbauend auf die bekannte Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen für die laminare Strömung zwischen zwei konzentrischen rotierenden Kreiszylindern, die unabhängig von der Zähigkeit ist und damit keinen Grenzschichtcharakter besitzt, untersucht Verf. die Strömung für den Fall exzentrischer Zylinder. Die Stromfunktion wird in der Form $\psi = \sum_n \psi_n \gamma^n$ angesetzt, wobei γ ein Maß für die Exzentrizität der Zylinder ist. Von dem so entstehenden linearen Gleichungssystem für die ψ_n wird im wesentlichen nur die Gleichung für ψ_1 betrachtet, das sich explicit angeben läßt. Es wird gezeigt, daß sich ψ_1 in der Form $\psi_1 = \sum_n \psi_1^{(n)} \gamma^{n/2}$ entwickeln läßt. Mit diesem Ansatz wird in die ursprüngliche Gleichung eingegangen. Da sich außerdem zeigen läßt, daß der zu ψ_1 gehörende Wirbelvektor ζ_1 außerhalb einer wandnahen Schicht mit hin-

reichender Genauigkeit konstant wird, entsteht auf diese Weise ein System von Grenzschnittgleichungen 1. und höherer Ordnung für die $\psi_1^{(n)}$. Allerdings handelt es sich dabei um eine sehr spezielle linearisierte Form der Grenzschnittgleichungen, denn die Entwicklung nach γ , also nach kleiner Exzentrizität, bedeutet ja physikalisch, daß der Einfluß der Zähigkeitskräfte, der im Falle konzentrischer Zylinder verschwindet, von vornherein klein bleibt. Dennoch bedeutet diese Arbeit einen wichtigen Beitrag zu dem bisher noch wenig behandelten Gebiet der höheren Näherungen der Grenzschnittgleichungen. *G. Jungclauss.*

Taylor, Geoffrey and P. G. Saffman: Effects of compressibility at low Reynolds number. *J. aeronaut. Sci.* **24**, 553—562 (1957).

In der Mitte des Luftspalts zwischen zwei eng benachbarten Platten, von denen die eine sehr schnell rotierte, beobachtete M. Reiner (Researches on the physics of air viscosity, Techn. Rep., Haifa 1956) einen Überdruck bis zu $1/2$ Atmosphäre und schloß daraus auf die Ungültigkeit des Stokesschen Reibungsgesetzes für Luft. Verff. zeigen, daß sich die von Reiner beschriebenen Effekte auch aus den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen erklären lassen, wenn man gewisse Unvollkommenheiten der verwendeten Apparaturen annimmt; ausführlich diskutiert werden hauptsächlich zwei Fälle: 1. wenn die beiden Platten nicht genau senkrecht zur Rotationsachse stehen und 2., wenn die rotierende Platte parallel zur Drehachse vibriert. In einem inkompressiblen Medium erzeugen zwar beide Störungen keine Drucksteigerung, doch liefert die Berücksichtigung der Kompressibilität der Luft trotz der kleinen Machzahl ($< 0,05$ (!)) mittlere Drucksteigerungen in der Größenordnung der beobachteten. Je exakter das beschriebene Gerät ausgeführt wird, um so größer (!) kann dieser Effekt werden. — Analog dazu sorgt bei Lagern mit Luftschmierung die Kompressibilität der Luft dafür, daß sich wellige und rauhe Oberflächen abstoßen. *K. Nickel.*

Dryden, Hugh L.: Gegenwartsprobleme der Luftfahrtforschung. Zweite Ludwig Prandtl-Gedächtnis-Vorlesung. *Z. Flugwiss.* **6**, 217—233 (1958).

Lehnigk, Siegfried: Die strukturelle Stabilität der Bewegung von Flugzeugen. *Z. Flugwiss.* **6**, 110—115 (1958).

Bei linearen flugmechanischen Stabilitätsproblemen treten oftmals charakteristische Polynome auf, deren Koeffizienten von veränderlichen Parametern abhängen. Von Interesse ist hierbei der Fall, daß ein charakteristisches Polynom als Summe von zwei Polynomen mit variablen Parametern strukturell gegeben ist. Es wird die Frage behandelt, ob es in diesem Falle gelingt, einen dynamisch instabilen Flugzustand allein durch geeignete Wahl der Beträge der Parameter zu stabilisieren. Ein Existenzsatz für Stabilitätsgebiete für strukturell gegebene Polynome spezieller Art wird formuliert. An Hand zweier flugmechanischer Aufgaben aus dem Gebiete der Längsstabilität, deren Lösung anderweitig vielfach behandelt ist, wird die Bedeutung und Anwendung dieses Satzes erläutert. *G. Bock.*

Young, A. D. and S. Neumark: Das Herauskommen eines Flugzeugs aus einem Sturzflug mit hoher Geschwindigkeit. *Jahrbuch 1956 der Wiss. Ges. Luftfahrt* 98—112 (1957).

Die Berechnung der Bewegung eines Flugzeuges beim Herausnehmen aus dem Sturzflug ist dadurch erschwert, daß sich während der Abfangbewegung einmal die Luftkraftbeiwerte des Flugzeuges infolge Änderung der Machschen Zahl, zum zweiten die Luftdichte infolge Abnahme der Höhe ändern. Es ist daher im allgemeinen nicht möglich, für die Gleichungen dieser Bewegung eine geschlossene Lösung anzugeben. Im vorliegenden Falle wird angenommen, daß das Flugzeug sich im senkrechten Sturzflug befindet und ein plötzlicher Höhenruderausschlag gegeben wird, der während des Abfangvorganges konstant bleibt. Die 3 Differentialgleichungen der Längsbewegung werden schrittweise für 3 Beispielflugzeuge, für die eingehende Meßergebnisse bis in den hohen Unterschall vorliegen, integriert. Die Bewegung

besteht aus einer schnell abklingenden Anstellwinkelschwingung und einer Bewegung des Flugzeugschwerpunktes auf einer gekrümmten Bahn. Für diese beiden Bewegungen werden Näherungslösungen aufgezeigt, deren Ergebnisse mit den durch schrittweise Integration gefundenen Resultaten verglichen werden. *G. Bock.*

Fraeys de Venbeke, Baudouin: *Méthodes variationnelles et performances optimales en aéronautique.* Bull. Soc. math., Belgique 8, 136—157 (1957).

Das Auffinden optimaler Flugprogramme ist eine Aufgabe der Variationsrechnung, die in der letzten Zeit mehrfach behandelt wurde. In der vorliegenden Arbeit wird die gestellte Aufgabe durch Einführung der Lagrange-Multiplikatoren als ein Problem von Mayer formuliert und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Extremallösung gefunden. In der Arbeit wird das Problem von Mayer in Parameterdarstellung entwickelt. Die entwickelte Parameterdarstellung wird auf einen Flugkörper, der sich in einer vertikalen Ebene bewegt und der der Schwerkraft und den Luftkräften unterworfen ist, angewendet. Dabei wird gezeigt, daß eine Anzahl von Optimalproblemen durch Integration desselben Systems von Differentialgleichungen nur durch Änderung der Randbedingungen lösbar sind. Für den Fall des lotrechten Aufstieges einer Rakete mit vorgeschriebener Anfangs- und Endhöhe, sowie vorgeschriebener Anfangs- und Endgeschwindigkeit ohne Beschränkung der Zeit, werden für das optimale Brennprogramm Ergebnisse gewonnen, wie sie schon aus Arbeiten anderer Autoren bekannt sind. Die Extremallösung wird aus drei Arten von Teilbögen zusammengesetzt, nämlich solchen, die schubfrei, die mit veränderlichem Schub und die mit maximalem Schub durchflogen werden.

G. Bock.

Günter, Siegfried: *Betrachtungen zum Reichweitenverlust beim Kurvenflug.* Z. Flugwiss. 6, 10—15 (1958).

Betrachtet wird der stationäre Kurvenflug von Flugzeugen; die zur Durchführung der Kurve aufzuwendende Antriebsarbeit wird berechnet. Daraus folgt der Brennstoffverbrauch in der Kurve, der als Reichweitenverlust darstellbar ist. Der Reichweitenverlust wird für eine 360° -Kurve, für den geschlossenen Flug um 2 Punkte und für eine Kurve mit beliebiger Richtungsänderung ermittelt. Einige Betrachtungen über den instationären Kurvenflug werden angeschlossen. Die Untersuchungen werden vor allem mit Rücksicht auf den Flug mit Überschallgeschwindigkeit durchgeführt und die Ergebnisse an 2 Beispielen erläutert.

G. Bock.

Sretenskij (Sretensky), L. N.: *On the theory of gas jets.* Doklady Akad. Nauk SSSR 119, 1113—1114 (1958) [Russisch].

L'A. démontre que l'équation bien connue de Čaplygin, déterminant la fonction de courant d'un mouvement permanent plan d'un gaz parfait, admet des solutions autres que celles trouvées par Čaplygin. Les résultats obtenus sont ensuite appliqués à l'étude d'un problème se rapportant à l'écoulement d'un gaz par un ajustage.

C. Woronetz.

Filimon, Ioan: *Sur le mouvement plan, subsonique, autour d'un obstacle donné.* C. r. Acad. Sci., Paris 244, 2133—2135 (1957).

La détermination de l'écoulement subsonique, plan, irrotationnel, permanent d'un gaz autour d'un obstacle lorsque le gaz obéit à la loi de compressibilité de S. A. Čaplygin, revient à la résolution d'une équation fonctionnelle non linéaire, ce qui permettra d'obtenir la représentation conforme de l'extérieur de l'obstacle de l'écoulement incompressible associé sur l'extérieur du cercle $|\zeta| = 1$. L'A. met cette équation fonctionnelle sous une forme convenable et en cherche la solution par un développement en série suivant les puissances d'un paramètre lié au nombre de Mach du courant non perturbé. L'approximation d'ordre zéro étant obtenue, pour les approximations suivantes on est conduit au problème mixte: déterminer $F(\zeta) = P + iQ$, holomorphe dans $|\zeta| > 1$, continue sur la frontière $\zeta = e^{i\sigma}$, $0 \leq \sigma \leq 2\pi$, où l'on doit avoir $dQ/dn = u(\sigma)P + v(\sigma)Q + w(\sigma)$, $u(\sigma)$, $v(\sigma)$, $w(\sigma)$ étant des

fonctions continues données. Dans les cas usuels, par exemple pour l'obstacle elliptique, ce problème se ramène à l'intégration d'une équation différentielle linéaire.

C. Jacob.

Busemann, Adolf: Aus- und Eintrittsstöße an Schaufelgittern. Z. angew. Math. Phys. 9b, Festschrift Jakob Ackeret 191—202 (1958).

Verf. untersucht die kompressible Strömung im Spalt zwischen zwei Schaufelkränzen bei axialer Durchströmung. Es werden die Gleichungen und qualitativen Bilder der Aus- und Eintrittspolaren diskutiert und der Weg skizziert, wie daraus eine günstige Anpassung zwischen Aus- und Eintritt bestimmt werden kann. Bemerkenswert ist, daß auch eine Überschallströmung im Spalt Unterschallverhalten zeigt, sofern ihre axiale Komponente im Unterschallbereich liegt. Anschaulich erklärt Verf. dieses Verhalten dadurch, daß er den um einen Zylinder, also die Turbinen- oder Kompressorachse, aufgewickelten Machschen Kegel betrachtet. Bei axialer Unterschallgeschwindigkeit liegt dann ein Punkt in seinem eigenen Einflußbereich. Sprachliche und stilistische Unklarheiten erschweren das Verständnis dieser Arbeit.

G. Jungclauss.

Krasil'shikova (Krasil'shehikova), E. A.: A finite span wing of symmetric profile in a compressible flow. Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 51—54 (1958) [Russisch].

Betrachtet wird die Bewegung eines dünnen Flügels endlicher Spannweite beim Anstellwinkel $\alpha = 0$ in kompressibler Strömung. Die Grundbewegung des Flügels sei eine gradlinige Translationsbewegung, die mit veränderlicher Geschwindigkeit vor sich gehen kann. Die Grundrißform des Flügels sei beliebig, seine Oberfläche symmetrisch zu seiner Bewegungsebene. Der Grundbewegung werden Schwingungsbewegungen überlagert, bei denen sich die Oberfläche des Flügels verformt. Die Schwingungsbewegungen verlaufen dabei so, daß die Symmetrie gegenüber der Bewegungsebene des Flügels gewahrt bleibt. Für den Fall der Bewegung mit konstanter Unterschall- und Überschallgeschwindigkeit wird die Lösung in Form eines Integrals angegeben. Beispiele werden nicht durchgerechnet.

G. Bock.

Patraulea, N. N.: Deux généralisations du problème de l'aile au volet fluide. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. 2, Nr. 1, 29—38 (1957).

Kurzbericht über zwei Arbeiten des Verf.. Stationäre Strömung eines inkompressiblen und reibungsfreien Mediums a) um einen ∞ langen dünnen Blasflügel und b) um einen ∞ dünnen Blasflügel endlicher Spannweite mit elliptischer Auftriebsverteilung, ersetzt durch das Profil im Mittelschnitt. Eine konforme Hilfsabbildung auf den Halbkreis derart, daß das Profil in den Durchmesser, der Strahl in den Halbkreisumfang übergeht, soll beide Probleme der numerischen Behandlung zugänglich machen. Beispiele werden nicht gegeben.

K. Nickel.

Rausch, W.: Untersuchungen über die Luftwiderstände von körnigen und staubförmigen Gütern im Luftstrom. Ingenieur-Arch. 26, 319—332 (1958).

● **Schlichting, Hermann:** Grenzschicht-Theorie. (Wissenschaftliche Bücherei.) 3. erweiterte u. neubearb. Auflage. Karlsruhe: Verlag G. Braun 1958. XV, 603 S. 374 Abb., 32 Tab.

Die erste Auflage dieses Werkes erschien 1951 (dies. Zbl. 43, 398), die unveränderte zweite Auflage bereits 1954 (dies. Zbl. 58, 201), und 1955 eine englische Übersetzung „Boundary Layer Theory“ mit mehreren Ergänzungen und Neufassungen (dies. Zbl. 65, 189). Daß nun schon eine dritte deutsche Auflage erforderlich geworden ist, spricht beredt für die hohe Qualität des Buches und für das weite und aktuelle Interesse, das in aller Welt dem Gegenstand entgegengebracht wird. Der Verf. hat das Werk nun einer gründlichen Neubearbeitung unterzogen. Bedenkt man, daß jährlich etwa 100 Arbeiten zur Grenzschichttheorie erscheinen, so nimmt es nicht wunder, daß die Verarbeitung der Fortschritte der letzten 7 Jahre zu einer Umfangserhöhung des Bandes um 120 Seiten geführt hat. Die klare Gliederung, die im wesent-

lichen unverändert geblieben ist, und die meisterhafte Darstellung vermitteln jedoch trotz des beachtlichen Umfangs in vorbildlicher Weise eine Übersicht über Erkenntnisse und Methoden der Theorie unter ständiger Kontrolle durch das Experiment. Obwohl das Buch sich in erster Linie an den Ingenieur wendet und daher die mathematische Problematik und die gerade in den letzten Jahren auf Teilgebieten wesentlich vorgedrungene mathematische Strenge unberücksichtigt läßt, bietet es auch dem interessierten Mathematiker auf Schritt und Tritt wertvolle Anregungen. Unter den Erweiterungen sind besonders hervorzuheben der starke Ausbau des in der ersten Auflage zu kurz gekommenen Kapitels über kompressible laminare Grenzschichten und des zweiten der beiden Kapitel über den Umschlag laminar-turbulent. Die wertvollen Literaturverzeichnisse sind bei mehreren Kapiteln und am Schlusse des Bandes angewachsen und wieder auf den neuesten Stand gebracht. Der Verlag hat dem auch um ca. 80 Bilder bereicherten Band wieder große Sorgfalt in der Ausstattung angedeihen lassen. Das Werk stellt in der internationalen Literatur zur Strömungsforschung das Standardwerk über Grenzschichttheorie dar. Allein nach dem Umfang des bewältigten Stoffes stellt es eine ganz ungewöhnliche Leistung dar. Die Neuauflage wird erneut dazu beitragen, die Sonderstellung dieses Buches zu festigen.

H. Görtler.

Görtler, Henry und Hermann Witting: Einige laminare Grenzschichtströmungen, berechnet mittels einer neuen Reihenmethode. *Z. angew. Math. Phys.* 9b, Festschrift Jakob Ackeret 293—306 (1958).

Von dem ersten Verf. ist kürzlich für die Berechnung der stationären, ebenen, inkompressiblen laminaren Grenzschicht eine neue Reihenentwicklung angegeben worden, die ein wesentlich besseres Konvergenzverhalten zeigt als die bekannte Blasiusche Reihe. Diese neue Reihe wird hier an mehreren weiteren Beispielen erprobt, u. a. auch für die Grenzschicht am Kreiszylinder. Dabei wird im allgemeinen befriedigendes Konvergenzverhalten festgestellt mit Ausnahme der nächsten Umgebung des Ablösungspunktes.

H. Schlichting.

Sparrow, E. M.: The thermal boundary layer on a non-isothermal surface with non-uniform free stream velocity. *J. Fluid Mechanics* 4, 321—329 (1958).

Es handelt sich um die naheliegende Übertragung der vom Ref. (dies. Zbl. 80, 396, 1. Referat) entwickelten allgemeinen Reihenmethode zur Berechnung inkompressibler laminarer Geschwindigkeitsgrenzschichten auf die Berechnung der Temperaturgrenzschichten in solchen Strömungen bei recht allgemeiner Temperaturverteilung längs der überströmten Wandkontur und bei der vereinfachenden Annahme konstanter Stoffwerte. Wesentlich ist auch bei dieser Übertragung die Zurückführung des Problems auf die ein- für allemal zu leistende Vertafelung universeller Funktionen mit dem Erfolg, daß danach die Anwendung in jedem Einzelfall mit einem sehr geringen numerischen Aufwand und in elementarer Weise geleistet werden kann. Ref. muß darauf hinweisen, daß etwa gleichzeitig mit der vorliegenden Arbeit eine Veröffentlichung von E. Wrage erschienen ist [DVL-Bericht Nr. 81 (1958)], in der das gleiche Problem umfassend behandelt und im Gegensatz zur vorliegenden Arbeit sogar unter Berücksichtigung von Dissipation und Kompressionswärme gelöst wird.

H. Görtler.

Depassel, Roger: L'écoulement de l'air à grande vitesse dans un tuyau de section circulaire. *C. r. Acad. Sci., Paris* 246, 1800—1803 (1958).

On étudie l'écoulement dans la couche limite laminaire, en utilisant comme principe de base la méthode donnée par E. Gruschwitz [Office nat. Etudes Rech. aéronaut., Publ. no. 47 (1950)] pour le cas plan. Le problème est ramené à l'intégration du système $dM/d\xi = q(M, \lambda)$, $d\lambda/d\xi = \psi(M, \lambda)$. Les fonctions $M(\xi)$ et $\lambda(\xi)$ étant déterminées par l'intégration de ce système, les autres grandeurs intéressantes se déduisent facilement: en particulier on obtient le coefficient de frotte-

ment et l'épaisseur de la couche limite. On constate une concordance suffisante au moins pour les nombres de Mach modérés, avec les résultats obtenus par d'autres auteurs.

Dan Gh. Ionescu.

Miles, John W.: On the velocity profile for turbulent flow near a smooth wall. *J. aeronaut. Sci.* **24**, 704 (1957).

Es wird die Geschwindigkeitsverteilung für turbulente Strömung nahe der Wand mit Hilfe des Mischungswegansatzes von Prandtl berechnet. Der Mischungsweg wird dabei zu $l = \kappa(y - y_0)$ angenommen. Verf. ist offenbar entgangen, daß Rechnungen unter den gleichen Voraussetzungen und mit gleichen Ergebnissen von B. Hudimoto [Trans. Japan Soc. Mech. Engin. **7**, 29 (1941)] und dem Ref. (s. dies. Zbl. **38**, 115) durchgeführt wurden.

J. Rotta.

Maeder, Paul F. and Hans U. Thommen: On the boundary layer at perforated walls. *Z. angew. Math. Phys.* **9b**, Festschrift Jakob Ackeret 438—453 (1958).

Verf. betrachtet das Problem der Grenzschicht bei durchlöcherten Wänden, die besonders bei Meßstrecken transonischer Windkanäle zur Anwendung gelangen. Die Größe der Löcher bzw. die Breite der Schlitzte ist klein im Verhältnis zur Dicke der Wandgrenzschicht, aber doch noch genügend groß, so daß der Druckverlust der Strömung durch die Wand vernachlässigbar ist und sich eine freie turbulente Mischungsschicht ausbildet. In einer gewissen Entfernung von der Wand, aber noch inmitten der Grenzschicht, kann ein Mittelwert für die von den einzelnen Löchern ausgehenden Störungen angenommen werden. Dies ermöglicht die mathematische Einführung einer Durchschnittsströmung mit einer imaginären Durchschnittsrandbegrenzung als Ersatz für die durchlöchernde Wand. Für die turbulente Vermischungszone wird Ähnlichkeit angenommen und die Veränderliche $\eta = y \cdot \sqrt{U}$ eingeführt. Die turbulente Mischungslänge wird proportional der Mischungszonenlänge angesetzt. Die Grenzschichtgleichungen werden durch Einführung einer Stromfunktion auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduziert. Es werden Ausdrücke für die austretende Flüssigkeitsmenge und für die Durchschnittsschubspannung und Geschwindigkeit an der Ersatzwand ermittelt als Funktion der Breite der turbulenten Vermischungszone η_1 an der durchlöchernden Wand. Die Durchschnittsschubspannung ergibt sich aus der Schubspannung der offenen Strahlvermischung bei den Löchern und der Schubspannung der Wandteile. Diagramme ermöglichen die Bestimmung von η_1 und der durch die Wand strömenden Flüssigkeitsmenge. Experimentelle Untersuchungen wurden in einem subsonischen Windkanal und Wänden mit Transversalschlitzten und Löchern durchgeführt. Die Messungen ergaben ähnliche Geschwindigkeitsprofile, die von theoretischen abweichen, während Verdrängungs- und Impulsverlustdicke gut übereinstimmen.

P. Čolak-Antić.

Drazin, P. G.: The stability of a shear layer in an unbounded heterogeneous inviscid fluid. *J. Fluid Mechanics* **4**, 214—224 (1958).

Bei zwei mit verschiedener Geschwindigkeit horizontal übereinander strömenden Flüssigkeiten bildet sich infolge der Flüssigkeitsreibung eine Zwischenschicht mit allmählicher Geschwindigkeitsänderung aus, die aber instabil gegenüber kleineren Störungen ist. Der Einfluß einer Dichteschichtung auf die Stabilität einer derartigen laminaren Zwischenschichtströmung wird an einem vereinfachten Modell untersucht. Es wird angenommen, daß die Dichte exponentiell nach oben abnimmt. Die Geschwindigkeitsverteilung wird durch die Beziehung $U = U' \tanh(y/d)$ angenähert, wobei also $2 U'$ der Geschwindigkeitssprung ist und das Koordinatensystem so gewählt ist, daß die obere Flüssigkeit die Geschwindigkeit $-U'$ und die untere die Geschwindigkeit $+U'$ hat. Die spezielle Wahl des Geschwindigkeitsprofils ermöglicht es, die bereits von G. I. Taylor und S. Goldstein (1931) abgeleitete Stabilitätsgleichung auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit vier außer wesentlichen Singularitäten zu transformieren. Wegen der Antimetrie des Geschwindigkeitsprofils kann das Stabilitätskriterium ohne spezielle Kenntnis der allgemeinen

Lösung der Gleichung aufgestellt werden. Es läßt sich nämlich zeigen, daß eine kleine periodische Störung der Wellenzahl λ nicht angefacht wird, wenn die Richardsonzahl $J = \lambda^2 (1 - \lambda^2)$. Daraus folgt, daß die Strömung für alle Wellenzahlen stabil ist, wenn die Richardsonzahl > 1.4 , ein Ergebnis, das bereits für das einfachere Modell von S. Goldstein (1931) gefunden wurde. *W. Wuest.*

Jain, P. C.: On Chandrasekhar's theory of turbulence. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A **23**, 504—513 (1958).

In der vorliegenden Arbeit wird die Turbulenztheorie von S. Chandrasekhar (dies. Zbl. **64**, 437) auf den Fall der achsensymmetrischen Turbulenz verallgemeinert. Es ergeben sich acht Differentialgleichungen für die acht definierenden Skalarfunktionen der Zweifach- und Dreifach-Korrelationstensoren. Zwei dieser Gleichungen entsprechen den 1950 von Chandrasekhar auf der Grundlage seiner älteren Theorie abgeleiteten Gleichungen. *W. Wuest.*

● **Carafoli, Elie:** High-speed aerodynamics (compressible flow). London and New York: Pergamon Press 1957. 702 p. 100 s. net.

Vgl. die Besprechung des Originals in diesem Zbl. **73**, 203.

Nonweiler, T. R. F.: The sonic flow about some symmetric half-bodies. J. Fluid Mechanics **4**, 140—148 (1958).

The author solves the approximate Tricomi equation

$$w^2 \Omega_{ww} + \frac{7}{6} w \Omega_w + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{6}\right) \Omega_\xi + \xi (1 - \xi) \Omega_{\xi\xi} = 0,$$

by separation of variables, where

$$w = \frac{4}{9} u^3 + v^2, \quad \xi = \frac{v^2}{w} = 1 - \frac{4}{9} \frac{u^3}{w}, \quad U = a^* \left(1 - \frac{u}{\gamma + 1}\right), \quad V = \frac{v}{\gamma + 1} a^* \text{ with } u \geq 0.$$

The symmetric flow patterns obtained by this hodograph method are shown to correspond about half-bodies, whose ordinates vary as x^n , $0.4 \leq n < 1$, x being the distance along the plane of symmetry. The body of $x^{2.5}$ bears the sonic surface velocity, except at nose, where an edgeforce causes a drag C_D . By a reasonable assumption he presents the drag C_D of an airfoil. His numerical factor is 1.89, instead of 1.20 (Helliwell and Mackie, this Zbl. **78**, 402). *Tan. Okubo.*

Driest, Edward R. van: On the aerodynamic heating of blunt bodies. Z. angew. Math. Phys. **9b**, Festschrift Jakob Ackeret 233—248 (1958).

Es wird der Wärmeübergang bei stumpfen Körpern für Überschallgeschwindigkeiten betrachtet. Näherungslösungen für die Staupunktzone für laminare und turbulente Grenzschichten werden erörtert. Ein Kriterium für die Re-Zahl des Umschlages der Rohrströmung wird auf die Staupunktströmung übertragen und der Rauigkeitseinfluß abgeschätzt. Näherungsausdrücke für die Geschwindigkeiten im sublamina ren und turbulenten Teil der Grenzschicht mit Ausblasen oder Absaugen werden ermittelt und ein Ausdruck für die Dicke der sublamina ren Grenzschicht angegeben. Ausdrücke und Diagramme für die Reibungs- und Wärmeübertragungskoeffizienten der Staupunktzone werden angegeben für die ebene Platte (mit Ausblasen und Absaugen), für die Kugel und den Zylinder (mit Ausblasen). Die Verminderung der Erwärmung des Körpers mit turbulenter Grenzschicht durch Ausblasen wird erörtert. *P. Čolak-Antić.*

Legendre, Robert: Écoulement supersonique autour d'une aile Δ à bords d'attaque subsoniques. C. r. Acad. Sci., Paris **245**, 889—891 (1957).

L'écoulement supersonique autour d'une aile Δ à bords d'attaque subsoniques a fait l'objet des recherches de plusieurs auteurs en utilisant le passage au plan de Busemann et la réduction à un problème de Dirichlet dans un domaine annulaire. L'A. donne une expression directe du potentiel de perturbation $q(x_1, x_2, x_3)$, qui vérifie l'équation $\beta^2 \varphi_{x_1 x_1} - \varphi_{x_2 x_2} - \varphi_{x_3 x_3} = 0$, sous la forme

$$\Phi = \operatorname{Re} \left\{ \sum_1^\infty \Phi_n [f_n(\lambda)] \right\}.$$

où $f_n(\lambda)$ est une fonction analytique de la variable

$\lambda = (2i)^{-1} \ln [\{(x_2 + ix_3)/(x_2 - ix_3)\} \cdot \{(x_1 - R)/(x_1 + R)\}]$, avec $R = \sqrt{x_1^2 - \beta^2(x_2^2 + x_3^2)}$, Φ_n étant l'opérateur défini par

$$\Phi_n[f(\lambda)] = i R^{2n-1} \partial^n [f(\lambda)/R] / \partial x_1^n.$$

Au moyen de cette représentation, on donne l'expression de la composante normale de la vitesse de perturbation w sous forme de série $\sum_1^\infty Q_n(f_n) x_1^{n-1}$, dont les coefficients s'obtiennent par quadratures dès que w est connu sur l'aile de forme donnée. Ce procédé évite l'emploi des conditions de compatibilité. C. Iacob.

Zel'dovič (Zel'dovich), Ja. B. (Ja. B.): Shock waves of large amplitude in air. Soviet Phys., JETP 5, 919—927 (1957). Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. 32, 1126—1135 (1957).

Bei starken Stoßwellen in gewöhnlicher Luft (Ausgangszustand p_0 , T_0 ; Endzustand ohne Index) werden folgende Stärkebereiche unterschieden: teilweise Dissoziation ($200 < p/p_0 < 600$; $5000^\circ < T < 10000^\circ$), teilweise Ionisation ($10^3 < p/p_0 < 4.5 \cdot 10^5$; $1 \text{ eV} < kT < 100 \text{ eV}$); vollständige Ionisation ($kT > 100 \text{ eV}$). Hier werden der zweite und dritte Bereich behandelt. Auf numerischen Rechnungen beruhende Näherungsformeln werden angegeben für Beziehungen zwischen Stoßwellengeschwindigkeit und Druck, Temperatur, Dichte, Ionisationsgrad hinter der Stoßwelle. — Zur Ermittlung der Frontstruktur wird auf die Strahlungsdiffusions-Näherung verzichtet (vgl. dagegen z. B. Sen und Guess, dies. Zbl. 79, 409). Strahlungsdichte U und Strahlungsstrom S treten als zusätzliche Größen gegenüber der gewöhnlichen Gasdynamik auf. Nach Einführung eines über alle Frequenzen gemittelten Opazitätskoeffizienten κ sowie einer vereinfachenden Annahme über die Richtungsverteilung der Strahlung ergeben sich gewöhnliche Differentialgleichungen, die ausführlich diskutiert werden. Die Strahlungsfront (von einer Tiefe $\sim \kappa^{-1}$) wird durch die schmale eigentliche Stoßzone (mit Unstetigkeit für p und q) in eine Vorwärmzone und einen heißen Bereich geteilt. Verf. kritisiert eine Arbeit (Prokof'ev, s. dies. Zbl. 58, 238), die bei gleichen Voraussetzungen zu einer stetigen Frontstruktur kommt (wie auch Sen und Guess). — An der Stoßzone, die bezüglich des Elektronengases Unterschallgeschwindigkeit hat, ist die Iontemperatur T_i unstetig, T_e aber stetig; davor ist $T_e > T_i$, dahinter $T_e < T_i$. In der Stoßzone treten hohe Feldstärken auf. — Die auf der kalten Seite optisch wahrnehmbare Temperatur durchschreitet mit zunehmender Stoßstärke ein Maximum (infolge Abschirmung durch die Vorwärmzone), die abgestrahlte Energie ist stets relativ geringfügig. — Vgl. auch folgendes Referat. F. Wecken.

Rajzer (Raizer), Ju. P. (Ju. P.): On the structure of the front of strong shock waves in gases. Soviet Phys., JETP 5, 1242—1248 (1957), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. 32, 1528—1535 (1957).

Verf. wendet die Theorie von Zel'dovič (vorsteh. Referat) auf folgendes Modell an: $p = q RT$; $\gamma = 1.25$; $p_0 \approx 0$; Strahlungsdruck und Elektroneneffekte vernachlässigt. $x = 0$ ist Sprungstelle für p, q, T ; $x > 0$ die Vorwärmzone, Zustand 0

bzw. 1 bei $x \rightarrow +\infty$ bzw. $-\infty$. Die optische Tiefe $\tau = \int_0^x \kappa dx$ dient als Koordinate, q_0 und die Stoßwellengeschwindigkeit D sind gegeben. — Die Frontstruktur ergibt sich durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen, worin ein einziger dimensionsloser Parameter $A \sim \sigma T_1^{4/3} (q_0 D^3) \sim \sigma D^5 / (q_0 R^4)$ eingeht. Analytisch gewonnene Näherungen für $A < 1$ und $A > 1$ sind bis nahe an $A = 1$ heran brauchbar. — Bei $A < 1$ nimmt nach beiden Seiten die Abweichung von den Endzuständen (Index 0 bzw. 1) ab wie $\exp(-\tau/\sqrt{3})$. — Bei $A > 1$ gibt es einen Punkt $\tau_k > 0$, wo $T = T_k$, $(T_1/T_k)^3 = A$. T_k ist wenig veränderlich ($T_k \sim T_1^{1/6}$);

$T_k \approx 300000^\circ$ für Luft. Für $\tau > \tau_k$ ist die Struktur ähnlich wie im Falle $A < 1$. Bei $\tau = 0$ springt T von $T(+0) \approx T_1$ auf $T(-0) \approx (3 - \gamma) T_1$ und erreicht dann schnell den Endwert T_1 . — Im frühen Stadium einer nuklearen Explosion stellt sich nicht der beschriebene stationäre Stoßwellentyp ein, sondern eine instationäre „thermische Welle“ (nach Zel'dovič und Kompaneets, 1950), die freilich an ihrer Front dem $\tau \sqrt{3}$ -Gesetz folgt.

F. Wecken.

Kanwal, R. P.: Determination of the vorticity and the gradients of flow parameters behind a three-dimensional unsteady curved shock wave. Arch. rat. Mech. Analysis 1, 225—232 (1958).

The author introduces the surface metric $g_{\alpha\beta}$ to the coordinates taken along shock wave and solves the equations of balance, assuming the dissipative mechanism as absent. The vorticity behind the shock is thus formulated, and he points out that for steady or pseudo-steady shocks neither the energy equation nor the equation of state is necessary for determining the vorticity behind the shock. Also in parallel propagation when the normal to the shock is steady, the flow behind it remains irrotational. He states further that the geometrical and kinematic condition of compatibility due to Thomas (s. this Zbl. 36, 264) can be simply obtained even up to its extended figure by this method.

Tan. Okubo.

Guiraud, Jean-Pierre: Sur la méthode de choc-détente. C. r. Acad. Sci., Paris 245, 1778—1780 (1957).

Eggers und Syvertson [Technical Note 2646; 2811, Nat. Advisory Committee Aeronaut., Washington (1952); inzwischen ersetzt durch Report 1123 (1953) bzw. 1249 (1955)] haben einen Parameter η angegeben, der unmittelbar hinter der Stoßfront in einer ebenen Überschallströmung im allgemeinen klein ist, so daß man in erster Näherung $\eta = 0$ setzen kann. Verf. stellt η durch die Bestimmungsstücke der Strömung dar und untersucht, wann im ganzen Strömungsfeld $\eta \ll 1$ ist. Wenn z. B. das Verhältnis der Profilkrümmungen für zwei beliebige Punkte des Profils von der Größenordnung 1 ist, impliziert $\eta \ll 1$ neben der Bedingung $\eta \ll 1$ längs der Stoßwelle (Eggers und Syvertson) die weitere, daß die rechtslaufenden Charakteristiken die Stoßwelle wesentlich flacher schneiden müssen als die linkslaufenden. *C. Heinz.*

Ray, G. Deb: An exact analytic solution of equations for an explosion with spherical symmetry. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A 23, 420—429 (1957).

In Verallgemeinerung einer Methode von J. L. Taylor (s. dies. Zbl. 64, 207) findet Verf. eine Homologielösung in geschlossener Form für die Punktexplosion in einem vollkommenen Gas ($c_p/c_v = \gamma$), dessen Zustand vor der Stoßfront durch $\varrho_0 \sim r^\alpha$ ($-3 < \alpha \leq 0$), $p_0 \sim r^{-3}$, $u_0 = 0$ gegeben ist. An der Stoßfront ($R \sim t^{2/(5+\alpha)}$) sind die Stoßbeziehungen für beliebige konstante Stoßstärke (Machzahl M) exakt erfüllt. Die Gravitation ist vernachlässigt. Die Gesamtenergie ist konstant. α, γ, M sind unabhängig wählbar. Für ein Beispiel ($\alpha = -2,5$, $\gamma = 5/3$, $M = 10$) werden Zahlenwerte im Bereich $R \geq r \geq 0,4R$ angegeben. — In gleicher Weise wird die analoge Lösung für den zylindersymmetrischen Fall (mit $p_0 \sim r^{-2}$) gewonnen (kein Zahlenbeispiel). — Anm. des Ref.: Nur unter zusätzlichen Bedingungen (wenn überhaupt) ist die Lösung für $R \geq r > 0$ regulär. Das angegebene Beispiel wird singulär bei $r/R \approx 0,262$.

F. Wecken.

Kulonen, G. A.: Interaction of a shock wave with a boundary layer by a leading edge of a flat plate at high supersonic speeds with a radiation. Vestnik Leningradsk. Univ. 13, Nr. 7 (Ser. Mat. Mech. Astron. 2), 172—188, engl. Zusammenfassg. 188 (1958). [Russisch].

Untersucht wird der gegenseitige Einfluß eines Verdichtungsstoßes und der laminaren Grenzschicht in der Nähe der Vorderkante einer ebenen Platte beim Anstellwinkel $\alpha = 0$ für das hypersonische Gebiet. Dabei wird angenommen, daß der Wärmeaustausch zwischen Plattenoberfläche und Umgebung durch das Stephan-Boltzmannsche Gesetz bestimmt ist. Die Wärmeleitfähigkeit der Platte und die

Strahlung des strömenden Gases selbst wird nicht berücksichtigt. Die Prandtlsche Zahl wird als beliebig angenommen. Die Lösung des Problems wird mit Hilfe eines Näherungsverfahrens unter Benutzung der Impulsgleichung der Grenzschicht gesucht. Folgende Beispiele werden durchgerechnet: 1. $h = 20$ km; $Pr = 0,71$; $M_1 = 10$; 2. $h = 20$ km; $Pr = 0,71$; $M_1 = 15$. Der Einfluß der Strahlung auf die Temperatur der Platte, auf den Reibungskoeffizienten und auf das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht wird gezeigt.

G. Bock.

Chang, C. T.: On unsteady interaction between a weak thermal layer and a strong plane oblique shock. J. aeronaut. Sci. 25, 317—323 (1958).

Grundströmung: stationäre zweidimensionale Überschallströmung eines reibungsfreien idealen Gases längs einer Wand mit konkaver Ecke (kleiner Knickwinkel). Störströmung: zweidimensionaler Keil aus heißem Gas mit konstanter Temperatur längs der Wand, mit der Grundströmung mitschwimmend. Betrachtet wird die instationäre Wechselwirkung zwischen dem von der Ecke ausgehenden Stoß und der heißen Gasmasse unter der Annahme kleiner Störungen. Das lineare Störungs-glied p des Drucks genügt dann der Differentialgleichung

$$(+)\quad r^2(r^2 - 1)p_{rr} - r(2r^2 - 1)p_r = p_{\theta\theta},$$

dabei sind r, θ dimensionslose Polarkoordinaten in einem mit der Grundströmung mitbewegten Koordinatensystem. Die Gleichung (1) ist hyperbolisch außerhalb und elliptisch innerhalb der Schallgrenze $r = 1$. Zu einer qualitativen Untersuchung des Strömungsfelds wird (+) für $r > 1$ auf die Wellengleichung und für $r < 1$ auf die Laplacesche Differentialgleichung transformiert. Diskussion der Randbedingungen.

K. Nickel.

Campbell, I. J. and A. S. Pitcher: Shock waves in a liquid containing gas bubbles. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 243, 534—545 (1958).

Das Gemisch einer inkompressiblen Flüssigkeit (Dichte $\varrho_0 = 1/V_0$, spezifische Wärme c_0) mit Bläschen eines vollkommenen Gases [$c_{vg}(\gamma_g - 1) = R/M_g$] im Massenverhältnis $1:\mu$ ($\mu \ll 1$) wird unter Voraussetzung des Temperaturgleichgewichtes als thermodynamisch einheitliche Substanz behandelt. Diese folgt einer Abelschen Zustandsgleichung $p(V - b)/T = R/M = (\gamma - 1)c_v$ mit $b = V_0/(1 + \mu)$, $M = M_g(1 + \mu)/\mu$, $\gamma - 1 = (\gamma_g - 1)\mu/(\chi + \mu)$, $\chi = c_0/c_{vg} \gg \mu$. Stoßwellen lassen sich ähnlich wie bei idealem Gas behandeln [vgl. H. Richter, Bericht 31/47 Lab. Rech. St. Louis (1947)]. Wegen $\gamma - 1 \ll 1$ treten Vereinfachungen ein, insbesondere bei Reflexion und Begegnung von Stoßwellen. Die Blasengröße beeinflusst die Fronttiefe. — An einem Wasser-Glycerin-Gemisch mit Luftblasen werden theoretische Aussagen über Stoß- und Verdünnungswellen experimentell

F. Wecken.

Argyris, J. H. and S. K. Kelsey: Structural analysis by the matrix force method with applications to aircraft wings. Jahrbuch 1956 der Wiss. Ges. Luftfahrt 78—98 (1957).

Die Arbeit bildet eine Ergänzung zu einer weiteren ähnlichen Inhaltes (vgl. dies. Zbl. 78, 380). Hier wird vor allem die sogenannte Kraftmethode unter noch engerer Anlehnung an die im Flugzeugbau auftretenden Aufgaben ausführlich beschrieben. Insbesondere werden nochmals die Methoden zur Behandlung von Ausschnitten und modifizierten Systemen entwickelt. Das Verfahren wird an einem ausführlich durchgeführten Zahlenbeispiel — Berechnung eines einfachen Tragflügels — erläutert.

R. Zurmühl.

Nardini, Renato: Sulla mutua azione fra fenomeni acustici ed idromagnetici. J. Math. Mech. 7, 1—15 (1958).

Nel presente lavoro si prosegue lo studio di casi che presentano mutua influenza fra fenomeni magneto-idrodinamici e fenomeni di tipo acustico. Si introducono per prima cosa le equazioni del problema relativo ad un fluido compressibile, perfetto,

omogeneo, isotropo ed elettricamente conduttore, soggetto ad un campo magnetico primario assegnato che, rispetto ad un sistema di coordinate cilindriche, abbia solo componente trasversa e sia dotato di simmetria cilindrica: come caso particolare tale campo magnetico è ottenibile, notoriamente, mediante una corrente elettrica continua che percorra un filo illimitato disposto lungo l'asse delle coordinate. Si ricavano poi le corrispondenti equazioni linearizzate contenenti solo grandezze del prim'ordine. Esaminando il caso in cui la conducibilità elettrica del mezzo possa ritenersi infinita, si rileva la possibilità di onde di tipo acustico che si propagano con velocità che è tanto superiore a quella delle comuni onde sonore, quanto più intenso è il campo magnetico primario: tali onde (longitudinali) sono accompagnate da onde idromagnetiche (transversali) che si propagano con uguale velocità. Si rileva la possibilità che l'accennata variazione nella velocità del suono possa raggiungere un'entità sufficiente da far sperare in un controllo sperimentale. Se si passa al caso della conducibilità elettrica finita, non è possibile alcun fenomeno di propagazione ondosa, però, ricavate le opportune equazioni linearizzate, se ne considerano delle soluzioni di tipo sinusoidale e si dimostra che sono possibili, in generale, due modi di propagazione della velocità di fase, accompagnati da assorbimento. In particolare, esaminando dei casi limite, si rileva come, a bassa frequenza, le dette soluzioni sinusoidali tendano ad avvicinarsi a quelle ottenute nel caso della conducibilità infinita, mentre, ad altra frequenza, tendono ad avvicinarsi a quelle ottenute nel caso di conducibilità nulla e cioè ad una netta separazione fra fenomeni di tipo acustico e quelli di tipo elettomagnetico. Da ultimo si rileva che, nell'ipotesi in cui la velocità delle comuni onde sonore u è molto piccola nei confronti della velocità delle onde elettomagnetiche, si può trascurare l'apporto della corrente di spostamento anche per frequenze molto elevate. Se poi si tratta il caso particolare in cui la velocità u è dello stesso ordine di grandezza della velocità w delle comuni onde magneto-idrodinamiche, allora le formule si semplificano, in modo da permettere immediatamente il calcolo esplicito della velocità di fase e del coefficiente di attenuazione.

Dan Gh. Ionescu.

Sherecliff, J. A.: Some generalizations in steady one-dimensional gas dynamics. *J. Fluid Mechanics* **3**, 645—657 (1958).

Bei der ebenen, stationär betrachteten Schallwelle sind die vier Größen $F = p + \frac{1}{2} \rho u^2$, $G = \rho u$, $H = h + u^2/2$ und s konstant. Sie sind für einheitliche Fluida (auch für makroskopisch homogene mehrphasige oder reagierende Gemische im mobilen Gleichgewicht) verknüpft durch $dF + \rho T ds = \rho dH + u dG$. Hält man bei einer stationären Fadenströmung irgend zwei jener vier Größen fest, so ergeben sich sechs Klassen von Prozessen, darunter isentropische Düsenströmung, Rayleighsche und Fannosche Prozesse. In jedem Falle sind die anderen beiden Größen an der Schallgrenze [$u^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$] als Funktionen von u Extrema, deren Charakter und physikalische Bedeutung durch die Bedingungen $(\partial V / \partial T)_p > 0$, $(\partial^2 p / \partial T^2)_s > 0$ festgelegt werden. Die Ableitungen nach u sind angegeben. — Analog werden, von der Newtonschen (isothermen) Schallwelle ausgehend, mittels F , G , T und $Z = H - Ts$ weitere Klassen definiert, wobei nun die „Newtonsche Schallgrenze“ ($u^2 = (\partial p / \partial \rho)_T$) und die Bedingung $(\partial^2 p / \partial V^2)_T > 0$ maßgebend sind. Andere Klassifikationen sind angedeutet.

F. Wecken.

Dressler, R. F.: Unsteady non-linear waves in sloping channels. *Proc. roy. Soc. London, Ser. A* **247**, 186—198 (1958).

The paper shows that the exact solution of the non-linear hydraulic equations of the unsteady two-dimensional flow of water in a straight open channel, for every non-degenerate unsteady water wave problem, can be obtained — neglecting hydraulic resistance — in terms of the complete elliptic integral of the second kind, E . By means of a non-Newtonian reference frame, every such wave problem for a sloping channel can be replaced by an associated problem for a horizontal channel. For the

latter, the partial differential equations become reducible and thus permit hodograph inversion. The Riemann integration method applied to the resulting Euler-Poisson equation yields an auxiliary function for these hydraulic problems, which is transformable into a Legendre function and then into the elliptic integral E . In particular, the procedure is applied to obtain the exact solution for the water wave in a sloping channel produced by sudden release of the triangular wedge of water (the reservoir) initially at rest behind a vertical wall. The behaviour of the solution is exhibited for convenience in two level-line charts, from data calculated to three decimal figures, and wave's shape and velocity distribution throughout it for several t values are shown.

M. Lates.

Kalašnikov (Kalashnikov), A. S.: On the first boundary value problem for equations expressing one-dimensional unsteady percolation. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 858—861 (1957) [Russisch]

In the theory of one dimensional unstationary percolation are encountered equations of the type $\partial u / \partial t = \partial^2 \varphi(u) / \partial x^2$ where $\varphi(u) > 0$, $\varphi'(u) > 0$, for $u > 0$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. The paper demonstrates the existence and singularity of a general solution of the first boundary value for the above mentioned equation in finite and half-finite domains, and four theorems are thereupon induced.

M. Lates.

Jakimov (Iakimov), Ju. L. (Yu. L.): Unsteady motions of incompressible fluid in narrow regions. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 1080—1083 (1957) [Russisch].

Twodimensional parallel unsteady potential motions with free level of incompressible fluid in a narrow flat horizontal canal are considered. The solution is based upon M. A. Lavrentiev's method for steady free level flow of incompressible fluid in narrow regions, using conformal mapping.

M. Lates.

Naumova, L. G.: Eine Anwendung der Methode der sukzessiven Approximationen auf die Lösung des Problems von N. E. Žukovskij über die Bewegung einer Flüssigkeit in einem Kanal geringer Tiefe. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 12, Nr. 5, 27—31 (1959) [Russisch].

Die Lösung des Problems der laminaren Bewegung einer Flüssigkeit in einem gekrümmten Kanal rechteckigen Querschnitts, die früher von Boussinesq gegeben und von Žukovskij verallgemeinert wurde, wird durch Anwendung sukzessiver Approximationen von den Reynoldsschen Gleichungen ausgehend, mit Hilfe der von Slězkin erarbeiteten Methode, erreicht. Die neue Lösung ist einfacher und bietet prinzipielle Möglichkeiten weiterer exakter Verarbeitung des Problems.

M. Lates.

Pochsrrarjan (Pokhsrarian), M. S.: On the extinction of transverse circulation. Doklady Akad. Nauk SSSR 119, 233—236 (1958) [Russisch].

Natural transverse circulation in river bends is gradually extincted on following linear sectors. The paper presents a study on the laws governing the extinction of transverse circulation for turbulent flow in rectilinear river sectors, downstream of bends. The results of the author's theoretical analysis are in qualitative and quantitative accordance with the existing experimental data, extinction conditions being dependent from canal geometry and roughness. In narrow and rough canals, transverse circulation is more rapidly extincted.

M. Lates.

Escande, Léopold: Remarque sur la stabilité des chambres d'équilibre ordinaires ou à montage Venturi. C. r. Acad. Sci., Paris 244, 148—149 (1957).

L'étude de la stabilité, compte tenu des hypothèses de linéarisation de Thoma, se ramène à l'étude d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Ceci permet aisément de donner en pratique la même condition de stabilité pour les systèmes oscillants ou apériodiques.

C. Iacob.

Jaeger, Charles: Sur la stabilité des systèmes de chambres d'équilibre. C. r. Acad. Sci., Paris 244, 562—564 (1957).

Soit un système de chambres d'équilibre placées en série le long du même

tunnel, les deux chambres étant de part et d'autre des turbines. Les équations régissant les oscillations du plan d'eau dans les deux chambres constituent un système différentiel linéaire du second ordre, à coefficients constants, qu'on peut réduire à une seule équation différentielle linéaire du quatrième ordre. On en tire les conditions de stabilité du système et l'on construit des diagrammes permettant de décrire les cas possibles en pratique.

C. Iacob.

Escande, Léopold: Systèmes complexes de canaux de fuite en charge. *C. r. Acad. Sci., Paris* **244**, 1425—1426 (1957).

L'A. précise la condition d'amortissement des déplacements dans le cas d'un système complexe de canaux de fuite en charge, protégé par une chambre d'équilibre commune.

C. Iacob.

Carry, Claude et Gabriel Chabert d'Hières: Compléments sur le calcul approché au troisième ordre d'un clapotis parfait monochromatique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **245**, 1377—1379 (1957).

En complétant les résultats de G. Chabert d'Hières [*C. r. Acad. Sci., Paris* **244**, 2474—2476, 2573—2575 (1957)] sur le clapotis parfait, on donne actuellement avec le même degré d'approximation, les formules décrivant le déplacement des particules fluides ainsi que l'expression de la pression.

C. Iacob.

Chabert d'Hières, Gabriel: Sur l'existence d'un potentiel des vitesses pour un clapotis parfait. *C. r. Acad. Sci., Paris* **246**, 1803—1806 (1958).

On démontre l'existence d'un potentiel de vitesses pour tout clapotis satisfaisant aux hypothèses suivantes: 1° périodicité du vecteur déplacement en t et x ; 2° existence d'un plan vertical le long duquel les déplacements sont verticaux.

Dan Gh. Ionescu.

Gheynei, Ali: Oscillations dans les cheminées d'équilibre à section variable. *C. r. Acad. Sci., Paris* **246**, 3223—3225 (1958).

On montre que, quelle que soit la forme de la cheminée d'équilibre, la stabilité des oscillations ne dépend que de la valeur S_0 , à condition que la fonction $S(x)$ soit continue et continûment dérivable, (S_0 étant la valeur de la section horizontale de la cheminée lorsque l'eau est en régime permanent, et $S(x)$ la section variable de la cheminée d'équilibre). On étudie également l'allure du mouvement et la rapidité des amortissements des oscillations en régime permanent.

Dan Gh. Ionescu.

Escande, Léopold: Manoeuvres rythmiques avec cheminée d'équilibre déversante en l'absence de pertes de charge. *C. r. Acad. Sci., Paris* **246**, 3558—3561 (1958).

Étude des oscillations engendrées par des manoeuvres rythmiques susceptibles de provoquer le déversement maximum, en négligeant les pertes de charge.

Dan Gh. Ionescu.

Oroveanu, T. et H. Pascal: Sur le mouvement d'un mélange compressible de liquide et de gaz à travers un milieu poreux. *Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl.* **2**, Nr. 1, 93—99 (1957).

On considère l'écoulement d'un mélange compressible, formé par une phase liquide et une phase gazeuse, à travers un milieu poreux homogène et isotrope. La phase gazeuse est partiellement dissoute dans la phase liquide et on suppose que le mélange possède une certaine homogénéité. On suppose encore la valabilité de la loi de Darcy. Les AA. décrivent mathématiquement cet écoulement, en employant une seule équation, à savoir (pour le cas stationnaire):

$$\nabla \cdot \left[\left(\varrho_l \frac{k_l}{\eta_l} + \varrho_g \frac{k_g}{\eta_g} \right) \nabla p \right] = 0$$

où ϱ_l , ϱ_g sont les densités, k_l , k_g les perméabilités, η_l , η_g les viscosités dynamiques du liquide, respectivement du gaz, et p la pression. Étude du cas particulier de l'écoulement plan-radial.

Dan Gh. Ionescu.

Slezkin, N. A.: Über die Strömung einer zähen Flüssigkeit mit freier Oberfläche und porösem Grund. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 12, Nr. 5, 3—5 (1958) [Russisch].

Es werden Strömungsbedingungen einer zähen Flüssigkeit mit freier Oberfläche und porösem Grund studiert. Unter der Annahme, daß die Reynoldssche Zahl niedriger ist als der kritische Wert, ausgehend von den bekannten Differentialgleichungen der Stationärströmung einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit und unter Berücksichtigung der Gravitationskräfte, werden die allgemeinen Gleichungen der orthogonalen Geschwindigkeitskomponenten gegeben. Gleichzeitig wird der Ausdruck der Depression der freien Oberfläche im Gebiete der Strömung auf porösem Grund sowie Länge der Strömungsstrecke, auf welche diese Strömung stattfindet, abgeleitet.

M. Lates.

Pilatovskij (Pilatovsky), V. P.: Definition and investigation of problems on the stability of liquid boundary shifts in a heterogeneous filtration stream. Ukrain. mat. Žurn. 10, 160—177, engl. Zusammenfassg. 177 (1958) [Russisch].

The paper presents a study of the problem of stability of plane shifts in the boundary of liquid separation in a filtration stream. The author derives a system of functional equations, determining unsettled shifts in the contact boundary between two liquids. Under assumption of a known law of motion of a contact boundary, a system of functional equations is induced, defining the first variation of the mentioned motion. The resulting equations are used for investigation of the stability of a plane parallel heterogeneous stream and criteria for stability and instability are found thereupon. These criteria coincide in the case of a stationary process with the „progressing“ and „non progressing“ criteria of stratum flooding, which have been obtained some years ago by the author, by means of hydraulic considerations.

M. Lates.

Gheorghitza, Stanislas I.: Sur le mouvement des fluides incompressibles dans les milieux poreux. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 2720—2722 (1958).

Le mouvement d'un fluide dans un milieu poreux peut être décrit dans le cas général (en tenant compte des termes non linéaires), sous la forme

$$(1) \quad \vec{v} = 0 \quad \text{pour} \quad |\text{grad } H| \leq K,$$

$$(2) \quad \vec{v} f(V) = -(1 - K/|\text{grad } H|) \text{grad } H, \quad \text{pour} \quad |\text{grad } H| > K,$$

où K est le modul du gradient limite au-dessous duquel le mouvement cesse d'exister, $V = |\vec{v}|$, et $f(V)$ est une fonction donnée, introduite en tenant compte de la non-linéarité du mouvement. Si $f(V) = k^{-1}$ et $K = 0$, on obtient la loi classique de Darcy. Il existera donc un domaine D^* du milieu poreux occupé par du fluide en repos. On raccorde les valeurs de H dans D avec celle de D^* , en exigeant la continuité de la pression à la traversée de la frontière S qui sépare D de D^* . En outre, on doit écrire les conditions aux limites classiques sur la frontière du domaine $D \cup D^*$. De (2) et de l'équation de continuité $\text{div } \vec{v} = 0$ on déduit l'équation satisfaite par H en D , mais on ne connaît pas l'équation vérifiée par H en D^* . On suppose: 1° H est harmonique dans D ; 2° H satisfait dans D^* à la même équation que dans D . On développe une théorie utilisant la seconde hypothèse.

Dan Gh. Ionescu.

Kislovskaja, M. D.: Zur Frage der Bewegung der Aufschwemmung fördernden Strömung. Izvestija Akad. Nauk TSSR 1958, Nr. 2, 3—10 (1958) [Russisch].

Es wird eine Methode zum Studium der Bewegung der Schwemmstoff fördernden Strömungen gegeben, mit besonderer Berücksichtigung der Lösungsmethodik hydrodynamischer Probleme der doppelphasigen Flüssigkeitsbewegung. Die vorgestellte Methodik besteht im allgemeinen aus: Feststellung der mechanischen Gleichungen im Einklang der physikalischen Bedingungen; Benutzung eines vereinfachten statistischen Gleichungssystems und aus ihrer angenäherten Lösung.

M. Lates.

Wärmelehre:

Callen, Herbert B.: Path distribution for irreversible processes. Phys. Review, II. Ser. 111, 367—372 (1958).

Im Anschluß an Kubo [J. phys. Soc. Japan 12, 570 (1957)] wird die Theorie der linearen dissipativen Systeme unter dem Einfluß äußerer Kräfte neu entwickelt.

Die Hamilton-Funktion des Systems wird zu $H = H_0 + \sum_{i=1}^n V_i(t) Q_i$ angenommen.

Die $V_i(t)$ sind intensive Parameter, bestimmt durch die Umgebung des Systems; die Q_i sind Funktionen der Koordinaten des Systems und spielen die Rolle von extensiven thermodynamischen Variablen. Die Dichtematrix $\varrho(t)$ für die Hamilton-Funktion H wird als Funktion der Zeit berechnet unter der Voraussetzung, daß für $t = -\infty$ die Dichtematrix ihren Gleichgewichtswert $\varrho_0 = e^{-\beta H_0} / \text{Spur}(e^{-\beta H_0})$ mit $\beta = 1/(kT)$ hat. Für die Mittelwerte der Q_i zur Zeit t ergibt sich dann eine Nachwirkungsdarstellung üblicher Art; die Symmetrie der Nachwirkungsmatrix läßt sich leicht beweisen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\tilde{Q}_i, t)$, daß das System zur Zeit t Werte \tilde{Q}_i der quantenmechanischen Operatoren Q_i annimmt, wird berechnet und es werden die Mittelwerte der \tilde{Q}_i und ihre Schwankungen bezüglich dieser Verteilung bestimmt.

J. Meixner.

Kästner, Siegfried: Zur Theorie der Relaxation. I. Die thermodynamischen Grundlagen und ihre mathematische Lösung. Ann. der Physik, VII. F. 1, 377—399 (1958).

Die Grundgleichungen der thermodynamischen Theorie der linearen Relaxationserscheinungen werden zusammengestellt unter Einschluß des Grenzfalles, daß einige Variable im Falle des Gleichgewichts verschwinden. Dieser Fall liegt zum Beispiel bei Flüssigkeiten vor, bei denen die Schubspannungen im Gleichgewicht verschwinden, gleich welches die Schubverformung ist. Einige spezielle Ausführungen betreffen die mechanische und die dielektrische Relaxation.

J. Meixner.

Selig, F.: Ebene Wärmeleitprobleme mit variablem Übergangskoeffizient. Z. angew. Math. Mech. 37, 281—282 (1957).

Il seguente problema ai limiti per l'equazione del calore $T_t = \Delta T$ in D , $T = 0$ per $t \rightarrow 0$, $T_n + hT = c$ sul contorno γ di D , essendo h e c funzioni continue del posto e del tempo, viene ricondotto alla risoluzione di un problema di conduzione del calore in tutto il piano, mediante l'introduzione di una conveniente distribuzione di sorgenti di calore, localizzate su γ . La soluzione di questo problema, in funzione della portata della distribuzione di sorgenti, viene accennata mediante una particolare trasformazione integrale. Si considerano i casi particolari di h funzione soltanto del posto e di h funzione soltanto del tempo (cfr. anche l'A. e. H. Fieber, questo Zbl. 77, 406).

G. Sestini.

Maslennikov, M. V.: Milne's problem with an arbitrary indicatrix. Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 895—898 (1958) [Russisch].

Das Problem der Ausbreitung von Strahlung in einem streuenden und absorbierenden Medium läßt sich nach Milne auf eine Integralgleichung zurückführen. Eine von Hopf gegebene Lösung dieser Gleichung ist nur anwendbar, wenn eine gewisse Funktion, die die Wahrscheinlichkeitsdichte der Streuung angibt, als Polynom darstellbar ist. Verf. gibt für den allgemeinen Fall Existenz- und Eindeigkeitsätze der Integralgleichung.

F. Schmeidler.

Ueno, Suetō: La méthode variationnelle pour les problèmes de transfert du rayonnement. Formation non cohérente d'une raie d'absorption dans le modèle Milne-Eddington. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 3415—3417 (1958).

In Anlehnung an die Methode von Huang [Astrophys. J. 117, 215—220 (1953)] werden analytische Ausdrücke für die Intensitätsschwächung bei inkohärenter Diffusion für das Milne-Eddington-Modell berechnet.

G. Wallis.

Ueno, Suetō: La méthode probabiliste pour les problèmes de transfert du rayonnement. Formation non cohérente d'une raie d'absorption dans le modèle Milne-Eddington. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 3593—3595 (1958).

Nachdem die exakten Lösungen der Transportgleichung für das Milne-Eddington-Modell unter der Annahme, daß die Planck-Funktion eine lineare Funktion der optischen Tiefe ist, bereits unabhängig von einer Reihe von Autoren angegeben wurden, wird jetzt durch Lösung einer stochastischen Integrodifferentialgleichung das Problem für den Fall gelöst, daß die Planck-Funktion durch ein Polynom n -ten Grades in der optischen Tiefe τ dargestellt wird. Für den Fall $n = 1$ ergeben sich mit den bisherigen Ableitungen übereinstimmende Resultate. *G. Wallis.*

Elektrodynamik. Optik:

● Hund, F.: Theoretische Physik. Eine Einführung. Band II: Theorie der Elektrizität und des Lichtes. Relativitätstheorie. 3. überarb. und ergänzte Aufl. des zweiten und dritten Bandes der „Einführung in die Theoretische Physik.“ Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1957. X, 364 S. mit 177 Abb. Ln. DM 29,40.

In questo secondo volume della ben nota opera in tre volumi di Fisica teorica, l'eminente fisico di Gottinga espone con insuperabile chiarezza i fondamenti della dottrina maxwelliana del campo elettromagnetico e prosegue per le classiche filiazioni dell'ottica fisica e della teoria della relatività speciale. L'A. ha voluto presentare i concetti e le leggi fondamentali della teoria seguendo lo stesso punto di vista di Maxwell e cioè muovendo dai campi statici ed elevando l'intera concezione fino ai campi rapidamente variabili. Anche se codesta veduta impedisce in un certo senso di cogliere simultaneamente i due processi fisici fondamentali di concatenazione delle grandezze elettriche e magnetiche in quell'armonica ed inscindibile unità che è apparsa per la prima volta al genio di Maxwell, è indubbio che essa abbia il merito di condurre per gradi alla conquista del concetto di campo come realtà fisica da parte di chi si proponga di interpretare l'evoluzione dei fenomeni elettromagnetici. L'A. ha curato con grande esattezza gli aspetti dimensionali delle grandezze elettromagnetiche e ha creduto giustamente di accennare alla costante fondamentale di Cohn che ha gli stessi diritti di ϵ_0 , μ_0 , c . L'A. ha abbandonato la convenzione di trattenere il 4π nelle equazioni del campo [seguita nella precedente edizione (v. questo Zbl. 42, 203) del suo trattato] trasferendo il 4π nelle espressioni delle leggi elementari (di Coulomb, di Biot-Savart, ecc.). *G. Lampariello.*

Kohler, Max: Invariante Flächen der Elektrodynamik. Z. Phys. 148, 443—453 (1957).

Mit dem Ziel, eine rein geometrische Interpretation des elektromagnetischen Feldes zu geben, wodurch auch wichtige Hinweise für die Entwicklung der einheitlichen Feldtheorien geliefert würden, wird die 4-dimensionale Elektrodynamik des Vakuums nach geometrisch deutbaren Elementen durchmustert. Der elektromagnetische Feldtensor wird dabei mit den sog. Plücker-Tensoren der Flächen-theorie 2-dimensionaler Flächen in höherdimensionalen Räumen in Verbindung gebracht. Insbesondere wird die Frage untersucht, ob die beiden zueinander senkrechten Ebenen, die nach Sommerfeld einem Sechservektor zugeordnet werden können, als Tangential- oder Normalebenen von Flächen im 4-dimensionalen Raum aufgefaßt werden können. Bei einer großen Klasse von Lösungen der Maxwellschen Gleichungen ist dies tatsächlich möglich. Durch diese Flächen mit invarianter Bedeutung werden die Lösungen der Maxwellschen Gleichungen schon weitgehend charakterisiert. Ausgiebig wird der praktisch wichtige Spezialfall untersucht, daß im ganzen Feld $\mathfrak{E} \otimes \mathfrak{B}$ verschwindet. Viele Betrachtungen sind auch für nichtlineare Feldtheorien gültig. *E. Schmutzer.*

Fritzsche, Gottfried: Grundlagen einer synthetischen Systemtheorie. II. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 7 (1957/58), 115—132 (1958).

Der vorliegende 2. Teil der Arbeit (Teil 1 vgl. dies. Zbl. 78, 183) behandelt den Zusammenhang zwischen den komplexen Nullstellen und Polen der rationalen Übertragungsfunktion eines elektrischen Netzwerks und seinem Einschwingverhalten. Grundlage der Betrachtungen ist die Laplacetransformation und die geometrische Deutung der Residuen. An Hand vieler Beispiele wird gezeigt, wie man die Nullstellen und Pole der Netzwerkfunktion wählen muß, wenn das Netzwerk aus einer gegebenen Eingangsfunktion eine zulässig vorgeschriebene Ausgangszeitfunktion machen soll. Die Ausgangszeitfunktion setzt sich bekanntlich aus gedämpften Sinusschwingungen zusammen. Der Verf. beschreibt u. a. ein Gerät, das mehrere gedämpfte Sinusschwingungen mit einstellbarer Frequenz und Abklingzeit und mit einstellbaren Anfangswerten auf dem Leuchtschirm eines Oszillographen zur Anzeige bringt. Die Arbeit ist auch in der Zeitschrift „Nachrichtentechnik“ 8, H. 4, 5, 6 und 7 (1958) abgedruckt.

W. Nonnenmacher.

Lupanov, O. B.: The synthesis of contact circuits. Doklady Akad. Nauk SSSR 119, 23—26 (1958) [Russisch].

Let $L_A(n)$ be the minimum number of contacts, sufficient for the realization of a certain function of n variables according to the method A . Let A be the Shannon's method utilising universal multipoles, B be Tovarov's method of cascades and C be the author's method: [Radiofizika Nr. 1 (1958)].

$$L_A(n) \geq L_B(n) \text{ and } L_B(n) \sim \alpha(n) 2^n/n, \text{ where } 2 \lesssim \alpha(n) \lesssim 4$$

$$L_C(n) > (1 + \varepsilon) 2^{n+1}/n \text{ (for arbitrary } \varepsilon > 0 \text{ and } n > n(\varepsilon)).$$

The author considers also in this work the method D to which corresponds:

$$L_D(n) \sim 2^n/n.$$

P. Constantinescu.

Fritzsche, Gottfried: Technische Netzwerkeigenschaften — funktionentheoretisch gesehen. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 7 (1957/58), 341—354 (1958).

Die Übertragungsfunktion eines linearen elektrischen Netzwerks mit konzentrierten Schaltelementen ist eine rationale Funktion der komplexen Frequenz $p = \sigma + j\omega$. Zeichnet man sich die Nullstellen und Pole dieser Funktion in der komplexen p -Ebene auf, so lassen sich Dämpfung, Phase, Gruppenlaufzeit und Einschwingverhalten des Netzwerks auf Grund einfacher geometrischer Beziehungen anschaulich deuten. Dämpfung und Phase sind miteinander über die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gekoppelt. Zur Veranschaulichung der rationalen Funktion benützt der Elektroingenieur auch gerne die Analogie mit dem ebenen elektrischen Strömungsfeld, bei dem an Stelle der Nullstellen und Pole nadelförmige Elektroden als Stromquellen anzusetzen sind. Die Arbeit ist auch in der Zeitschrift Nachrichtentechnik 8, H. 11 (1958) abgedruckt.

W. Nonnenmacher.

Doyle, Worthie: Lossless Butterworth ladder networks operating between arbitrary resistances. J. Math. Physics 37, 29—37 (1958).

Im Laufe der letzten zehn Jahre sind von mehreren Autoren explizite Formeln zur Berechnung der Schaltelemente von Reaktanzfiltern in Kettenschaltung angegeben worden für den Fall, daß die Übertragungsfunktion dieser Filter durch ein Potenzgesetz der Form $1 + (\omega/\omega_g)^{2n}$ oder durch ein Tschebyscheff-Polynom in ω/ω_g beschrieben wird. Ein strenger Beweis für die Gültigkeit der Formeln konnte meist nicht erbracht werden. Ein solcher Beweis wird hier für die Formeln des Potenzfilters, auch Butterworth-Filter genannt, gegeben, und zwar für den allgemeinen Fall, daß das Filter zwischen ungleichen ohmschen Widerständen betrieben wird. Der Beweis umfaßt auch die ausgearteten Fälle, daß einer der Widerstände unendlich groß wird oder verschwindet.

G. Bosse.

• **Herzog, Werner:** Oszillatoren mit Schwingungskristallen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1958. XI, 317 S., 284 Abb. DM 45,—.

Nachdem die Entwicklung von Oszillatoren mit Schwingkristallen einen ge-

wissen Abschluß gefunden hat, ist eine solche zusammenfassende Darstellung der Kristalloszillatoren und der schaltungstechnischen Möglichkeiten zur Erzielung höchster Konstanz sehr zu begrüßen. Durch die wohlüberlegte Aufteilung der Kapitel kann sich sowohl der Theoretiker als auch der mehr am praktischen Schaltungsaufbau interessierte Ingenieur das für ihn Wichtigste entnehmen. Der Praktiker kann von zahlreichen Beispielen von Oszillatoren mit Röhren und Transistoren ausgehend in den übrigen Kapiteln die notwendigen Definitionen und Formeln aufsuchen. Der Theoretiker findet in diesen Kapiteln neben einer allgemeinen Theorie der Oszillatoren — Differentialgleichung, komplexe Darstellung, Schwingkennlinie, Aktivitätsmaß, Performance Index und Amplitudenbegrenzung — die Vierpoltheorie des passiven und aktiven Vierpols und die Darstellung der Schwingungsbedingung mittels der Kettenmatrix und durch das Betriebsübertragungsmaß. Der aus der Phasensteilheit oder aus der Resonanzkurve des passiven Teiles eines Oszillators definierten Güte und der dadurch bedingten Frequenzkonstanz ist ein eigenes Kapitel gewidmet. Das Stabilitätskriterium nach Strecker-Nyquist wird allgemein abgeleitet und zur, innerhalb der Schwingungsgrenze möglichen, optimalen Bemessung der Schaltelemente herangezogen. Nach einer Diskussion der Möglichkeiten zur Veränderung der Resonanzfrequenz und der damit verbundenen Güteänderung schließt Verf. mit einem Vergleich zwischen Kristalluhren und den in neuester Zeit entwickelten Atomuhren.

H. Schließmann.

Bosma, H.: Two capacitive windows in a rectangular wave guide. Appl. sci. Research, B 7, 131—144 (1958).

Mit dieser Arbeit liefert Verf. einen Beitrag zur Untersuchung der Beeinflussung von Leiterwellen durch Unstetigkeiten. Betrachtet wird ein regulärer zylindrischer Wellenleiter von parallel zur (x, y) -Ebene liegendem rechteckigem Querschnitt, mit ideal-leitender Wandung, dessen Inneres aus homogenem isotropem und verlustlosem dielektrischem Material besteht. x, y, z sind rechtwinklige Koordinaten: die z -Achse ist mit der Achse des Wellenleiters identisch. Die Unstetigkeiten werden durch zwei parallel zur (x, y) -Ebene liegende, ideal-leitende, kapazitive Blenden von verschwindender Schirmdicke und mit je einer schlitzförmigen Öffnung, die symmetrisch zur halben Höhe des Wellenleiters in y -Richtung ist, dargestellt. Die Schlitzreize sind bzw. durch Geraden parallel zur x -Achse und durch die zur (y, z) -Ebene parallelen Wandungen ($x = 0$ und $x = a$) begrenzt und dürfen im übrigen voneinander verschiedene Öffnungsweiten haben. Da ferner zugelassen wird, daß der Abstand dieser Blenden voneinander klein (im Vergleich zur Wellenlänge im Leiter) ist, versagt die sonst in der Theorie der Übertragungsleitungen übliche Beschreibung der obwaltenden Verhältnisse durch äquivalente elektrische Kreise. Alle Feldgrößen werden als zeitlich periodisch veränderlich mit $\exp(-i\omega t)$ angenommen. Die einfallende Welle wird als TE_{01} -Welle vorausgesetzt, wobei der Wellenleiter einschließlich seiner Blenden als zylindrisch in x -Richtung aufgefaßt wird, so daß das gesamte elektromagnetische Feld durch einen einkomponentigen Fitzgeraldschen Vektor $\Pi^* = \Pi \mathbf{i}_x$ ausgedrückt werden kann, wo Π in gleicher Weise wie die einfallende Welle von x abhängt: $\Pi = q(y, z) \sin(\pi x/a)$. Die unbekannte Funktion $q(y, z)$ genügt der zwei-dimensionalen Wellengleichung

$$[(\partial^2/\partial y^2) + (\partial^2/\partial z^2) + k_0^2] \varphi = 0 \quad (k_0^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - (\pi/a)^2)$$

und gewissen Grenzbedingungen. Dadurch wird das räumliche Problem auf ein zwei-dimensionales zurückgeführt. Mit Hilfe des Greenschen Satzes und unter Berücksichtigung der Stetigkeit des elektromagnetischen Feldes in den Schlitzreizen werden zwei simultane Integralgleichungen für die Feldgrößen abgeleitet. Zur Berechnung der unbekannten Funktionen werden diese durch Fouriersche Reihen dargestellt und die Kerne approximiert. Diese Darlegungen sind eng verbunden mit einer Arbeit von J. W. Miles (s. dies. Zbl. 33, 231) und Methoden von J. Schwinn-

er. Nach Variablentransformation werden zwei unendliche Systeme von simultanen linearen algebraischen Gleichungen erhalten. Insbesondere werden für den Fall gleicher Öffnungsweiten approximative Formeln für Reflexions- und Durchlässigkeitskoeffizienten angegeben, deren numerische Werte mit Meßergebnissen gut übereinstimmen.

H.-J. Hoehnke.

Burg, F. A. W. van den: Transmission in a rectangular waveguide loaded with an arbitrary number of capacitive screens. Appl. sci. Research, B 7, 153—183 (1958).

Verf. überträgt die von H. Bosma (siehe vorstehendes Referat) durchgeführten Untersuchungen auf den Fall beliebig vieler symmetrischer Blenden. Danach werden diejenigen („Resonanz“-) Frequenzen spezieller Anordnungen näherungsweise berechnet, für welche volle Übertragung (Durchlässigkeitskoeffizient $T(z) = 1$) stattfindet. Die Ergebnisse werden ferner im Hinblick auf die von Bosma festgestellten Bandfiltereigenschaften des Systems diskutiert. — Druckfehler: Auf S. 155 ist in dem Ausdruck für Π die Größe b durch a zu ersetzen. Auf S. 168 scheint in Gleichung (68) z_0 durch z_s ersetzt werden zu müssen, ebenso auf S. 169 in Gleichung (69) $\exp(2j h_0 z)$ durch $\exp(2j h_0 z_0)$. Statt des Ausdrucks (71) des Verf. wäre Ref. eher geneigt, $-j a_0^{(s)} \exp(-j h_0 z_s)$ als Ausdruck für $T(z)$ zu betrachten, der, im Gegensatz zum Reflexionskoeffizienten $R(z)$, von z nicht abhängt.

H.-J. Hoehnke.

Bresler, A. D., G. H. Joshi and N. Marcuvitz: Orthogonality properties for modes in passive and active uniform wave guides. J. appl. Phys. 29, 794—799 (1958).

Die Bestimmung der „Fourier-Koeffizienten“ der modalen Darstellung der Lösung von Erregungs- und Diskontinuitätsproblemen für aktive oder passive reguläre elektromagnetische Wellenleiter [Form- und Größe des zur z -(Leiter-)Achse senkrechten Leiterquerschnitts S ist z -unabhängig] durch ein vollständiges System von Eigenvektoren (wave modes) erfordert die Kenntnis der Orthogonalitätseigenschaften der Eigenvektoren. Für die Eigenlösungen eines passiven regulären Wellenleiters mit idealleitender Wandung, anisotropem nicht-dissipativem Medium ($\epsilon^{T*} = \epsilon$, $\mu^{T*} = \mu$; Erklärung unten!) und z -unabhängigen dyadischen Materialcharakteristiken ϵ, μ , hat L. R. Walker [J. appl. Phys. 28, 377 (1957)] eine derartige Relation aufgestellt, die nun von Verff. in der vorliegenden fundamentalen Arbeit verallgemeinert wird, so daß sie für reguläre Wellenleiter mit z -unabhängigen ϵ, μ und mit dissipativem anisotropem Medium, für offene Wellenleiter, für Wellenleiter mit einer Kombination folgender Randbedingungen: (a) elektrische Wand $\nu \times E = 0$ auf s (E Elektrisches Feld, s Wandung des Wellenleiters, ν äußere Normale an s , \times vektorielles Produkt), (b) magnetische Wand $\nu \times H = 0$ auf s (H magnetisches Feld), (c) „geschlossene“ anisotrope Wand $\tau E = \tau H = 0$ auf s (τ Tangente an s), (d) Impedanz-Wand $E = \mathfrak{Z} \cdot H \times \nu$ auf s (\mathfrak{Z} Impedanz-Dyade in s) —, sowie für Wellenleiter mit longitudinalem Elektronenstrahl z -unabhängiger Gleichstromgeschwindigkeit gilt. Verff. schreiben die Maxwell'schen Gleichungen

$$\omega \epsilon E - \nabla \times (i H) = 0, \quad -\nabla \times E + \omega \mu (i H) = 0$$

es mit dem Faktor $\exp(-i \omega t)$ (ω reell) zeitlich periodischen elektromagnetischen Feldes zur Bestimmung der über $\exp(i \kappa_z z)$ von z abhängigen Eigenlösungen ϵ, H , als lineare Operatorgleichung (1) $(\mathfrak{L} - \kappa_z \Gamma_z) \Phi = 0$ wo Φ , der Spaltenvektor $\{E_\alpha, i H_\alpha\}$,

$$\mathfrak{L} = \omega \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \nabla_t \times \mathbf{1} \\ \nabla_t \cdot \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_z = \begin{pmatrix} 0 & i z_0 \times \mathbf{1} \\ i z_0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

der transversale Gradienten-(Nabla-) Operator. z_0 der axiale Einheitsvektor und (δ_{jk}) die Einheitsdyade (δ_{jk} Kroneker-Symbol) ist. Dadurch entsteht ein Eigenwertproblem mit den Eigenvektoren Φ , den zugehörigen Eigenwerten κ_z , dem „Gewichtoperator“ Γ_z und einer Kombination der Randbedingungen (a)–(d) für Φ , durch welche das Definitionsgebiet des Operators \mathfrak{L} festgelegt wird. Diese

Auffassung gestattet die Anwendung bekannter Resultate der Spektraltheorie linearer Operatoren, wenn man gemäß

$$(2) \quad (\Phi_\beta, \Phi_\alpha) = \iint^{(S)} [E_\beta^* E_\alpha + (i H_\beta)^* (i H_\alpha)] dS$$

(* konjugiert-komplexer Wert!) das hermitesche innere Produkt der Elemente Φ_β, Φ_α einführt, auf das sich die Definitionsgleichung $(\Phi^\dagger, \mathfrak{L} \Phi) = (\mathfrak{L}^\dagger \Phi^\dagger, \Phi)$ des zu \mathfrak{L} adjungierten Operators \mathfrak{L}^\dagger stützt. Es ergibt sich eine Orthogonalitätsrelation zwischen Φ_α und Φ_β^* , die nur die transversalen Teile derselben betrifft und die, in den transversalen Bestandteilen $E_{t\alpha}$ und $H_{t\alpha}$ von E_α und H_α , ausgedrückt, folgende Gestalt annimmt:

$$\iint^{(S)} \{H_{t\alpha}(z_0 + E_{t\beta}^*) + E_{t\alpha}(H_{t\beta}^* + z_0)\} dS = N_\alpha \delta_{\alpha\beta}$$

($\delta_{\alpha\beta}$ Kronecker-Symbol, N_α willkürliche Normalisierungskonstante). Darin ist der „Vierer-Vektor“ $\Psi_\alpha = \{E_{t\alpha}, i H_{t\alpha}\}$ ein Eigenvektor des „ursprünglichen“ Wellenleiters vom Eigenwert κ_α und $\Psi_\beta^* = \{E_{t\beta}^*, i H_{t\beta}^*\}$ ein Eigenvektor des „adjungierten“ Wellenleiters vom Eigenwert $(\kappa_\beta)^*$. Der adjungierte Wellenleiter ist regulär, sein Querschnitt hat dieselbe Form wie das Original und die transponierten konjugierten charakteristischen Zahlen ε^{T*} und μ^{T*} . Für die Diskussion der adjungierten Randbedingungen sei auf die Arbeit selbst verwiesen. Es ist also im allgemeinen die Lösung zweier verschiedener Eigenwertprobleme notwendig; die Elemente $\Psi_\alpha, \Psi_\beta^*$ bilden dann ein Biorthogonalsystem (bezüglich des Gewichtsooperators Γ_z). Da Γ_z ein singulärer Operator im Raum der Elemente Φ ist, beschreiben Verff. überdies auch die Gestalt des transversalen Teils (3) $(L - \kappa, \Gamma_z) \Psi_\alpha = 0$ des Eigenwertproblems (1). In dem transversalen Raum der Elemente Ψ ist Γ_z nicht-singulär. Auf (3) kann die Untersuchung der Vollständigkeit des Systems der $\Psi_\alpha, \Psi_\beta^*$ gestützt werden, worauf Verff. jedoch nicht weiter eingehen. (Im einfachsten Fall, nämlich dem eines homogenen Wellenleiters hat kürzlich E. Heyn [Math. Nachr. 13, 25—56 (1955)] einen Vollständigkeitsbeweis mitgeteilt, Anm. d. Ref.) Neben (2) führen Verff. ein inneres Produkt ein, bei dem das Transponieren an die Stelle des komplexen Konjugierens tritt. Die resultierende Orthogonalitätsbeziehung ist besonders für dissipative reguläre Wellenleiter geeignet. Bei regulären elektronischen Wellenleitern stellen Verff. eine lineare Operatorgleichung auf, deren Eigenlösungen aus den „Sechser-Vektoren“ $\mathfrak{V}_\alpha = \{E_{t\alpha}, i H_{t\alpha}, V_\alpha, i J_\alpha\}$ (V Geschwindigkeitspotential, J Stromdichte) und den longitudinalen Teilen $E_{z\alpha}, i H_{z\alpha}$ bestehen. Verff. verweisen für weitere Einzelheiten auf A. D. Bresler und N. Marcuvitz, Research Reports R 495—56 (Mai 1956) und R-565—57 (März 1957).

H.-J. Hoehnke.

Chu, Chiao-Min: Propagation of waves in helical wave guides. J. appl. Phys. 29, 88—99 (1958).

Wird die, eine Schraubenspirale tragende, Zylinderfläche längs einer geraden Linie aufgeschnitten, auf einer Ebene ausgebreitet und in ihr periodisch fortgesetzt, so entspricht einer wirklichen Drahtspirale (w. D.) eine Anordnung von unendlich vielen geraden und parallelen Leitern: die „abgewinkelte Drahtspirale“ (a. D.). Verff. bestimmt eine exakte Lösung der Maxwell'schen Gleichungen des von einer solchen Anordnung geführten elektromagnetischen Feldes für den Fall von Bandleitern verschwindender Dicke und konstanter Breite, die in konstantem Abstand voneinander in der gleichen (x, z) -Ebene, und zwar parallel zur z -Achse verlaufen mögen. Durch Annahme einer Feldfunktion der Form $H = H_1(x, y) \exp(-j\beta_0 z)$ ($\beta_0 = \omega/c$) wird das räumliche Problem auf ein zweidimensionales zurückgeführt. Dabei ist $E_z = H_z = 0$. Da vollkommen leitende Bänder vorausgesetzt werden, muß auf ihnen auch $E_x = 0$ sein. In den Lücken ist die Stetigkeit von E_y zu fordern. Es ergeben sich Bedingungsgleichungen, aus denen sich die Koeffizienten einer

Reihenentwicklung von Π_1 mit Hilfe von Legendreschen Polynomen geschlossen berechnen lassen. Durch konforme Abbildung der (x, y) -Ebene kann die so gewonnene Lösung auf andere (d. h. nicht-verschwindende) Drahtquerschnitte übertragen werden, was im Fall elliptischer (insbesondere kreisförmiger) Querschnitte ausgeführt wird. Die Ergebnisse werden zur approximativen Berechnung der transversalen Impedanzkonstante $(K_t)_{w. D.}$ einer w. D. herangezogen. Dazu wird angenommen, daß näherungsweise die „Ähnlichkeitsbeziehung“ $(K_t)_{w. D.}/(K_t)_{a. D.} = (K_t)_{w. H.}/(K_t)_{a. H.}$ erfüllt ist, wobei der Index H. ein von J. R. Pierce (Traveling-wave tubes, New York 1950, S. 19ff. und S. 229ff.) untersuchtes Modell: ein schraubenförmig leitendes Hohlrohr verschwindender Wanddicke bedeutet (in jedem Punkt der Zylinderfläche ist die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes normal zu einer fixierten Schraubenlinie). Verallgemeinerung auf multifilare Drähte. Approximative Berücksichtigung des Einflusses der im Ansatz nicht enthaltenen endlichen Leitfähigkeit der Drähte. 11 Diagramme. Die berechneten Dämpfungscharakteristiken sollen gut mit Meßergebnissen anderer übereinstimmen. Die grundlegenden Arbeiten von H. Buchholz [Elektr. Nachr.-Techn. 14, 180—195 (1937)] und H. Kaden [Arch. elektr. Übertrag. 5, 534—538 (1951)] sind vom Verf. anscheinend nicht berücksichtigt worden.

H.-J. Hoehnke.

Arnaud, Jacques et Robert Warnecke: Sur l'augmentation de la largeur de bande dans les tubes à propagation d'ondes du type „O“. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 2359—2362 (1958).

In einer früheren Note [C. r. Acad. Sci., Paris 246, 2239—2241 (1958)] wurde die gleichzeitige Verwendung zweier angenähert synchronisierter Elektronenbüschel (unterschiedlicher Geschwindigkeit) in Betracht gezogen mit dem Ziel, die Bandbreite der Wellenübertragung in einem Hohlrohr zu vergrößern. Verff. berechnen nun unter vereinfachenden Annahmen auf elementarem Wege den zugehörigen Verstärkungskoeffizient und erhalten in einem praktisch wichtigen Fall eine Verdopplung der Bandbreite bei gleichzeitiger Verminderung der Verstärkung um nur 10 db.

H.-J. Hoehnke.

Beckmann, Peter und Walter Franz: Berechnung der Streuquerschnitte von Kugel und Zylinder unter Anwendung einer modifizierten Watson-Transformation. Z. Naturforsch. 12a, 533—537 (1957).

Verff. zeigen, daß durch Anwendung einer modifizierten Watson-Transformation die Streuquerschnitte von Kugel und Zylinder asymptotisch berechnet werden können. Dabei wird zuerst die Reihendarstellung des Streuquerschnittes durch Zylinderfunktionen in zwei rasch konvergente Integrale und eine gut konvergente Residuensumme umgeformt. Der Beitrag der letzteren kann asymptotisch vernachlässigt werden. Die übrigen Glieder liefern die asymptotische Reihe. P. Urban.

● Emsley, H. H.: Aberrations of thin lenses. An elementary treatment for technicians and students. London: Constable & Co., Ltd. 1957. XVI, 352 p. 50 s.

Das vorliegende Buch wendet sich nach dem Vorwort des Verf. an Techniker, die zuweilen mit optischen Problemen in Berührung kommen und diese für ihre experimentellen Anordnungen lösen wollen, ohne Experten auf dem Gebiet der Optikonstruktion zu werden. Gleichzeitig soll es den Studenten helfen, die Lücke zwischen elementarer geometrischer und physikalischer Optik und den umfassenderen Werken über „optical design“ zu überbrücken. — Der Inhalt des Buches ist wohl vorrangig nach didaktischen Erwägungen angeordnet worden. Die Prinzipien der geometrischen Optik und der Wellenoptik werden in einem einleitenden Kapitel dargelegt, das mit der Erwähnung der Rayleighschen Grenze und der optischen Toleranzformel für die primäre sphärische Aberration abschließt. Bis auf zwei weitere gelegentliche Hinweise auf wellenoptische Toleranzen wird ausschließlich die geometrisch-optische Betrachtungsweise angewendet. An dem Beispiel der Brechung an einer ebenen Fläche wird das Wesen der Aberrationen erläutert, wobei

außer dem Öffnungsfehler in sehr instruktiver Weise der Begriff des Astigmatismus und der Bildfeldkrümmung erhalten wird. Es folgt eine kurze Betrachtung der Sonderfälle brechender und reflektierender Flächen (kartesischen Flächen), die für einen Achsenpunkt aberrationsfreie Abbildung gestatten. — Den breitesten Raum des Buches widmet der Verf. den Seidelschen Aberrationen (primary aberrations) der Kugelfläche, der dünnen Linse sowie der Systeme aus dünnen Linsen. Die gewählte Bezeichnungsweise sowie auch die Art der Darstellung schließt sich eng an A. E. Conrady an. Für den Ausdruck der sphärischen Längsaberration einer dünnen Linse wird einerseits eine Formel (6-gliedrige Summe) angeführt, die ganz analog derjenigen ist, die dem deutschen Leser aus Berek's „Grundlagen der praktischen Optik“ bekannt sein mag, andererseits wird durch die in der englischen und amerikanischen Literatur gebräuchliche Einführung eines Gestaltfaktors (form factor oder bending factor) $\beta = (r_2 + r_1)/(r_2 - r_1)$ und eines Lagefaktors (conjugates factor) $\gamma = (l' + l)/(l' - l)$ die Formel in eine 4-gliedrige Summe vereinfacht. Die in den Summen auftretenden Koeffizienten, die Funktionen der Brechungszahlen sind, sind tabuliert. Durch eine Fülle von durchgerechneten Beispielen — ergänzt durch Übungsbeispiele am Ende der einzelnen Kapitel — wird die Leistungsfähigkeit der analytischen Methode für die Fehlerhebung der verschiedenen Aberrationen bzw. zur Verminderung der Aberrationen auf minimale Beträge demonstriert. Die gleiche Methode wird in zwei ausführlich gehaltenen Kapiteln über sphärische und astigmatische Brillengläser angewendet. Daneben wird die strenge trigonometrische Durchrechnung sowie auch die zeichnerische Verfolgung von Strahlen angeführt, jedoch nicht für windschiefe Strahlen. — Über die Abbildung im paraxialen Bereich und über die Farbfehler wird ebenfalls berichtet. Den Abschluß des Buches bildet ein Abschnitt über die Grundlagen der Photometrie in optischen Instrumenten. — Durch die sehr eingehende Behandlung verschiedener detaillierter Probleme wird es dem Studierenden erleichtert, mit konkreten Vorstellungen an das Studium systematischer Werke heranzugehen. Ob das Buch jedoch den Wünschen eines Technikers, der nur gelegentlich mit optischen Problemen zu tun hat, besonders angepaßt ist, möchte der Ref. in Frage stellen. Dagegen scheint ihm der Verf. zu bescheiden zu sein, wenn er annehmen sollte, daß nicht auch der Fachmann aus seinem Buche hier und da Nutzen ziehen könne.

H. Riesenberg.

Jurek, Bohumil: *L'aplanat collé avec la surface intérieure sphérique.* Rozprawy Českosl. Akad. Věd, Ř. mat. přírod. Věd 67, Nr. 12, 1—6, russ. und französ. Zusammenfassg. 7—8 (1957) [Tschechisch].

Verf. stellt sich die Aufgabe, die Gestalt der beiden äußeren Flächen einer verkitteten Linse zu bestimmen, wenn diese Linse aplanatisch und die Kittfläche eine sphärische Fläche sein soll. Für die Lösung dieser Aufgabe gibt er ein Approximationsverfahren an, bei dem eine Variable so lange verändert werden muß, bis eine bestimmte, in der Arbeit nur in allgemeiner Form angegebene Gleichung erfüllt ist. Der Rechenvorgang in seinem sukzessiven Ablauf wird näher beschrieben.

J. Picht.

Jurek, Bohumil: *Méthodes nouvelles de solution de l'aplanat à miroirs.* Rozprawy Českosl. Akad. Věd, Ř. mat. přírod. Věd 67, Nr. 12, 9—14, russ. und französ. Zusammenfass. 15—16 (1957) [Tschechisch].

Verf. behandelt die Berechnungen der Meridiane der beiden Spiegel eines aus diesen bestehenden aplanatischen Systems, und zwar nach zwei verschiedenen Methoden, die er näher diskutiert. Dabei erhält er eine neue Lösung endlicher Form, die von der Schwarzschild'schen aus dem Jahre 1905 abweicht. Außerdem gibt er ein Näherungsverfahren für die Berechnung der Form des ersten Spiegels eines streng aplanatischen Systems für großen Objektabstand. Anschließend geht Verf. auf eine das gleiche Problem behandelnde frühere Arbeit des Ref. [Optik 8 (1951)]

näher ein und berichtet über Ergebnisse von Berechnungen nach dieser sowie nach der von ihm angegebenen Formel.

J. Picht.

Morgan, Samuel P.: General solution of the Luneberg lens problem. *J. appl. Phys.* **29**, 1358—1368 (1958).

Für eine sphärische Linse mit örtlich variablem Brechungsindex, die zwei vorgegebene konzentrische Kugelflächen punktwise aberrationsfrei aufeinander abbildet, wird die allgemeine Lösung der erforderlichen Abhängigkeit des variablen Brechungsindex vom Orte innerhalb der Linse abgeleitet. Dabei wird die eine der beiden zueinander optisch konjugierten Kugelflächen außerhalb oder auf der Oberfläche der Linse, die andere innerhalb oder außerhalb oder gleichfalls auf der Oberfläche der Linse örtlich variablen Brechungsindex liegend angenommen. Ist die eine der beiden konjugierten Flächen eine Ebene, also eine Kugel von unendlich großem Radius, soartet die ihr konjugierte Kugel zu einem Punkt aus. Verf. zeigt weiter, daß der Brechungsindex innerhalb einer äußeren Schale beliebiger Dicke verhältnismäßig willkürlich — z. B. auch konstant — gewählt werden kann, aber dabei zwei Bedingungen erfüllen muß. Für den Brechungsindex des inneren Teiles der Linse in seiner Abhängigkeit vom Orte wird ein Ausdruck gefunden, der in der Arbeit ausgewertet und tabellarisch mitgeteilt wird, wobei natürlich die Verteilung des Brechungsindex dieses inneren Teiles von dem des äußeren abhängt. Es werden weiter einige Eigenschaften der allgemeinen Lösung diskutiert und spezielle Lösungen abgeleitet.

J. Picht.

Preisendorfer, Rudolph W.: Invariant imbedding relation for the principles of invariance. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **44**, 320—323 (1958).

Preisendorfer, Rudolph W.: Functional relations for the *R* and *T* operators on plane-parallel media. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **44**, 323—327 (1958).

Preisendorfer, Rudolph W.: Time-dependent principles of invariance. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **44**, 328—332 (1958).

In diesen Arbeiten wird das von Bellmann, Kalaba und G. Milton Wing (dies. Zbl. **78**, 218) bzw. Chandrasekharan (Radiative transfer, s. dies. Zbl. **37**, 432) formulierte Prinzip der invarianten Einbettung so abstrakt formuliert, daß es auf Teilchendiffusionserscheinungen oder die Ausbreitung stehender Wellen angewendet werden kann. Gewisse Operatoren, die sich mit Greenschen Funktionen vergleichen lassen, verbinden die verschiedenen Strahlungsintensitäten an verschiedenen Stellen des in Schichten aufgeteilten Mediums miteinander. Durch Übergang zu infinitesimalen Schichten entstehen Differential-Funktionalgleichungen für diese Übergangsoperatoren. Eine ausführliche Darstellung, in der der gesamte Sachverhalt dargestellt wird und konkrete Ergebnisse gegeben würden, erscheint dem Referenten wünschenswert.

D. Morgenstern.

Blumová, Věra et Josef Hrdlička: Le pouvoir résolvant de l'émulsion photographique. *Rozpravy Českosl. Akad. Věd, R. mat. přírod. Věd* **67**, Nr. 12, 17—44, russ. und französ. Zusammenfassg. 45—54 (1957) [Tschechisch].

Von O. Sandvik [*J. Opt. Soc. Amer.* **16**, 244—258 (1928)] war für das Auflösungsvermögen photographischer Schichten eine empirische Formel angegeben, die theoretisch von H. Frieser [*Z. wiss. Photographie* **37**, 261—274 (1938)] begründet wurde. Verff. versuchten gleichfalls, diese Formel theoretisch zu begründen. Hierbei waren sie gezwungen, verschiedene Approximationen vorzunehmen. Verff. versuchen nun, eine strenge Ableitung einer mathematischen Beziehung für das Auflösungsvermögen abzuleiten. Sie erhalten die Beziehung

$$S = S_1 \sqrt{(k - k'_{\text{lim}})/(2 - k)} (1 - k'_{\text{lim}}) \approx S_1 \sqrt{k/(2 - k)}$$

mit $k = (E_{\text{max}} - E_{\text{min}})/E_{\text{max}}$ = reduzierter Kontrast, der stets größer als Null ist, während k'_{lim} den durch die Körnigkeit der Emulsion und die Eigenschaften des Empfängers (z. B. des Auges oder Abtastgerätes) bedingten Mindestkontrast be-

deutet, der von dem Empfänger noch registriert werden kann. — Es wird weiter über experimentelle Untersuchungen berichtet, die das Ziel hatten, festzustellen, welche der verschiedenen bekannten bzw. abgeleiteten Beziehungen die Verhältnisse am genauesten wiedergibt bzw. ob meßbare Unterschiede zwischen ihnen bestehen. Dies geschah mit Benutzung verschiedener Miren sowie auf verschiedenen photographischen Platten, worüber eingehend berichtet wird.

J. Picht.

Archard, G. D.: An unconventional electron lens. Proc. phys. Soc. **72**, 135—137 (1958).

Vorschlag einer nicht rotationssymmetrischen Elektronenlinse, in welcher eine vom Öffnungsfehler 3. Ordnung freie stigmatische Abbildung möglich ist. Die Linse besteht aus zwei vierpoligen und zwei achtpoligen Elementen. Sie hat gegenüber dem von Burfoot (s. dies. Zbl. **50**, 425) vorgeschlagenen System den Vorteil leichter einzuhaltender Justierungstoleranzen und gegenüber dem von Scherzer vorgeschlagenen [Z. Phys. **101**, 593—603 (1936) und Optik **2**, 114 (1947)] den Vorteil einer wesentlich geringeren Elektrodenzahl.

F. Lenz.

● **Hagedorn, R.:** Stability and amplitude ranges of two dimensional non-linear oscillations with periodical hamiltonian applied to betatron oscillations in circular particle accelerators. I, II. Genève: Organisation Européenne pour la Recherche Nucléaire. CERN European Organization for Nuclear Research 1957. VI, 178 p.

● **Hagedorn, R. and A. Schoch:** Stability and amplitude ranges of two dimensional non-linear oscillations with periodical hamiltonian applied to betatron oscillations in circular particle accelerators. III. Genève: Organisation Européenne pour la Recherche Nucléaire. CERN European Organization for Nuclear Research 1957. III, 22 p.

Die Verff. bringen das zweidimensional explizit als zeitunabhängig mit der Periode 2π darstellbare System nichtlinearer Differentialgleichungen durch mehrere periodische Transformationen in eine Form, in der die Hamilton-Funktion die eine, die quadratische Form der transformierten Amplituden die andere Konstante der Bewegung sind. Die Stabilität des linearen Systems wird vorausgesetzt. Bezeichnet man mit ω_1 und ω_2 die Frequenzen des linearen Systems, so erhält man die folgenden Aussagen über das Stabilitätsverhalten des nichtlinearen Systems: Auf den Linien $n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 = p$ ist ein resonanzähnliches Verhalten möglich, das zur Instabilität führen kann. Im einzelnen ist das System stabil für den Fall, daß die n gleiche Vorzeichen haben oder eines der n gleich Null ist. Es liegt Instabilität vor für $p = 2$, jedoch nicht unbedingt gefährlich auch für $p = 3$. Für $p = 4$ hängt es von den beiden Konstanten der Bewegung ab, ob Stabilität oder Nichtstabilität vorliegt. Für $p = 5$ ist das System in fast allen Fällen stabil. Diese qualitativen Ergebnisse gelten auch für große Nichtlinearitäten. Weiter lassen sich die Amplitudenbereiche ebenfalls aus den Invarianten der Bewegung errechnen. Hier gelten die Formeln jedoch nur für kleine Nichtlinearitäten und kleine Amplituden. Im zweiten Teil werden die erarbeiteten Formeln in eine Form gebracht, die eine praktische Anwendung ermöglicht, d. h. die Konstanten der Theorie werden durch meßbare Größen, wie Magnetfelder und deren Ableitungen usw., ersetzt und werden hierdurch nur für den speziellen Fall der Betatronschwingungen eines Teilchens im nichtlinearen Feld eines zirkularen Teilchenbeschleunigers anwendbar. Vergleiche zwischen den Messungen an einem Analogmodell sowie den numerischen Berechnungen im eindimensionalen Fall und den Ergebnissen der Theorie ergeben im Rahmen der zu erwartenden Gültigkeit der Theorie gute Übereinstimmung. Im Anhang wird u. a. ein Fall angegeben, für den die Theorie überfordert wird. Außerdem werden einige Probleme der nichtlinearen Theorie der Betatronschwingungen in Teilchenbeschleunigern mit starker Fokussierung, so die Breite der Stoppbänder bei Fehlern des Feldgradienten, behandelt. — Die im Teil I und II unter gleichem Titel beschriebene Theorie des Verf. wird im Teil III für die Subresonanzen dritter Ordnung, die als die wichtigsten angesehen werden können, für Teilchenbeschleuniger numerisch ausgewertet.

Es wird einmal auf graphischem zum anderen auf analytischem Wege die Berechnung von zwei Arten nichtlinearer Resonanzkurven durchgeführt. Die durch zwei Parameter, dem Verhältnis der stabilisierenden zu den nichtlinearen Kräften und dem Verhältnis der Quadrate der Anfangsamplituden in beiden Richtungen gegebenen Resonanzkurven beschreiben das Verhältnis der Anfangsamplitude zur Maximalamplitude als Funktionen des Abstandes der tatsächlichen Frequenz von der Resonanzlinie. Das absolute Maximum der Resonanzkurven, welches zu der höchsten Amplitude, die unter gegebenen Anfangsbedingungen erreicht werden kann, gehört, kann in einer Kurventafel dargestellt werden. Die beiden Parameter und die Variablen der Darstellung lassen sich leicht in die gegebenen physikalischen Parameter, Anfangsbedingungen und die gesuchten Größen umrechnen.

C. Passow.

Viswesvariah, M. N. and S. K. Sen: A comparative study of betatron and direct injection in the electron synchrotron proposed for the Institute of Nuclear Physics, Calcutta. *Indian J. Phys.* **32** (41), 66—74 (1958).

Aus der Gegenüberstellung der Einfangsbedingungen für die beiden Einschüßmöglichkeiten ermitteln die Verff. folgende Vorteile für den Einschüß mit einem Linearbeschleuniger: Gasstreuung sowie geringere Aufspreizung des Injektionsstromes ergeben geringe Betatronamplitude, das Magnetfeld am Einschüßpunkt ist höher. Nachteile sind der größere Aufwand für den Bau des Inflektors und größere Verluste durch schnellere Änderung der Sollbahn. Zusammengefaßt: die Injektion durch Linearbeschleuniger wird um so rentabler, je höher die geplante Endenergie des Synchrotrons ist.

C. Passow.

Moroz, E. M.: Effect of quantum fluctuations in the electron radiation of the synchrotron oscillations. *Soviet Phys., JETP* **6**, 1008—1009 (1958), Übersetz. von *Žurn. eksper. teor. Fiz.* **33**, 1309—1310 (1957).

Durch Berücksichtigung der Dämpfung der Synchrotronschwingungen infolge des Anwachsens der Elektroenergie wird eine Korrektur für die Formel des stationären Werts des mittleren Amplitudenquadrats der Synchrotronschwingungen gewonnen, die schon von Sands [*Phys. Review*, II. Ser. **97**, 470—473 (1955)] angegeben wurde.

G. Wallis.

Woltjer, L.: A theorem on force-free magnetic fields. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **44**, 489—491 (1958).

Für kraftfreie Magnetfelder, beschrieben durch $\text{rot } \mathbf{H} = \alpha \cdot \mathbf{H}$ wird mit Hilfe eines Variationsprinzips gezeigt, daß kraftfreie Magnetfelder mit konstantem α den niedrigsten Zustand der magnetischen Energie darstellen, den ein abgeschlossenes System erreichen kann. Solche Magnetfelder sind daher die Endkonfigurationen in Systemen, in denen die magnetischen Kräfte überwiegen.

G. Wallis.

Bernstein, I. B., E. A. Frieman, M. D. Kruskal and R. M. Kulsrud: An energy principle for hydromagnetic stability problems. *Proc. roy. Soc. London, Ser. A* **244**, 17—40 (1958).

Für ein völlig ionisiertes Plasma mit verschwindender Strömungsgeschwindigkeit werden die hydromagnetischen Gleichungen aufgestellt und die Bedingungen für deren Gültigkeit angegeben. Die Bewegungsgleichungen lassen sich für kleine Störungen der Gleichgewichtslage linearisieren. Zur Stabilitätsuntersuchung wird ein Energieprinzip, das ursprünglich von Lundquist eingeführt wurde, entwickelt und der Anwendungsbereich untersucht. Die Beziehungen dieses Energieprinzips zu dem Prinzip von Rayleigh werden diskutiert. Mit Hilfe des Energieprinzips lassen sich vollständige Stabilitätsbedingungen für zwei verschiedene Arten von Gleichgewichtszuständen herleiten. Beim ersten Fall verschwindet das magnetische Feld im Innern des Plasmas; außerhalb befindet sich eine Vakuumzone mit einem magnetischen Feld. Die zweite Anwendung behandelt ein allgemeines, axialsymmetrisches System.

K. G. Müller.

Šafranov (Shafranov), V. D.: On magnetohydrodynamical equilibrium configurations. Soviet Phys., JETP 6, 545—554 (1958), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 33, 710—722 (1957).

Für den Fall der Einwirkung von Gravitationskräften sowie des Drucks eines äußeren Gases oder Magnetfeldes werden die Gleichgewichtsbedingungen für ein ringförmiges Magnetfeld aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet. Die Gleichgewichtsbedingungen in hydromagnetischen Systemen werden darauf in Beziehung gebracht zu der Wirbeltheorie in inkompressiblen Flüssigkeiten. Das gefundene Theorem gestattet, das Problem der Gleichgewichtsbedingungen in hydromagnetischen Konfigurationen auf die Theorie stationärer Strömungen in inkompressiblen Flüssigkeiten zurückzuführen.

G. Wallis.

Širokov (Shirokov), M. F.: Interaction between gravitational-capillary and magnetohydrodynamic waves. Soviet Phys., JETP 6, 50—54 (1958), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 33, 67—71 (1957).

Wale's Lösung der hydromagnetischen Grundgleichungen [Ark. Mat. Astron. Fysik 30 A, 15 u. 31 B, 3 (1944)] werden den Randbedingungen angepaßt, so daß sich die Wechselwirkung zwischen den Schwerewellen und den hydromagnetischen Wellen berechnen läßt. Daraus ergeben sich Stabilitätskriterien und Abschätzungen für die Eindringtiefe, die auf die Verhältnisse bei Quecksilber angewandt werden. Die Stromdichten in der Oberflächenschicht werden berechnet und in Analogie zum Skin-Effekt betrachtet.

G. Wallis.

Zababachin (Zababakhin), E. I. and M. N. Nečaev (Nechaev): Electromagnetic-field shock waves and their cumulation. Soviet Phys., JETP 6, 345—351 (1958), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 33, 442—450 (1957).

Nach einer Einleitung über die Bildung und die Breite hydromagnetischer Stoßfronten für den ebenen Fall wird die Umwandlung solcher ebenen Wellen in konvergierende behandelt. Insbesondere für den Fall zylindrischer konvergierender Wellen werden dann die Standardlösungen aufgesucht (sich im Laufe der Zeit selbst ähnlich bleibende Lösungstypen). Hierbei ergibt sich ein neues Phänomen, „Kumulation“, genannt, das weniger zu den Eigenschaften hydromagnetischer Wellen als vielmehr zu der Zylindergeometrie in Beziehung steht.

G. Wallis.

Taniuti, Tosiya: An example of isentropic steady flow in the magneto-hydrodynamics. Progress theor. Phys. 19, 749—750 (1958).

Für den Fall $\mathbf{H} = \pm \sqrt{k\rho} \mathbf{v}$, wo k eine willkürliche Konstante ist, wird gezeigt, daß auch bei stationären adiabatischen Unterschallströmungen ein Dichtesprung auftreten kann, wenn die Magnetfeldstärke genügend groß ist.

G. Wallis.

Stewartson, K.: The dispersion of a current on the surface of a highly conducting fluid. Proc. Cambridge philos. Soc. 53, 774—775 (1957).

Verf. untersucht die Stabilität von Flächenströmen in leitenden Flüssigkeiten bei Anwesenheit statischer orthogonaler Magnetfelder. Nach Fermi und Chandrasekhar [Astrophys. J. 118, 116 (1953)] sollten solche Flächenströme für $\sigma \rightarrow \infty$ möglich sein und für endliches σ noch der Zeit über einen Bereich der Ordnung $(t/\sigma)^{1/2}$ dissipieren wie in festen Körpern. Es wird gezeigt, daß im magnetohydrodynamischen Fall der Flächenstrom nach einer Zeit $t_{ex} = O[(\rho/\sigma H_0^2) \log(\sigma H_0^2/\rho)]$ an seinem ursprünglichen Ort verschwunden ist, für $\sigma \rightarrow \infty$ also spontan mit einer Geschwindigkeit $V = H/\sqrt{4\pi\rho}$ längs der magnetischen Feldlinien in Form einer Alfvén'schen Stoßwelle durch das Medium läuft. (Das vom Verf. diskutierte singuläre Verhalten der Lösung für $\rho \rightarrow \infty$ hat natürlich keine physikalische Realität. Wegen der in der Magnetohydrodynamik vernachlässigten Terme in den Bewegungsgleichungen ist immer t_{ex} größer als die reziproke Zyklotronfrequenz der Ionen.)

H. Rother.

Tandon, J. N. and S. P. Talwar: Radial pulsations of an infinite cylinder in the presence of magnetic field. Indian J. Phys. 32 (41), 317—322 (1958).

Die für die Beschreibung der Vorgänge in galaktischen Spiralarmen oder in Ionenströmen der Sonnenatmosphäre wichtige Frage adiabatischer Pulsationen eines zylindrischen Plasmas unendlicher Länge wird für den Fall zirkularer und linearer Ströme gelöst. Aus den Formeln für die Pulsationsfrequenz als Funktion der inneren Energie ergeben sich Gleichgewichtsbedingungen, die zeigen, daß der Zylinder dynamisch stabil bleibt für die beiden gewählten Strommodelle.

G. Wallis.

Cowling, T. G. and A. Hare: Two-dimensional problems of the decay of magnetic fields in magnetohydrodynamics. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **10**, 385—405 (1957)

Verff. untersuchen den Einfluß stationärer Strömungsfelder in leitenden Flüssigkeiten auf abklingende Magnetfelder. Gerechnet werden ausschließlich zweidimensionale Modelle. — Wenn die Strömungsgeschwindigkeit als kleine Störung aufgefaßt werden kann, so bewirkt für den allgemeinen zweidimensionalen Fall die Strömung grundsätzlich bis zu Gliedern 2. Ordnung der Störungsrechnung eine Verkürzung der Zerfallszeit des Magnetfeldes. Erst in höherer Ordnung treten Terme mit entgegengesetztem Vorzeichen auf. Für den Fall hoher Strömungsgeschwindigkeiten wird der Einfluß verschiedener Geschwindigkeitsprofile in einer leitenden Schicht zwischen zwei planparallelen Ebenen und in einem coaxialen Zylinder approximativ gelöst. Die entsprechenden Modelle für intermediäre Geschwindigkeiten werden numerisch behandelt. Die Bewegung verursacht in jedem Falle Transport und Auslöschung des Feldes, im allgemeinen eine Vergrößerung der Zerfallskonstante näherungsweise proportional (Strömungsgeschwindigkeit $^{3/2}$). Nur bei Koinzidenz von Strömungs- und Feldlinien wird das Feld weniger stark beeinflusst. Es wird daraus geschlossen, daß auch bei topologisch ähnlichen dreidimensionalen Strömungszuständen [wie sie Chandrasekhar, *Astrophys. J.* **124**, 234; 244 (1956) seiner Dynamothorie zugrunde gelegt hat] kein Anhalt für einen Dynamomechanismus gegeben scheint.

H. Rother.

Goto, Ken-iti: Relativistic magnetohydrodynamics. *Progress theor. Phys.* **20**, 1—14 (1958).

Nach einer einleitenden Bemerkung über die relativistische Invarianz der Verteilungsfunktion wird die relativistische Formulierung der Boltzmannschen Transportgleichung angegeben und auf den Fall eines einfachen Gases in einem äußeren elektromagnetischen Feld angewandt. Nach Formulierung der Kontinuitätsgleichung, der Bewegungsgleichung und der Erhaltungssätze ergeben sich einige Verallgemeinerungen des Helmholtz'schen Wirbelsatzes und der Stoßfrontbeziehungen von Rankine-Hugoniot.

G. Wallis.

Relativitätstheorie:

Klarsfeld, S.: Le lois de conservation dans l'électrodynamique de Bopp. *An. Univ. C. J. Parhon Bucureşti. Ser. Şti. Natur.* Nr. **15**, 63—66, russ. und französ. Zusammenfassung 66 (1957) [Rumänisch].

Mit Hilfe des Belinfanteschen Symmetrisierungsverfahrens im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie erhält Verf. für den Energie-Impuls-Tensor der Bopp'schen Elektrodynamik dasselbe Ergebnis, welches er bereits vermöge des allgemein-relativistischen Apparates nach Rosenfeld herleiten konnte (s. dies. Zbl. **80**, 220) und welches vom Bopp'schen Ergebnis abweicht.

E. Schmutzer.

Born, M. und W. Biem: Zum Uhrenparadoxon. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. B.* **61**, 110—120 (1958).

The clock-paradox is carefully considered from the point of view of general relativity. Of course, as the author shows convincingly, there is no difference whether we consider the problem from the point of view of the observer *A* who is at rest in

his inertial system, or from the point of view of the observer B who returning to A moves non-uniformly, or is at rest in a proper gravitational field. *L. Infeld.*

Stephenson, G.: Quadratic Lagrangians and general relativity. Nuovo Cimento, X. Ser. 9, 263—269 (1958).

Aus dem Riemann-Christoffel-Tensor und dessen Verzünungen werden drei quadratische Invarianten gebildet, die als Lagrangefunktionen im üblichen Variationsprinzip gewählt werden. Die Feldgleichungen werden so abgeleitet, daß die Komponenten des metrischen Tensors und die Affinitäten bei der Ausführung der Variationen als voneinander unabhängig betrachtet werden (Palatinisches Verfahren). Danach werden die Affinitäten mit den Christoffel-Symbolen identifiziert. Es wird gezeigt, daß zwei dieser Lagrangefunktionen als eine Klasse von Lösungen alle Lösungen der Einsteinschen Gleichung mit dem kosmologischen Glied haben. Die Divergenz aller drei Gleichungen verschwindet, und die Schwarzschildsche Metrik ist Lösung aller drei Gleichungen, so daß die drei Einsteinschen Effekte unbeeinflußt bleiben. Auf Grund dieser Untersuchungen werden neue Feldgleichungen für die Gravitation erwogen, quadratisch im Riemann-Christoffel-Tensor und mit verschwindender Spur. *E. Schmutzer.*

Møller, C.: On the localization of the energy of a physical system in the general theory of relativity. Ann. of Phys. 4, 347—371 (1958).

Im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie wird ein konsistenter Ausdruck für die Energiedichte eines willkürlichen physikalischen Systems angegeben, wodurch im Gegensatz zur herkömmlichen Auffassung eine Lokalisierung der Energie in einem Gravitationsfeld erreicht werden soll. In dieser Neuformulierung, die in vielen Punkten an Einsteins Vorschlag anschließt, kann aber die Beschränkung auf quasi-Galileische Koordinaten aufgegeben werden. Die Bedeutung des Energieinhalts eines Teils eines Systems und auch die der Gesamtenergie eines geschlossenen Universums wird eindeutig. Das Energieerhaltungsgesetz kann in einer differentiellen Form in Analogie zum Poyntingschen Satz der Elektrodynamik formuliert werden. Das wird insbesondere wesentlich bei der Diskussion der Frage nach Energie transportierenden Gravitationswellen. Bemerkenswert erscheint schließlich, daß im Gegensatz zu den üblichen linearen Feldtheorien in einem statischen oder stationären System im leeren Raum um die Materie die Energiedichte der Gravitation null ist. *E. Schmutzer.*

Souriau, Jean-Marie: La seconde invariance en relativité variationnelle. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 3588—3590 (1958).

Verf. untersucht die Möglichkeit, die Mannigfaltigkeit von Wirkungsfunktionen, die sein Variationsschema zur Herleitung von relativistischen Feldgleichungen für ein Basisvektorenfeld zuläßt, dadurch einzuschränken, daß außer dem Relativitätsprinzip noch Invarianz gegenüber bestimmten Transformationen der Feldgrößen allein gefordert wird. *H. Treder.*

Synge, J. L.: An invariant gravitational density. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 58, 29—39 (1957).

Ausgehend von der Riemannschen Krümmung einer durch zwei zueinander orthogonale Einheitsvektoren (einer zeit-, der andere raumartig) definierten 2-Stellung im Riemannschen Raum der allgemeinen Relativitätstheorie konstruiert Verf. durch zweimalige Mittelwertbildung eine Invariante $H(A)$ mit folgenden Eigenschaften: 1. $H(A)$ hängt von einem beliebigen zeitartigen Einheitsvektor A ab. 2. $H(A) \geq 0$ mit $H(A) = 0$ dann und nur dann, wenn der Riemannsche Krümmungstensor verschwindet. 3. $H(A)$ enthält eine die Konvergenz des einen Mittelwertsintegrals erzwingende, sonst aber willkürliche Gewichtsfunktion. Die nach 2. naheliegende Deutung von H als Energiedichte des Gravitationsfeldes ist wegen 3. ziemlich künstlich. *D. Geißler.*

Rjabuško (Riabushko), A. P.: Equations of motion for rotating masses in the general theory of relativity. Soviet Phys. JETP 6, 1067—1073 (1958), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. 33, 1387—1395 (1957).

The author makes use of the following assumptions: a small rotating body has an energy-momentum tensor depending not only on the Dirac's δ -functions, as in the case of an ordinary particle, but also on the derivatives of these δ -functions. Thus, in the energy-momentum tensor, a new vector $\vec{\sigma}$ appears as a coefficient at δ' . It is to be determined by equations of the form

$$\int (x^k T^{\alpha\beta}; s - x^s T^{\alpha s}; s) \sqrt{-g} d_{(3)} x$$

($T^{\alpha\beta}$ the energy-momentum tensor) added for every particle to the equations of motion. Then the generalized equations of motion and those for $\vec{\sigma}$ are calculated.

L. Infeld.

Green, H. S.: Dirac matrices, teleparallelism and parity conservation. Nuclear Phys. 7, 373—383 (1958).

The paper goes back to one of Einstein's attempts in 1928 [S.-Ber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. 1928, 217—221; 224—227 (1928)] to create a unitary field theory with the help of teleparallelism (Fernparallelismus). It is shown that teleparallelism is a necessary consequence of the introduction of Dirac matrices in general relativity theory, and that these matrices require a reducible 8-dimensional representation. The author asserts: the failure of parity conservation is not merely consistent with general relativity, but is an almost necessary consequence of the theory.

L. Infeld.

Hardtwig, Erwin: Erlauben künstliche Erdsatelliten ein Überprüfen von Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie? Forsch. Fortschr. 32, 193—197 (1958).

Es werden die Möglichkeiten zum Nachweis des aus der allgemeinen Relativitätstheorie folgenden Einsteinschen Merkmereffekts und Thüringschen Rotations-effektes mit Hilfe künstlicher Erdsatelliten diskutiert. Selbst wenn die Abplattungsstörungen des Geoids mit der geforderten Genauigkeit aus der Beobachtung von Satellitenbahnen ermittelt sind, um die relativistischen Reststörungen abzutrennen, darf der Einfluß des Luftwiderstandes auf die Satellitenbahn nicht vernachlässigt werden. Geht man zur Ausschaltung des Luftwiderstandes zu größeren Bahnhöhen, so nimmt man eine wesentliche Verringerung der relativistischen Effekte in Kauf. Darüber hinaus muß damit gerechnet werden, daß ein vorhandener Meteoritenstaub weitere Unsicherheiten in der Erfassung der Bahnstörungen bringt. Bei Berücksichtigung aller dieser Effekte ist eine Prüfung der relativistischen Effekte nicht völlig ausgeschlossen, auf jeden Fall aber sehr schwierig.

F. Winterberg.

Green, H. S.: Spinor fields in general relativity. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 245, 521—535 (1958).

Es wird eine einheitliche Feldtheorie mit zwei fundamentalen Feldvariablen, nämlich einem Spinor und einem Bispinor-Vektor (Satz von Dirac-Matrizen), die als die Grundvariablen fungieren und aus welchen Tensorfelder konstruiert werden, entwickelt. Die Theorie ist kovariant gegen allgemeine Koordinaten- und Ähnlichkeits-(Spinor-)transformationen und fußt auf dem Einsteinschen Begriff des Fernparallelismus. In diesem Formalismus kann die Dirac-Gleichung formuliert werden. Außerdem gelingt die Identifizierung des elektromagnetischen Viererpotentials. Um die Gravitations- und elektromagnetischen Erscheinungen im Einklang mit dem Experiment zu erfassen, wird zur Gewinnung der Feldgleichungen eine gewisse Wirkungs-dichte vorgeschlagen. Es erscheinen Anzeichen dafür, daß die Ladung der Elementarteilchen quantisiert ist. Ein Hauptteil der Arbeit widmet sich der Spezialisierung, in welcher die „natürliche“ Ableitung der Dirac-Matrizen zum Verschwinden gebracht wird. Am Schluß wird die Verallgemeinerung der Theorie kurz erläutert,

wobei sich die Möglichkeit der Einführung anderer Felder (pseudoskalaras Feld) ergibt, die mit den Kernkräften in Verbindung gebracht werden.

E. Schmutzer.

Klein, O.: The Dirac theory of the electron in general relativity theory. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **31**, Nr. 8, 5 p. (1958).

Axiomatisation de la théorie bien connue de Fock [*Z. Phys.* **57**, 261—277 (1929)]. Schrödinger (v. ce Zbl. **4**, 281) et Bargmann (v. ce Zbl. **5**, 380): on postule l'invariance du lagrangien et démontre l'invariance de Γ et le caractère 4-vectoriel de γ^k .

O. Costa de Beauregard.

Rayski, J.: Heisenberg's universal theory and gravitation. *Nuovo Cimento*, X. Ser. **9**, 337—339 (1958).

The non-linear equations of Heisenberg are generalized to include the gravitational field. This field is assumed to depend on world points only through the spinor functions ψ, χ . In this way there is a possibility of finding a closed connection between the gravitational and the weak coupling constants.

L. Infeld.

Vaidya, P. C. and K. B. Shah: A radiating mass particle in an expanding universe. *Proc. nat. Inst. Sci. India*, Part A **23**, 534—539 (1958).

A radiating particle is embedded in the Einstein-de Sitter universe and its field is found. After some simple assumptions about the energy the momentum tensor is stated.

L. Infeld.

Quantentheorie:

Vachaspati: Transformations in the functional space of quantum mechanics. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **47**, 179—183 (1958).

Suite d'un précédent article (voir ce Zbl. **72**, 216). Outre les transformations ponctuelles arbitraires, seules les transformations linéaires sont permises dans l'espace fonctionnel (si l'on rent qu'elles appartiennent à un groupe). Ceci exclut une généralisation riemannienne de l'espace fonctionnel.

O. Costa de Beauregard.

● **Faculté des Sciences de Paris:** Séminaire de théories physiques, dirigé par Louis de Broglie. (27e année: 1957/58). Paris: Secrétariat mathématique 1958. 15 nr.

F. Fer: Analogies gyroscopiques pour accélérateurs circulaires (p. 8). **G. Petiau:** Sur quelques types d'équations d'ondes non-linéaires et leurs solutions (25 p.). **B. Jouvet:** Quantification des couplages non-linéaires (en $(\bar{\psi}\psi)(\psi\psi)$). Sur la cohérence de la théorie quantique des champs (8 p.). **D. Bohm et J. P. Vigier:** Relativistic hydrodynamics of rotating fluid masses (24 p.). **E. Hara:** Diffusion élastique du photon par l'atome (9 p.). **G. Jakobi et N. N. Kolesnikow:** Sur la structure de l'électron (en liaison avec les idées de Hofstad) (17 p.). **J. Winogradski:** Représentations spinorielles du groupe de Lorentz général (17 p.). **S. Kichenassamy:** Choix des solutions particulières dans les théories relativistes (1 p.). **M. Cotte:** Etude critique de la notion de vitesse de groupe (9 p.).

O. Costa de Beauregard.

Hillion, Pierre: Le théorème *PCT* dans la théorie des états excités quantifiés et stables de masses fluides relativistes en rotation. *C. r. Acad. Sci., Paris* **247**, 1508—1510 (1958).

Discussion concluant que la gouttelette relativiste de Bohm et Vigier n'est invariante par aucune des trois opérations *P, C, T* isolément (bien entendus elle est *PCT*-invariante).

O. Costa de Beauregard.

● **Landau, L. D. and E. M. Lifshitz:** Quantum mechanics. Translated from the russian by **J. B. Sykes and J. S. Bell.** (Course of Theoretical Physics. Vol. 3.) London. New York, Paris, Los Angeles: Pergamon Press Ltd. 1958. XII, 515 p. 80 s. net.

Bei dem vorliegenden weiteren Band der „theoretischen Physik“ der Verf. handelt es sich um eine Quantenmechanik im konventionellen Gewand. D. h., es wird — ganz anders als beispielsweise im Buch von G. Ludwig, Einführung in die

Quantenmechanik (vgl. dies. Zbl. 58, 228) — vom Hilbertraum explizit kein Gebrauch gemacht, keine ausführliche Darstellungstheorie gegeben, sondern immer die unmittelbare Physik im Auge haltend die quantentheoretische Formulierung der Naturgesetze angestrebt. So wird fast immer in Ortsdarstellung gerechnet und der Schrödingerschen Theorie breiter Raum gegeben. Das Buch ist nach Meinung des Ref. weniger gut für Studierende geeignet, die die Quantentheorie erst kennenlernen. Für den schon etwas Vorbelasteten jedoch stellt es eine Fundgrube dar: Viele kleine Bemerkungen, interessantes didaktisches Vorgehen usw. bieten viel Gelegenheit zu unorthodoxen Gedanken. Von vielem sei hier nur erwähnt: Ausführliche Drehimpulstheorie, Theorie der Symmetrie, Stoßtheorie. *W. Klose.*

Alliluev, S. P.: On the relation between „accidental“ degeneracy and „hidden“ symmetry of a system. Soviet Phys., JETP 6, 156—159 (1958), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 33, 200—203 (1957).

Der Hamiltonoperator eines 3-dimensionalen quantenmechanischen Systems ist in vielen Fällen invariant gegen Drehungen und Spiegelungen des Systems. Dies hat zur Folge, daß die zum gleichen Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen eine im allgemeinen irreduzible Darstellung der 3-dimensionalen orthogonalen Gruppe (\mathfrak{O}_3) aufspannen. In zwei wichtigen Fällen jedoch, beim harmonischen Oszillator und beim Elektron im Coulombfeld, ist diese Darstellung reduzibel („accidental degeneracy“), da der Hamiltonoperator in Wirklichkeit gegen eine größere Gruppe als \mathfrak{O}_3 invariant ist („hidden symmetry“). Diese größere Gruppe ist beim n -dimensionalen harmonischen Oszillator die n -dimensionale unimodulare unitäre Gruppe (U_n) (G. A. Baker Jr., s. dies. Zbl. 71, 425), beim Elektron im 3-dimensionalen Coulombfeld die orthogonale Gruppe in 4 Dimensionen (\mathfrak{O}_4) (V. Fock, s. dies. Zbl. 12, 429). In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die zum Elektron im n -dimensionalen Coulombfeld ($n \geq 2$) gehörige Symmetriegruppe die \mathfrak{O}_{n+1} ist. Ferner wird der 2-dimensionale harmonische Oszillator diskutiert, wobei besonderes Gewicht gelegt wird auf die Konsequenzen, die aus der bekannten Homomorphie zwischen U_2 und \mathfrak{O}_3 folgen (Einführung eines formalen Drehimpulsoperators und der zugehörigen Eigenfunktionen). *M. Kretzschmar.*

Alcock, G. R. and D. J. Hooton: Charge conservation in the Bethe-Salpeter equation. Nuovo Cimento, X. Ser. 8, 590—598 (1958).

Der erste Verf. hat in einer früheren Arbeit (s. dies. Zbl. 71, 426) gezeigt, wie man das Skalarprodukt $\langle b|a \rangle$ von zwei gebundenen Zuständen mit Hilfe der Bethe-Salpeter-Amplituden von $|a \rangle$ und $|b \rangle$ ausdrücken und dadurch die Normierung der Amplituden festlegen kann. Andererseits hat Mandelstam (s. dies. Zbl. 67, 446) einen Ausdruck für das Matricelement der Stromdichte $\langle b | j_\mu(x) | a \rangle$, im Falle, daß eines der gebundenen Teilchen geladen ist, angegeben. Die Normierung der Ladung bestimmt dann die Normierung der Bethe-Salpeter-Amplituden. In der vorliegenden Arbeit wird die Äquivalenz der beiden Normierungsverfahren bewiesen. *G. Wanders.*

Królikowski, W. and J. Rzewuski: Relativistic two-body problem in one-time formulation separation of angular variables in the case of one-quantum interaction in electrodynamics. Acta phys. Polon. 15, 321—341 (1957).

Verff. haben in einer früheren Arbeit (s. dies. Zbl. 66, 227) aus der mehrzeitigen Bethe-Salpeter-Gleichung und Günther-Gleichung für zwei Fermionen eine einzeitige Gleichung deduziert. Auf den Fall der Ein-Photonen-Wechselwirkung von zwei Elektronen spezialisiert, versuchen Verff. die Lösung dieser Gleichung. Eine solche Lösung könnte über die relativistischen und Retardierungs-Effekte eine Aufklärung geben. Zuerst transformieren sie die Gleichung in den Impulsraum, dann glückt es ihnen, die Winkelvariablen des relativen Impulses zu eliminieren. (Dazu war es nötig, auch das Eigenwertproblem des Drehimpulses für zwei Fermionen in ihren Einzelheiten zu behandeln.) Endlich gelangt man zu einer Form der Energie-

Eigenwert-Gleichung, worin nur eine unabhängige Variable (der Absolutbetrag des Drehimpulses) vorkommt. (Dies war im Falle der Bethe-Salpeter-Gleichung nicht möglich.) Die Eigenfunktion hat aber acht Spinorkomponenten. Die weitere Behandlung dieser Gleichung wäre nur mit numerischen und Perturbations-Methoden möglich.

G. Marx.

Siegert, A. J. F. and Ei Teramoto: Simplified derivation of the binary collision expansion and its connection with the scattering operator expansion. *Phys. Review* II. Ser. **110**, 1232—1234 (1958).

Die Arbeit bezieht sich auf Überlegungen von Lee, Huang und Yang (dies. Zbl. **77**, 450). „Vereinfacht“ ist die im Titel angegebene Ableitung wohl nur für den, der im Watsonschen Streuformalismus (dies. Zbl. **73**, 228) und früheren Arbeiten des ersten der Verff. und D. A. Darling [*Phys. Review*, II. Ser. **86**, 621 (1952); *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **42**, 525—529 (1956)] zu Hause ist. Die ebenfalls im Titel erwähnte Verknüpfung der Entwicklung nach Zweierstößen mit der Entwicklung der Streumatrix ergibt sich als Laplacetransformation.

W. Klose.

Sokoloff, J. and M. Hamermesh: Calculation of scattering from a complex square well by a variational method. *Ann. of Phys.* **2**, 157—165 (1957).

Es werden numerische Berechnungen der Streuung an einem komplexen rechteckigen Potentialwall durchgeführt, wobei ein einfaches Variationsverfahren Verwendung findet. Dabei geben die Verff. die Phasenverschiebungen für alle Drehimpulse in geschlossener und für numerische Berechnung handlicher Form an.

P. Urban.

Karpman, V. J. (V. I.): On the *S*-matrix for particles with arbitrary spin. *Soviet Phys., JETP* **3**, 934—940 (1957), Übersetz. von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **30**, 1104—1111 (1956).

L'A. généralise le formalisme de la théorie quantique des champs au cas des particules de spin quelconque en interaction avec un champ magnétique. A partir de relations de commutation établies précédemment [V. I. Karpman, *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **21**, 1337—1349 (1951) et Thèse *Phys. Inst. Acad. Sci. SSSR* 1954], l'A. définit les diverses fonctions de Green associées aux corpuscules de spin quelconque et détermine les éléments de la matrice *S* correspondante.

G. Petiau.

Klein, O.: Some remarks on the inversion theorems of quantum field theory. *Nuclear Phys.* **4**, 677—686 (1957).

Verf. untersucht sein fünfdimensionales Modell einer allgemeinen Feldtheorie [*Helv. phys. Acta*, Suppl. IV, 58 (1956)] im Hinblick auf Spiegelungsinvarianz und Ladungskonjugation.

M. R. Schafroth.

Winogradski, J.: Représentations spinorielles fondamentales du groupe de Lorentz général et retournements de l'espace du temps et de l'univers. *J. Phys. Radium* **19**, 159—165 (1958).

La représentation est dite „normale“ si, pour l'un des 3 sous-groupes considérés, sa dimension est réduite à 1; ceci se traduit par la diagonalité de l'une des 3 matrices $\gamma^1, \gamma^{123}, \gamma^{1234}$. La discussion définit les types de spineurs répondant à ces desiderata.

O. Costa de Beauregard.

McLennan jr., James A.: Improper Lorentz transformations. *Phys. Review*, II. Ser. **109**, 986—989 (1958).

On donne explicitement les représentations irréductibles du groupe de Lorentz généralisé, incluant les retournements d'axes d'espace et de temps. Deux descriptions du retournement du temps sont successivement considérées: le retournement d'axe proprement dit, opération linéaire *R*, et le retournement à la Wigner, $T = R \cdot C$.

O. Costa de Beauregard.

Lüders, Gerhart and Bruno Zumino: Connection between spin and statistics. *Phys. Review*, II. Ser. **110**, 1450—1453 (1958).

Die Verff. geben einen neuen Beweis für den wohlbekannten Zusammenhang

zwischen Spin und Statistik quantisierter Felder. Der Beweis stützt sich auf die folgenden Voraussetzungen: I. die Theorie ist invariant bei gewöhnlichen Lorentztransformationen (ohne Spiegelungen), II. zwei Operatoren desselben Feldes sind entweder vertauschbar oder haben für raumartige Abstände einen verschwindenden Antikommutator, III. das Vakuum ist der Zustand kleinster Energie, IV. die Metrik des Hilbertraumes ist positiv definit und schließlich V. keiner der Feldoperatoren ist identisch null, wenn er auf das Vakuum angewendet wird. Für ein skalares Feld geht der Beweis etwa wie folgt: Aus Lorentzinvarianz allein wird geschlossen, daß der Vakuumerwartungswert des Kommutators $\langle 0 | [\Phi(x), \Phi(y)] | 0 \rangle$ für raumartige Abstände $x - y$ wegen der Antisymmetrie verschwinden muß. Wird dann gleichzeitig die Vertauschungsrelation $\{\Phi(x), \Phi(y)\} = 0$ für $x - y$ raumartig (die falsche Statistik) postuliert, so folgt, daß $\langle 0 | [\Phi(x), \Phi(y)] | 0 \rangle$ für raumartige Abstände verschwindet. Da dieser letzte Ausdruck eine analytische Funktion der Größe $(x - y)^2$ ist, folgt aber, daß er überall verschwinden muß, was der Voraussetzung V oben widerspricht. Mit Hilfe der Voraussetzung II erhält man dann das gewünschte Ergebnis. Für Teilchen mit höherem Spin werden die formalen Rechnungen ein wenig komplizierter, aber das Argument ist im wesentlichen dasselbe. Eine ähnliche Diskussion ist auch etwa gleichzeitig von N. Burgoyne [Nuovo Cimento, X. Ser. 8, 607—609 (1958)] publiziert worden.

G. Källén.

Heisenberg, W.: Application of the Tamm-Dancoff-method to the Lee-model. Nuclear Phys. 5, 195—201 (1958).

Die sogenannte „neue Tamm-Dancoff Methode“ wird hier auf das Leesche Modell angewendet. Da dies Modell so konstruiert worden ist, daß schon die „alte Tamm-Dancoff Methode“ hier die exakte Lösung gibt, ist es vielleicht nicht allzu erstaunlich, daß auch die neue T.-D.-Methode hier funktioniert und die richtige Lösung liefert. Doch scheint es dem Ref. ein wenig kühn, wenn am Ende der Arbeit der Verf. hieraus Schlüsse über die Genauigkeit der neuen T.-D.-Methode bei komplizierteren Fällen wie z. B. bei seiner nicht-linearen Spinortheorie ziehen will.

G. Källén.

Fairlie, D. B. and J. C. Polkinghorne: The solutions of the Low equation. I, II. Nuovo Cimento, X. Ser. 8, 345—349; 555—559 (1958).

Teil I: Castillejo, Dalitz und Dyson (s. dies. Zbl. 70, 226) haben gezeigt, daß die Lösung der Low-Gleichung (F. E. Low, dies. Zbl. 64, 219) gewisser Streuprobleme nicht eindeutig bestimmt ist, und Dyson [Phys. Review, II. Ser. 106, 157—159 (1957)] hat eine Klasse von Modellen angegeben, derart, daß jedes Modell einer bestimmten Lösung derselben Low-Gleichung entspricht. Ausgangspunkt der besprochenen Arbeit ist eine Untersuchung von Haag [Nuovo Cimento, X. Ser. 5, 203—215 (1957)]. Verff. zeigen, daß die allgemeine Lösung einer Low-Gleichung ein System definiert, in welchem die ungestörte Hamiltonfunktion H_0 Eigenzustände $|\alpha\rangle$ besitzt, die asymptotisch mit keinem Streuzustand $|\vec{k}\rangle$ der totalen Hamiltonfunktion H übereinstimmen. Dies ist in den Dysonschen Modellen auch der Fall, und der Zusammenhang zwischen den Zuständen $|\alpha\rangle$ und dem durch die Low-Gleichung nicht bestimmten Teil der Streuamplitude wird nachgewiesen. — Teil II: Im Falle einer separablen Wechselwirkung ist die Low-Gleichung eine Integralgleichung für eine Funktion $h(z)$, aus welcher man die Streuamplitude berechnen kann. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung besitzt Nullstellen z_i auf der reellen Achse, die durch die Gleichung nicht bestimmt sind. Es wird hier eine Methode angegeben, die, im Falle einer separablen Wechselwirkung, einen eindeutigen Ausdruck von $h(z)$ liefert. Die Nullstellen auf der reellen Achse sind $z_i = E_i$, wo E_i die diskreten Energieeigenwerte der ungestörten Hamiltonfunktion H_0 sind. Dadurch wird das Ergebnis von Teil I in einem Spezialfall explizit bestätigt.

G. Wanders.

Ma, S. T.: The causal function and the causality condition. Nuclear Phys. 7, 163—168 (1958).

Jeder Term S_n der störungstheoretischen Entwicklung der S -Matrix läßt sich in bekannter Weise mit Hilfe von kausalen, oder Feynman-Propagatoren Δ_c darstellen. Es wird eine Zerlegung von S_n angegeben, in welcher nur retardierte und avancierte Propagatoren Δ_R und Δ_A vorkommen, und zwar derart, daß ein retardierter Propagator immer positive Energie, ein avancierter Propagator negative Energie fortpflanzt. S_n ist daher im Stueckelbergschen Sinne kausal; positive Energie kann sich nur ins Futurum fortpflanzen, und mit einer Geschwindigkeit, die kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist.

G. Wanders.

Filippovič (Filippovich), E. I.: Structure of the diverging integrals of the S -matrix in the α -representation. Ukrain. mat. Žurn. 10, 84—89 (1958) [Russisch].

A Feynman diagram with n vertices and L internal lines is associated with an integral over the momenta p_1, p_2, \dots, p_L of the internal lines. The integrand is the product of δ -functions, one for each vertex, expressing momentum conservation, and of propagation functions, one for each of the internal lines. In the „ α -representation“ the propagation function for the l -th line is expressed as an integral from zero to infinity over the variable α_l , with an integrand which is the product of the Lorentz invariant exponential $\exp[i\alpha_l(p_l^2 - m_l^2 + i\epsilon)]$, a polynomial in p_l , and a Pauli-Villars regularization factor $I_M(\alpha_l)$. Purpose of the note is to show how the integration over the L momenta can be performed explicitly and to study the structure of the remaining integral over the variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L$. The integrations over $n-1$ momenta having been performed with the aid of the δ -functions, the integral is reduced to one with respect to the variables α and to $r = L - n + 1$ momenta. The sum of the exponents of the propagation functions becomes a polynomial of second degree in p_1, \dots, p_r and $k_1 \dots k_{n-1}$, the latter being the momenta of $n-1$ of the external lines, which is diagonalized by a linear transformation yielding the product of r Gauss' integrals which are immediately evaluated. The remaining integrals over the α 's involve the expression $\exp\left[i\sum_{a,b=1}^{n-1} A_{ab} k_a k_b\right]$, where A_{ab} denotes a rational homogeneous function of α , whose properties are fully discussed.

E. Corinaldesi.

Blank, V. Z., V. L. Bonč-Bruevič (Bonch-Bruevich) and D. V. Širkov (Shirkov): Remarks on the multiplicative renormalization group in the quantum theory of fields. Soviet Phys., JETP 6, 204—205 (1958), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 33, 265—266 (1957).

Verff. machen die Bemerkung, daß die sogenannte „Renormierungsgruppe“ nicht von der Störungstheorie abhängt, sondern auch unabhängig davon bewiesen werden kann. Es war dem Ref. unbekannt, daß diese Bemerkung nicht schon aus den Originalarbeiten von Bogoljubov und Širkov (dies. Zbl. 64, 449; 65, 220; 70, 444) evident ist, aber da Širkov einer der Verff. der vorliegenden Arbeit ist, muß man ihm diesen Punkt wohl glauben.

G. Källén.

Blochineev, D. I.: Nichtlokale und nichtlineare Feldtheorien. Fortschr. Phys. 6, 246—269 (1958), Übersetzung aus Uspechi fiz. Nauk 61, 137 (1957).

Verf. gibt eine historische Übersicht über die Entwicklung dieser zwei Arten von Feldtheorien. Hierbei werden russische Arbeiten recht sorgfältig besprochen, während z. B. die nach Meinung des Ref. für die Beurteilung der Konsistenz solcher Theorien sehr wichtige Arbeit von Stückelberg und Wanders (s. dies. Zbl. 57, 438) überhaupt nicht erwähnt wird. Als Zusammenfassung der Diskussion schreibt der Verf. „Man darf die vorhergehende Analyse der nichtlokalen und nichtlinearen Feldtheorie nicht als einen erschöpfenden Beweis für die Unmöglichkeit der Konstruktion einer in sich widerspruchsfreien Theorie des betrachteten Typus ansehen. Unsere Analyse führt jedoch zu einer pessimistischen Prognose. Es besteht

der Eindruck, daß diese beiden Richtungen in der Erweiterung der Feldtheorie ihr Ziel verfehlen. Sie sind so allgemein, daß in beiden Richtungen grundlegende Züge der modernen Quantentheorie und der Relativitätstheorie enthalten sind. Sie stellen nur eine Modifikation der gegenwärtigen Anschauungen dar¹. Am Schluß der Arbeit betont Verf. besonders die Schwierigkeiten, die bei einer theoretischen Behandlung der starken Wechselwirkungen auftreten, und spricht die Vermutung aus, daß eher als eine Begrenzung der Lokalisierbarkeit diese Wechselwirkungen in einer zukünftigen Theorie eine grundlegende Rolle spielen würden. *G. Källén.*

Sunakawa, Sigenobu: Quantum electrodynamics with the indefinite metric. Progress theor. Phys. 19, 221—237 (1958).

Der erste Teil der vorliegenden Arbeit enthält eine sehr ausführliche Diskussion der indefiniten Metrik in der Quantenelektrodynamik. Der Verf. betont besonders den Unterschied zwischen einer Darstellung, wo die Zustände mit Hilfe der einlaufenden Teilchen klassifiziert werden, und der Darstellung, wo Zustände mit nackten Teilchen benützt werden. Nur in der ersten Darstellung ist es zweckmäßig, die indefinite Metrik mit Hilfe der Zahl der skalaren Photonen zu definieren, während eine ähnliche Definition in der anderen Darstellung zu großen formalen Komplikationen führt. Der Ref. hat gegen diesen Teil der Arbeit keine direkten Einwände, aber vielleicht einige Schwierigkeiten, etwas wesentlich Neues darin zu finden. Im zweiten Teil der Arbeit wird die Aussage gemacht, daß die Benützung der indefiniten Metrik nicht invariant wäre — eine Aussage, womit der Ref. nicht einverstanden ist. Das Argument ist das folgende. Bei einer Lorentztransformation werden die Operatoren F der Theorie und die Zustände Φ mit einem Operator \mathcal{Q} nach $F' = \mathcal{Q}^{-1} F \mathcal{Q}$; $\Phi' = \mathcal{Q}^{-1} \Phi$ transformiert. Wegen der indefiniten Metrik ist der Operator \mathcal{Q} nicht unitär. Der Verf. findet, nach einer Diskussion von infinitesimalen Transformationen, das an sich richtige und schon von K. Bleuler (dies. Zbl. 40, 424) gefundene Ergebnis, daß \mathcal{Q} die Bedingung $\mathcal{Q}^{-1} = \eta \mathcal{Q}^* \eta$ erfüllt. Wie Bleuler in der oben erwähnten Arbeit bemerkt, bedeutet dies eben, daß die Norm eines Zustandes invariant bleibt.

$$\langle \Phi' | \eta | \Phi' \rangle = \langle \Phi | (\mathcal{Q}^*)^{-1} \eta \mathcal{Q}^{-1} | \Phi \rangle = \langle \Phi | \eta | \Phi \rangle.$$

Aus Gründen, die dem Ref. unverständlich geblieben sind, macht der Verf. der vorliegenden Arbeit auch eine Transformation des metrischen Operators η entweder nach $\eta' = \mathcal{Q}^{-1} \eta \mathcal{Q}$ oder nach $\eta' = \mathcal{Q}^* \eta \mathcal{Q}$. In beiden Fällen erhält er verschiedene Werte der Norm eines Zustandes in verschiedenen Koordinatensystemen.

G. Källén.

Scott, J. M. C.: Scattering of polarized positrons by polarized electrons. Philos. Mag., VIII. Ser. 2, 1472—1474 (1957).

Ein Positron mit der Energie $\gamma m c^2$ stoße auf ein ruhendes Elektron, dessen Spin in der Bewegungsrichtung des Positrons orientiert sei. Der Spin des Positrons selbst in der Bewegungsrichtung sei entweder $+1/2$ oder $-1/2$. Verliert das Positron den Bruchteil w seiner kinetischen Energie $(\gamma - 1) m c^2$ und wird es im Beobachtungssystem unter dem Winkel λ abgelenkt, so beträgt der differentielle Streuquerschnitt

$$d\sigma = r_0^2 \cos \lambda \cdot Q \cdot 2\pi \sin \lambda \, d\lambda / [1 + \frac{1}{2} (\gamma - 1) \sin^2 \lambda]^2$$

mit $r_0^2 = (e^2/mc^2)^2$. Bhabha gab für Q nur einen Mittelwert für die beiden möglichen Spinstellungen des einfallenden Positrons relativ zum ruhenden Elektron an. Der Verf. gibt auch explizite Werte für $Q(\rightarrow \rightarrow)$ und $Q(\rightarrow \leftarrow)$, die allerdings zu kompliziert sind, um hier wiedergegeben werden zu können. Durch Mittelung aus beiden folgt genau der Bhabhasche Wert. Auch für den Fall der Streuung von polarisierten Elektronen an polarisierten Elektronen werden die Werte $Q(\rightarrow \rightarrow)$ und $Q(\rightarrow \leftarrow)$ angegeben und gezeigt, daß durch Mittelung derselben der Mollersche Wert resultiert.

Th. Seel.

Loskutov, Ju. M. (Iu. M.) and A. B. Kubanov: On the polarization of the Cerenkov radiation from a fast particle carrying a magnetic moment. Soviet Phys., JETP 7, 328—331 (1958), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 34, 477—482 (1958).

Mit den Mitteln der phänomenologischen Quantenelektrodynamik werden die Polarisationseigenschaften der von einem gleichförmig in einem Medium bewegten Teilchen mit magnetischem Moment emittierten Strahlung untersucht. Es wird gezeigt, daß diese Strahlung aus zwei Anteilen besteht, von denen der eine polarisiert ist und an der Schwelle verschwindet, während der andere, unpolarisierte Anteil, der mit Spin-Übergängen verknüpft ist, hier endlich bleibt. Ferner wird auf klassischem Wege der Energieverlust eines derartigen Teilchens beim Durchgang durch ein Medium mit frequenzabhängigen Materialkonstanten berechnet, und zwar unter der Voraussetzung, daß magnetisches Moment und Geschwindigkeit gleichgerichtet sind, da dann in bezug auf das Laborsystem kein elektrisches Dipolmoment auftritt. Die Maxwell-Gleichungen lassen sich unter diesen Annahmen leicht auf diejenigen reduzieren, die das entsprechende Problem für eine Punktladung beschreiben. Die von dort bekannte Aufteilung des Energieverlustes in Bohrsche Verluste und Cerenkov-Strahlung wird durchgeführt.

H. Puff.

Sugawara, Masao: Static model in the meson theory. Progress theor. Phys. 18, 383—395 (1957).

Verf. versucht ein statisches Modell vom Chew-Low-Wickschen Typus aus der vollständigen relativistischen pseudoskalaren Mesonentheorie abzuleiten, indem er letztere einer kanonischen Transformation vom Foldy-Dysonischen Typus unterwirft und dann zu statischen Nukleonen übergeht. Nachher wird auf diesen transformierten Hamiltonoperator der Chew-Low-Formalismus angewandt, wobei Meson-Nukleon-Streuung und Photoerzeugung behandelt werden. Dabei stellt sich heraus, daß die renormierten Kopplungskonstanten nicht eindeutig bestimmt sind. Qualitativ stimmen die erzielten Resultate mit den Experimentaldaten bei kleinen Energien überein.

M. E. Mayer.

Dykman, I. M. and S. I. Pekar: Nucleomesodynamics in strong coupling. III: Translational motion, meson-field mass and magnetic moment of the nucleon. Soviet Phys., JETP 3, 882—894 (1957), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 30, 1125—1141 (1956).

Les AA. reprennent la théorie développée dans les parties (I) et (II) [Pekar, ce Zbl. 72, 449; et Bajer et Pekar, Soviet Phys., JETP 3, 340—350 (1956)] en attribuant maintenant au nucléon une masse finie et en tenant compte de l'influence du mouvement de translation. Une méthode d'approximation est introduite basée sur un développement de la fonction d'ondes en série de puissances de l'inverse de la masse du nucléon. Cette méthode permet notamment le calcul des moments magnétiques du proton et du neutron. La différence entre ces moments magnétiques peut être expliquée en renonçant à l'hypothèse du cas limite de couplage fort.

G. Petiau.

Salzman, George and Freda Salzman: Solutions of the static theory integral equations for pion-nucleon scattering in the one-meson approximation. Phys. Review, II. Ser. 108, 1619—1628 (1957).

Die Chew-Lowsehen Integralgleichungen für die Streuung von Mesonen an Nukleonen werden numerisch gelöst und die erhaltenen Lösungen eingehend diskutiert.

M. E. Mayer.

Tanaka, Katsumi: Application of dispersion relations to S-wave meson-nucleon scattering. Phys. Review, II. Ser. 108, 1629—1636 (1957).

Im Anschluß an Chew, Goldberger, Low und Nambu, untersucht Verf. die Energieabhängigkeit der S-Phasen für Meson-Nukleon-Streuung bei niedrigen Energien mit Hilfe von Dispersionsbeziehungen. Die Energieabhängigkeit wird

erhalten, indem die P -Phasen aus den linken Seiten der Dispersionsbeziehungen ausgeschlossen werden (unter Voraussetzung daß die $(3,3)$ -Resonanz für das Dispersionsintegral dominant ist). Die Einwirkung der D -Wellen auf die S -Phasen wird angegeben und numerische Werte für die S - und P -Streulängen berechnet.

M. E. Mayer.

Popov, Ju. M. (Ju. M.): Scattering of π -mesons on nucleons in higher approximations of the Tamm-Dancoff method. Soviet Phys., JETP 5, 131—133 (1957), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 32, 169—171 (1957).

Die Nukleon-Meson-Gleichung für den Zustand mit der Ladungsquantenzahl (isotopen Spin) $I = 3/2$ der Tamm-Dancoff-Methode wird in höherer Näherung als bisher untersucht. Zu diesem Zweck werden die Gleichungen renormiert und eine 4-Teilchen-Näherung benützt. Die Phasenverschiebung der S -Welle für die Streuung von π -Mesonen an Nukleonen ergibt sich zu

$$\delta_S = -\arctan [\pi q_0 \omega_{q_0} E_{q_0} / (E_{q_0} + \omega_{q_0})] \cdot u(q_0)$$

[betreffs der Definition von $u(q)$ vgl. die Originalmitteilung]. *Th. Seel.*

Machida, Shigeru: Pion-nucleon scattering and the structure of the pion. Progress theor. Phys. 18, 467—482 (1957).

Bei den Streuversuchen von Pionen an Nukleonen wurde gefunden, daß die Streuung der P -Welle durch die ladungs-unabhängige Mesonentheorie qualitativ gedeutet werden konnte, während dies merkwürdigerweise für die Streuung der S -Welle nicht der Fall ist. Es scheint für die S -Wellen-Streuung der Einfluß sowohl einer virtuellen Erzeugung von Nukleon-Antinukleon-Paaren als auch der elektromagnetischen Eigenschaften einschließlich des anomalen magnetischen Moments der Nukleonen eine bedeutende Rolle zu spielen. Es wird daher zur Erklärung der Experimente versucht, das Pion als einen gebundenen Zustand von Nukleonen-paaren aufzufassen, wobei allerdings die Klärung der primären Wechselwirkung zwischen den konstituierenden Bestandteilen der Pionen offen bleibt. Die experimentellen Züge der S -Wellen-Streuung beinhalten einerseits eine ungewöhnliche Kleinheit der Streuphasen, andererseits eine große Abhängigkeit von den Werten des isotopen Spins. Diese bedeutungsvolle Abhängigkeit von den Werten des isotopen Spins hat bisher keine Rechnung auf Grund der ladungsunabhängigen pseudoskalaren Mesonentheorie ergeben können. Diese Schwierigkeit bleibt in erster Näherung auch für eine Theorie der Streuung aus zusammengesetzten Pionen bestehen, wengleich die Berücksichtigung der höheren Wechselwirkung von aus Nukleon-Antinukleon-Paaren zusammengesetzten Pionen mit einzelnen Nukleonen zumindest qualitativ die gesuchte Abhängigkeit vom isotopen Spin ergeben zu können scheint.

Th. Seel.

Nambu, Y.: Dispersion relations for form factors. Nuovo Cimento, X. Ser. 9, 610—623 (1958).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit des Verf. [Nuovo Cimento, X. Ser. 6, 1064—1083 (1957)] wird die Gültigkeit von Dispersionsrelationen für Formfaktoren in der Störungstheorie unter allgemeinen Voraussetzungen untersucht. Für Nukleonen folgen dabei die bekannten Ergebnisse. In allgemeineren Fällen, wie bei Hyperonen oder gebundenen Systemen, ergeben sich jedoch Abweichungen von dem bisher angenommenen Einfluß der Massen der wechselwirkenden Teilchen auf das Massenspektrum in den Dispersionsrelationen. Diese Tatsache ist für die Anwendung dieser Dispersionsrelationen von wesentlicher Bedeutung.

F. Engelmann.

● **Wilson, J. G. and S. A. Wouthuysen** (edited by): Progress in elementary particle and cosmic ray physics. Vol. IV. Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1958. XII, 470 p. Guilders 45,—.

Inhaltsverzeichnis: I. B. d'Espagnat and J. Prentki: Some theoretical aspects of the strong interactions of the new particles. S. 1—69. II. W. D. Walker: The properties and production of K -mesons. S. 71—103. III. G. N. Fowler and A. W. Wolfendale: The interaction

of π -mesons with matter. S. 105—202. IV. **Singer, S. F.:** The primary cosmic radiation and its time variations. S. 203—335. V. **V. L. Ginzburg:** The origin of cosmic radiation. S. 337—421. In diesem Zbl. wird nur das 1. Kapitel einzeln besprochen (s. folgendes Referat). *G. Höhler.*

Espagnat, B. d' and J. Prentki: Some theoretical aspects of the strong interactions of the new particles. Progress in elementary particle and cosmic ray physics 4, 1—69 (1958).

Der vorliegende Bericht beginnt mit einer Einführung in die Theorie von Gell-Mann und Nishijima und bringt dann die im wesentlichen gleichwertige Formulierung der Verff. [vgl. Nuclear Phys. 1, 33—53 (1956)], bei der neben der Drehinvarianz im isobaren Spinraum noch die Invarianz gegen Spiegelungen gefordert wird (§ 2). Zur weiteren Einschränkung der verbleibenden Willkür kann die Invarianz gegen bestimmte Substitutionen gefordert werden, die z. T. mit Invarianzeigenschaften in einem 4-dimensionalen isobaren Spinraum und Euklidischer bzw. Lorentz-Metrik gleichwertig sind (§ 3). Abschließend folgt eine Diskussion des Compound-Modells der Elementarteilchen, der (inzwischen überholten) Paritätsdublett-Theorie und im Anhang der Eigenschaften eines Spinors bei Spiegelung im dreidimensionalen Raum. Die Literatur wurde bis Anfang 1957 berücksichtigt.

G. Höhler.

Kernphysik:

Ryndin, R. M. and Ja. A. (Ja. A.) Smorodinskij (Smorodinskii): Minami transformation for nucleon-nucleon scattering. Soviet Phys., JETP 5, 976—980 (1957), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 32, 1200—1205 (1957).

Während es für den Fall der Streuung von Pionen an Nukleonen Transformationen der Streuphasen gibt, welche den Streuquerschnitt invariant lassen, nämlich z. B. $\delta_{j-1/2}^j \rightleftharpoons \delta_{j+1/2}^j$, existieren solche Transformationen für den Fall der Streuung von Nukleonen an Nukleonen nicht, da sie entgegen dem Symmetriecharakter des Problems zu einer Abhängigkeit vom absoluten Betrag $|m|$ der magnetischen Quantenzahl führen.

Th. Sexl.

Burke, Philip et William Laskar: Système intégrodifférentiel du problème de collision comprenant quatre nucléons. Cas de l'état de spin total 2. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 3044—3047 (1958).

Es seien insgesamt 4 Nukleonen (zwei Neutronen und zwei Protonen) gegeben. Die Zusammenstöße zwischen je zwei Gruppen der drei Gruppierungsmöglichkeiten (${}_1D^2, {}_1D^2; n, {}_2He^3; p, {}_1H^3$) werden unter der Voraussetzung untersucht, daß zwischen den beiden Protonen die Coulombkraft und zwischen je zwei Teilchen überdies die gleiche Kernzentalkraft, zusammengesetzt aus Wigner-, Heisenberg-, Majorana- und Bartlettkraft wirke. Der Gesamtspin der vier Nukleonen soll durch die Vektorsumme der Spins der beiden Gruppen der drei Gruppierungsmöglichkeiten gegeben sein. Die Variationsmethode ermöglicht eine Integro-Differentialgleichung für den Zustand des Gesamtspins 2 und ein System von drei gekoppelten Integro-Differentialgleichungen für den Singulett- und Triplettzustand aufzustellen. Für den Quintettzustand ($S = 2$) erhält man nach einer Integration über die Drehimpulsvariablen eine Integro-Differentialgleichung für die radialen Bestandteile, die eine Lösung in der üblichen Form

$$f_l(0) = 0 \quad \text{und} \quad f_l(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \sin \{kr - \tfrac{1}{2}l\pi - \alpha \ln 2kr + \arg \Gamma(l+1+i\alpha) + \delta e\}$$

mit $\alpha = M e^2/\hbar^2 k$ gestatten.

Th. Sexl.

Burke, Philip et William Laskar: Système intégrodifférentiel du problème de collision comprenant quatre nucléons. Cas des états de spin total 0 et 1. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 3158—3161 (1958).

Die im vorstehenden Referat geschilderte Methode wird auf den Singulett- ($S = 0$) und Triplettfall ($S = 1$) angewandt.

Th. Sexl.

Nagata, Sinobu, Ryoza Tamagaki, Saburo Amai and Toshio Marumori: On the collective model of internal motion of the nucleus to be coupled with the irrotational surface motion. *Progress theor. Phys.* **19**, 495—516 (1958).

Die Watanabesche Methode der Einführung des kollektiven Modells wird erweitert und verallgemeinert durch Berücksichtigung eines rotationsbehafteten Strömungsanteils im hydrodynamischen Bild der Nukleonenbewegung im Kern. Dadurch wird die Schwierigkeit im Zusammenhang mit dem Nichtverschwinden der Kommutatoren der kollektiven Impulse (Tomonaga) des rotationsfreien Modells verständlich als Folge des Auftretens der wirbelbehafteten Strömung. Ebenfalls zeigt sich, daß die Begründung des kollektiven Modells durch Einführung „überzähliger“ Variabler (Miyazima und Tamura) in konsistenter Weise die Berücksichtigung dieses Strömungsanteils bei der Aufstellung der Nebenbedingungen erfordert. Diese Schwierigkeiten werden in dem vorliegenden Modell geklärt. Die kollektive Bewegung wird durch neun Variable beschrieben, von denen fünf die bekannten Geschwindigkeitspotentiale der wirbellosen Strömung sind, eine die Kompressibilität berücksichtigt und drei die rotationsbehaftete Strömung beschreiben. In der Wahl der letzteren verbleibt eine gewisse Freiheit, welche dem phänomenologischen Charakter der Theorie entspricht. Der Vergleich mit den Versuchen, die bekannten Mängel des rotationsfreien kollektiven Modells im Zusammenhang mit den Trägheitsmomenten zu beheben, zeigt, daß diese im wesentlichen auf eine implizite Berücksichtigung des Rotationsanteils hinauslaufen. *H. Stolz.*

Mukherjee, P. N. and I. Dutt: On the axial stability of a deformed nucleus. *I. Indian J. Phys.* **32** (41), 165—173 (1958).

Unter der Voraussetzung, daß die Kernoberfläche eine Äquipotentialfläche ist, werden die Energieeigenwerte eines Teilchens in einem anisotropen Oszillatorpotential berechnet. Dabei zeigt sich, daß ihre Lage im Bereich der Seltenen Erden empfindlich von dem Deformationsparameter γ abhängt. Insbesondere ergeben sich für Ca^{40} zwei stabile Formen mit $\gamma = 0$ bzw. $\gamma = \frac{2}{3}\pi$, wobei die Energie des verlängerten Ellipsoids ($\gamma = 0$) um 2 MeV tiefer liegt als die des abgeplatteten ($\gamma = \pi$). Es wird erwartet, daß die unsymmetrische Form ($\gamma = \frac{2}{3}\pi$), deren Auftreten nicht erklärt wird, oberhalb der magischen Zahl 20 als stabile Konfiguration nicht mehr in Frage kommen wird. *H. Stolz.*

Lipkin, H. J. and S. Goldstein: Rotational properties of the two-dimensional anisotropic harmonic oscillator. I. Expectation values. *Nuclear Phys.* **5**, 202—210 (1958).

Es werden die Erwartungswerte für Operatoren angegeben, die für das einheitliche Kernmodell mit anisotropen Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators von Wichtigkeit sind. Die betrachteten Operatoren sind von Bedeutung in bezug auf die Beschreibung des Oszillatorsystems durch die individuellen und kollektiven Freiheitsgrade der Nukleonen. *F. Winterberg.*

Muto, Toshinosuke and Takashi Sebe: Electrodisintegration of He^4 nucleus. *Progress theor. Phys.* **18**, 621—636 (1957).

Es wird die unelastische Streuung von Elektronen an He^4 -Kernen behandelt, welche experimentell von der Stanford-Gruppe untersucht wurde. Dabei wird gezeigt, daß zwei Arten von Streuung im Wirkungsquerschnitt eine Rolle spielen, eine entspricht dem Falle, daß ein Nukleon durch direkte Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld hinausgeschleudert wird, die andere dem indirekten Prozeß, in welchem ein Nukleon durch Kernwechselwirkung mit einem anderen Nukleon, das mit dem elektromagnetischen Feld in Wechselwirkung tritt, hinausgeschleudert wird. Der Vergleich mit dem Experiment ist qualitativ gut bei Berücksichtigung des Näherungscharakters und der Rechenmethode. *P. Urban.*

Vašakidze, I. Š.: Die nicht-elastische Streuung schneller Neutronen an Deuteronen unter Berücksichtigung der Spin-Bahnwechselwirkung. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 18, 405—412 (1957) [Russisch].

Für die Berechnung der nichtelastischen Streuung schneller Neutronen an Deuteronen werden folgende Annahmen gemacht: 1. Nach dem Prinzip der Ladungsunabhängigkeit wird für die ($n\ p$) und ($p\ p$) Wechselwirkung ein Potential vom Yukawaschen Typus angesetzt. 2. Neben diesen Zentralkräften wird die Spin-Bahn-Wechselwirkung berücksichtigt. 3. Es wird die Gültigkeit der Bornschen Näherung vorausgesetzt. Für eine Energie der einfallenden Neutronen von 90 MeV ergibt sich in Übereinstimmung mit dem Experiment ein Wirkungsquerschnitt von 0,121 barn, wobei der Anteil der Zentralkräfte 0,067, der der Spin-Bahn-Wechselwirkung 0,054 barn beträgt. *Th. Sexl.*

Bosco, B. and S. Fubini: Phenomenological relation between electron and photon disintegration of nuclei. Nuovo Cimento, X. Ser. 9, 350—352 (1958).

Die Abspaltung eines Nukleons von einem Kern durch Wechselwirkung entweder mit einem Photon oder mit einem Elektron weist gewisse Analogien auf; insbesondere ist der sich in elektrischer Dipolnäherung ergebende Zusammenhang zwischen den totalen Zerfallsquerschnitten an anderer Stelle (E. Guth-C. J. Mullin, s. dies. Zbl. 34, 135) ausführlich untersucht worden. In der vorliegenden Arbeit werden die Beziehungen zwischen den entsprechenden differentiellen Zerfallsquerschnitten untersucht. Es wird gezeigt, daß sich beide — ebenfalls in elektrischer Dipolnäherung — auf die gleichen Funktionen $\alpha(E)$ und $\beta(E)$ der Primärenergie reduzieren lassen. Verff. weisen insbesondere darauf hin, daß man demzufolge aus einem Vergleich von Winkelverteilungsmessungen beider Prozesse nicht zu neuen Aussagen über die betreffenden Kern-Matrixelemente gelangen kann. *H. Puff.*

Meyer, P.: Contribution à l'étude des effets de courants d'échange dans la photo-désintégration du deutéron. Ann. de Physique, XIII. Sér. 2, 498—550 (1957).

Die Richtungsverteilung der abgehenden Protonen beim Kernphotoeffekt an Deuterium hängt im Energiebereich von etwa 10 bis 150 MeV empfindlich vom Charakter der $n - p$ -Wechselwirkung ab. Im Versuch beobachtet man einen hohen, mit der Energie wachsenden, isotropen Anteil; dies läßt auf beträchtliche Mitwirkung von virtuellen Mesonen oder auf eine stark singuläre Tensorkraft schließen. Hier wird nur der Mesonenaustausch ins Auge gefaßt. Erst wird die Wahrscheinlichkeit des Übergangs von einem gebundenen in einen freien Zustand kovariant formuliert; unter Verwendung einer phänomenologischen Wellenfunktion für den Grundzustand des Deuterons und einer Bethe-Salpeter-Funktion für die Reaktionsprodukte läßt sich dann die Übergangswahrscheinlichkeit nach Potenzen der Kopplungskonstante g^2 des Mesonenfeldes entwickeln. Nach langwierigen Rechnungen ergibt sich in zweiter und vierter Ordnung ein isotroper Term der richtigen Größenordnung. Man darf schließen, daß an der $n - p$ -Wechselwirkung bei mittleren Energien neben den zweifellos vorhandenen Eigenheiten der Tensorkraft auch der Mesonenaustausch merklich teil hat. *E. Breitenberger.*

Czyż, W. and J. Sawicki: Polarization of nucleons from the $D(\gamma, p)n$ reaction at medium energies. Phys. Review, II. Ser. 110, 900—905 (1958).

The polarization of $P(\theta)$ (θ is the angle between momenta of the photon and the neutron) of the neutrons from $D(\gamma, p)n$ is discussed theoretically. Continuation of the work by the same authors (W. Czyż and J. Sawicki, this Zbl. 80, 436). Here $E1$, $M1$ transitions and their interference with $E2$ and $M2$ transitions are taken into account. All relevant radial integrals are approximately evaluated (except one radial integral for the $E1$ transition leading to the final 3P_0 state: this is computed from experimental cross sections and the theoretical values for all other $E1$ radial integrals using Austern's [N. Austern, Phys. Review, II. Ser. 108, 973—982 (1957)] suggestion). The $n - p$ scattering phase shifts are taken from available analyses

[E. Clementel and C. Villi, this Zbl. **77**, 222; Clementel, Villi and Jess, Nuovo Cimento, X. Ser. **5**, 907—920 (1957); P. S. Signell and R. E. Marshak, Phys. Review, II. Ser. **106**, 832—834 (1957)]. It should be remarked that the polarization is sensitive to the $n - p$ phase shifts. Also experimental $P(\theta)$ can provide some information about the radial integrals. $P(\theta)$ is computed for 65 MeV photons. The most important corrections to $P(\theta)$ coming from $E1 - E2$ interferences roughly cancel out. The existence of $M1$ transition ($M1 - E1$ interference) gives rise to the asymmetry of $P(\theta)$ about 90° , which, is useful to determine the $M1$ contribution.

Y. Yamaguchi.

Ivash, E. V.: Internal conversion angular correlations. Nuovo Cimento, X. Ser. **9**, 136—144 (1958).

Die Winkelkorrelation zwischen einem γ -Strahl und einem Konversionselektron wird für folgende Fälle relativistisch bestimmt: 1. Mischung von magnetischer $2^1 - 1$ -pol-Strahlung und elektrischer 2^1 -pol-Strahlung mit innerer Konversion von s -, $p_{1/2}$ - und $p_{3/2}$ -Elektronen (K -, L_{I-} , L_{II} - und L_{III} -Schale) und 2. Mischung von elektrischer $2^1 - 1$ -pol-Strahlung und magnetischer 2^1 -pol-Strahlung mit innerer Konversion von $p_{1/2}$ und $p_{3/2}$ -Elektronen. Korrekturen bezüglich der endlichen Kerngröße und Abschirmung sind vernachlässigt.

O. Hittmair.

Passatore, G.: On polarization effects in Coulomb electron scattering. Nuovo Cimento, X. Ser. **6**, 850—863 (1957).

Verf. behandelt Polarisierungseffekte bei der Coulombstreuung des Elektrons unter Benutzung von Stokesschen Parametern. Da die Intensität und die Polarisierung eines Strahles durch vier reelle Parameter vollständig beschrieben werden kann, wird die Übergangswahrscheinlichkeit durch eine T -Matrix ausgedrückt und diese durch die S -Matrix. Die T -Matrix enthält die Stokesschen Parameter des gestreuten Strahles als Funktion des einfallenden Strahles. Diese Beziehung wird in erster Bornscher Näherung abgeleitet. Obwohl bekanntlich in dieser Näherung keine Polarisierungseffekte auftreten, ist es doch einfach, die Abhängigkeit der Spinrichtung vom Streuwinkel zu diskutieren. Verf. leitet einen Ausdruck für die T -Matrix ab, für ein allgemeines kugelsymmetrisches Feld ohne Benutzung der Bornschen Näherung und erörtert anschließend daran einige allgemeine Eigenschaften bezüglich des Polarisierungseffektes.

P. Urban.

● Syrett, J. J.: Nuclear reactor theory. („Nuclear Engineering“ Monographs. 2.) London: Temple Press Ltd. 1958. 12 s. 6 d. net.

Die neue Serie „Nuclear Engineering“ Monographs will in Einzeldarstellungen vom ungefähren Umfang eines Goeschen-Bändchens systematisch in die Gebiete der Kernenergietechnik einführen. Der nunmehr vorliegende Band über Reaktortheorie ist im wesentlichen auf die Verhältnisse der englischen Graphit-Reaktoren zugeschnitten, jedoch allgemein genug gehalten, um auf andere Typen anwendbar zu sein. Methodisch folgt das Buch weitgehend den bewährten Lehrbüchern. Bei aller Gedrängtheit der Darstellung erreicht es eine bemerkenswerte Klarheit in der Darstellung der physikalischen Grundideen, was der weniger mit den Problemen vertraute Leser vor allem bei der Behandlung des Einflusses der epithermischen Absorption in den Anhängen dankbar empfinden wird. Die Monographie muß naturgemäß in der Mathematik an der Oberfläche bleiben, gibt jedoch durch Andeutungen, durch nur im Ergebnis gebrachte Resultate und durch Literaturhinweise eine Menge Anregungen für weiterreichendes Studium.

W. Humbach.

Pál, L.: On the theory of stochastic processes in nuclear reactors. Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. **7**, 25—42 (1958).

The fundamental equations of the stochastic processes occurring in nuclear reactors are given in the most general form. The first one is a non-linear integral equation for the probability distribution of the neutrons according to their energy and direction of velocity, provided that at a time $t = 0$ only a neutron with given

energy and direction of velocity was present in a given point in the nuclear reactor. The possibility of absorption, scattering and fission is taken into account in the treatment, which follows the method developed by L. Janossy (s. this Zbl. **37**, 141). As remarked by the author it seems to be practically not feasible to find the general solution of this integral equation. For practical purposes not so much this distribution function itself, as rather its moments are required. For the determination of the moments an equation is found which is satisfied by the generating function of the distribution. From this equation the first and second moments are obtained. With the help of these moments integral equations are given for the average neutron density and for the neutron importance, introduced by L. N. Ussachoff (Proc. internat. Conf. Peaceful Use of Atomic Energy **5**, 503). Finally the transport equations are derived in the most general form from the first and second moments.

J. Mogyoródi.

Bau der Materie:

Coulson, C. A. and P. D. Robinson: Wave functions for the hydrogen atom in spheroidal coordinates. I: The derivation and properties of the functions. Proc. phys. Soc. **71**, 815—827 (1958).

Robinson, P. D.: Wave functions for the hydrogen atom in spheroidal coordinates. II: Interaction with a point charge and with a dipole. Proc. phys. Soc. **71**, 828—842 (1958).

I. In den üblichen elliptischen Koordinaten für 2-Zentren-Probleme $\xi = (r_a + r_b)/R$, $\eta = (r_a - r_b)/R$ (R gegenseitiger Abstand der Zentren a mit Ladung Z_1 und b mit Ladung Z_2) wird die Schrödingergleichung des Wasserstoff-Atoms ($Z_1 = 1$, $Z_2 = 0$) gelöst. Energie-Eigenwerte und Separationsparameter A werden berechnet. A entspricht der Quantenzahl l in Polarkoordinaten. Für die Hauptquantenzahlen $n = 1, 2$ und 3 werden A -Eigenwerte und Wellenfunktionen angegeben. Die Orthogonalität der Wellenfunktionen wird bewiesen. Die spheroidalen Wellenfunktionen sind die richtigen Ausgangsfunktionen für Störungen durch Punktladungen. Für $R \rightarrow 0$ gehen sie in die bekannten Wasserstofffunktionen in Polarkoordinaten über, wobei $A \rightarrow l(l+1)$ geht. Für $R \rightarrow \infty$ gehen sie in die Lösungen in parabolischen Koordinaten über. Aus den Eigenlösungen in Polar- oder parabolischen Koordinaten können die spheroidalen Lösungen berechnet werden als Linearkombinationen der Lösungen zu fester Hauptquantenzahl n und magnetischer Quantenzahl m . Es wird diskutiert, warum Lösungen zu $Z_2 \neq 0$ nicht in geschlossener Form gefunden werden können. — II. Hier Störungsrechnung 2. Ordnung in der Form ψ (gestört) $= \psi$ (ungestört) $(1 + F)$. Für die K - und L -Schale werden Energie, induziertes Dipol- und Quadrupolmoment bei Störung durch eine Punktladung (Ladung q , Abstand R) berechnet und die Energie bei Störung durch einen Dipol, dessen Achse senkrecht zur Verbindungslinie Atom-Dipol steht. Die Ergebnisse werden verglichen mit den Näherungen von Dalgarno und Mitarbeitern [vgl. z. B. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **238**, 276 (1956)], die die Störung nach Kugelfunktionen entwickeln. Eine weitere übliche Näherung besteht darin, daß der Beitrag der Ladungswolke außerhalb der Störung (der zu exponentiell abfallenden Gliedern in R führt) vernachlässigt wird. Die Fehler dieser Näherungen für verschiedene R werden angegeben.

E. Trefitz.

Golovin, N. N.: Berechnung des differentiellen Streuquerschnitts für ein Potential der Form $U = \alpha/r^n$. Izvestija Akad. Nauk USSR, Ser. fiz.-mat. **1958**, Nr. 5, 55—67 (1958) [Russisch].

Meligy, A. S.: Simple expansion for the regular Coulomb wave function. Nuclear Phys. **6**, 440—442 (1958).

Die von Shepanski und Butler (s. dies. Zbl. **70**, 220) angewandte Methode für die Entwicklung der radialen Coulombwellenfunktion wird modifiziert, um eine

einfachere Rekursionsbeziehung zwischen den einzelnen Termen zu erhalten. Die angegebene Entwicklung zeigt die gleiche Konvergenz und läßt sich einfacher handhaben.

P. Urban.

Urban, P.: Über die Streuung schneller Elektronen. Fortschr. Phys. 5, 93—121 (1957).

Die große Zahl von Arbeiten, welche in der letzten Zeit über das Gebiet der Streuung erschienen sind, lassen die Wichtigkeit dieses Problems für die moderne Physik nur zu deutlich erkennen. Dies ist auch der Grund der vorliegenden Arbeit, die eine Fortsetzung eines früheren Artikels [s. Fortschr. Phys. 3, 1 (1955)] darstellt, der den Veröffentlichungen bis zum Jahre 1954 gerecht wird. — Im ersten Abschnitt wollen wir die strenge Theorie der Integration der Dirac-Gleichung behandeln. Der zweite Abschnitt befaßt sich mit den Strahlungskorrekturen. Die beiden nächsten Abschnitte behandeln die Phasenanalyse bei der Streuung schneller Elektronen an Kernen, wobei der dritte Abschnitt die Analyse und ihre Überprüfung durch das Experiment allgemein behandelt und die von Hofstadter und Mitarbeitern gezogenen Schlüsse über die Ladungsverteilung in ausgedehnten Atomkernen enthält, während der vierte Abschnitt die theoretischen Berechnungen und Untersuchungen bez. der Exaktheit dieser Rechnungen beinhaltet. Im darauffolgenden Abschnitt behandeln wir kurz den Einfluß der Kerndispersion (virtuelle Anregung), während der letzte Abschnitt der Streuung an leichten Kernen unter Berücksichtigung des Rückstoßes vorbehalten ist. In diesem Abschnitt finden wir genauere Analysen bez. einer inelastischen Streuung infolge auftretender Kernanregungen sowie eine Phasenanalyse für die Streuung am Proton und Deuteron. Durch Vergleich mit den experimentellen Werten ergeben sich große Diskrepanzen, die voraussichtlich durch ein Versagen des Coulombgesetzes in Bereichen von 10^{-13} cm hervorgerufen werden. Unter Umständen muß die Hypothese der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte fallengelassen werden.

Aus der Einleitung.

Bernardini, M., P. Brovetto and S. Ferroni: Scattering of polarized electrons by a Coulomb field. Nuclear Phys. 8, 294—302 (1958).

Es wird der Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines polarisierten Fermionenstrahles an einem zentralen Feld mit Hilfe des Formalismus der Dichte-Matrix berechnet. Die gefundenen Gleichungen werden auf den Fall der Streuung von Elektronen an einem Coulombfeld angewendet. Anschließend daran wird das Doppelstreuexperiment diskutiert, wobei die Berechnung der longitudinalen Komponente der Elektronenpolarisation erörtert wird.

P. Urban.

Gajewski, Tomasz: Über die relativistischen Phasenverschiebungen der Partialwellen im statistischen Thomas-Fermi-Streufeld. Ann. der Physik, VII. F. 1, 299—304 (1958).

Es wird eine relativistische Methode zur Bestimmung der Phasenverschiebungen der Partialwellen für die Streuung von Elektronen am Thomas-Fermi-Atom entwickelt. Die Ergebnisse werden mit der nichtrelativistischen Theorie verglichen und gezeigt, daß durch Anbringung entsprechender Korrekturen an der nichtrelativistischen Theorie eine ausreichende relativistische Behandlung möglich ist.

P. Urban.

Gajewski, Tomasz: Über die asymptotischen Phasenverschiebungen in der Methode der Partialwellen bei Streuung von Elektronen am Thomas-Fermi-Atom. Ann. der Physik, VII. F. 1, 232—237 (1958).

Es wird gezeigt, daß das von Buchdahl [Ann. der Physik, VI. F. 17, 238—242 (1956)] angegebene Potential bei Anwendung der Hennebergschen asymptotischen Formel für die Phasenverschiebungen zu Ausdrücken führt, die integriert werden können. Die Resultate der Auswertung dieser Ausdrücke führen zur Übereinstimmung mit den entsprechenden numerischen Rechnungen.

P. Urban.

Tietz, T.: Streuvermögen von Atomen für Röntgen- und Elektronenstrahlen nach der statistischen Theorie des Atoms. Ann. der Physik, VII. F. 2, 41—45 (1958).

Verf. gibt geschlossene Formeln für die Intensität der inkohärenten Streuung von Röntgen- und Elektronenstrahlen an einem einzelnen neutralen Thomas-Fermi-Atom an und stellt die Resultate in Tabellenform dar.

P. Urban.

Preuss, H.: Die Methode der Atomassoziationen. Z. Naturforsch. 13a, 364—385 (1958).

Nach einem kurzen Überblick über quantenchemische Berechnungsmethoden wird das Moffittsche Verfahren [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **210**, 245 (1951)] der „Atome in Molekülen“ und das Bingselsche Verfahren (s. dies. Zbl. **77**, 233) der vereinigten Atome beschrieben und eine Synthese beider vorgeschlagen. Die genannten Verfahren benutzen die spektroskopisch bekannten Energien der Atome und berechnen nur die Wechselwirkungsenergie mit Näherungsfunktionen. Im ersten Fall wird ausgegangen von unendlich voneinander entfernten Atomen (Eigenfunktionen, $\psi_i^{(0)}$), im zweiten von im Schwerpunkt vereinigten Atomen (Eigenfunktionen $\psi_i^{(0)}$). Hier werden Eigenfunktionen der Form $\psi_i^{(0)} + p(R) \psi_i^{(\infty)}$ benutzt (R Abstand zweier Atome). $p(R)$ muß für kleine R Null und für große R unendlich werden. Es kann aus der Bedingung Energie=Minimum bestimmt werden. Die Methode wird am Wasserstoff-Molekül vorgeführt, für H_2 erhält man sehr gute Werte, für H_2^+ weniger, da dafür die benutzten Näherungsfunktionen sehr schlecht sind. Für Moleküle mit mehreren Atomen wird angegeben, wie die Wellenfunktionen aufzubauen sind aus denen, die die Annäherung verschiedener Paare und Gruppen von Atomen („Atomassoziationen“) beschreiben. Die entsprechenden Parameter $II(R_1, R_2, \dots)$ werden aus den $p(R)$ der Annäherung je 2er Atome aufgebaut. Am Beispiel von H_2CO und $CH_2(NH_2)COOH$ wird der Ansatz erläutert so weit, daß eine Rechnung danach ohne Schwierigkeiten durchgeführt werden könnte. *E. Trefftz.*

Arsac, A., L. Basquin, J. F. Denisse, J. L. Deleroix et J. Salmon: Calcul des valeurs propres de l'opérateur de collision élastique d'un gaz de Lorentz. Étude de quelques cas usuels. J. Phys. Radium **19**, 624—629 (1958).

Verf. berechnet die ersten Eigenfunktionen und Eigenwerte der Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichung für den elastischen Stoß in einem Lorentzischen Gas. Folgende Wechselwirkungspotentiale werden diskutiert: $1/r^4$ und starre Kugeln. *G. Kelbg.*

Taxman, N.: Classical theory of transport phenomena in dilute polyatomic gases. Phys. Review, II. Ser. **110**, 1235—1239 (1958).

Unter Berücksichtigung innerer Freiheitsgrade der Moleküle werden formale Gleichungen für die Koeffizienten der thermischen Leitfähigkeit, der Reibungsviskosität und der Volumviskosität abgeleitet. *G. Kelbg.*

Nettleton, R. E.: Intrinsic bulk viscosity in monatomic and diatomic gases. J. appl. Phys. **29**, 204—212 (1958).

In der Born-Green-Theorie der Transportprozesse wird die Kirkwoodsche Superpositionsapproximation für die ternäre Verteilungsfunktion verwendet. Es wird angenommen, daß die binäre Verteilungsfunktion nach den Gradienten der Temperatur, der Dichte und der Eulerschen Geschwindigkeit entwickelt werden kann. Bis zur dritten Ordnung werden die sich ergebenden Gleichungen diskutiert. Es wird eine Formel für die Volumviskosität (Zweierstöße) als Funktion anderer thermodynamischer und kinetischer Größen abgeleitet. *G. Kelbg.*

Mason, Edward A. and Homer W. Schamp jr.: Mobility of gaseous ions in weak electric fields. Ann. of Phys. **4**, 233—270 (1958).

Verf. benutzt die von Kihara (dies. Zbl. **53**, 180) erweiterte Chapman-Enskog-Theorie und leitet eine Formel für die Beweglichkeit gasförmiger Ionen her. Mit Hilfe numerischer Methoden werden die in den Koeffizienten der Potenzreihe nach dem Quadrat der Feldstärke eingehenden Stoßintegrale ermittelt. Berücksichtigt werden in der Rechnung folgende Kräfte: Ladung-induzierter Dipol, Ladung-induzierter Quadrupol, Londonsche Dispersionskräfte und ein Abstoßungspotential der Ordnung -12 . Vernachlässigt werden der Ladungsaustausch zwischen den Ionen und Molekülen, Cluster-Bildung und Quanten-Effekte. Die Theorie wird mit dem Experiment verglichen, geeignete Parameter werden für das Kraftgesetz aufgesucht. *G. Kelbg.*

Fester Körper:

Harrison, Walter A.: Cellular method for wave functions in imperfect metal lattices. Phys. Review, II. Ser. **110**, 14—25 (1958).

In Verallgemeinerung der Blochschen Form $\psi = u(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ der Elektroneneigenfunktionen in einem periodischen Gitter setzt Verf. für die Behandlung von beliebig gestörten Gittern die Eigenfunktionen der Elektronen als $\psi = U(\nabla, \mathbf{r}) \varphi$ (∇ = Nabla-Operator) an. Mit einer geeigneten, speziellen Wahl von U wird zur Bestimmung von φ und der Elektronenenergie in jeder Zelle eine Eigenwertgleichung abgeleitet. An den Rändern der ellipsoidisch vorausgesetzten Zellen, in denen das Potential kugelsymmetrisch angenommen wird, sind gewisse Randbedingungen zu erfüllen, wobei eine Entwicklung nach $\nabla\varphi$, also dem verallgemeinerten Ausbreitungsvektor eingeführt wird. Auf diese Weise wird eine Diagonalisierung des Hamilton-Operators in 2. Näherung für die Diagonalelemente, in 1. Näherung für die übrigen Matrixelemente erreicht. Die zur expliziten Berechnung nötigen Parameter sind für die Alkali- und Edelmetalle angegeben. Anschließend werden einige Typen von Gitterstörungen im einzelnen untersucht.

F. Engelmann.

Wallis, Richard F.: Effect of free end on the vibration frequencies of one-dimensional lattices. Phys. Review, II. Ser. **105**, 540—545 (1957).

Die üblichen Born-Kármáns periodischen Randbedingungen führen, wie bekannt, zu einem Bandspektrum der Schwingungsfrequenzen des Kristallgitters. Der Verf. befaßt sich mit einem eindimensionalen, zweiatomigen Kristall mit freien Enden. Es zeigt sich, daß in diesem Falle neue Frequenzen in den nicht erlaubten Zonen des Born-Kármán-Spektrums entstehen können. Dabei ist zu unterscheiden, ob die freien Enden mit Atomen verschiedener oder gleicher Art besetzt sind und im letzten Falle, ob es sich um schwerere oder leichtere Atome handelt. Die neuen Schwingungen haben den Charakter einer „Oberflächenschwingung“, die Amplituden nehmen mit der Entfernung von der Oberfläche rasch ab, ähnlich wie bei den lokalen Schwingungen in den Kristallen mit Defekten. Es ist die Berechnung der Amplituden der Oberflächenschwingungen in einer Kette mit ungefähr zwanzig Atomen durchgeführt und auf die Bedeutung dieser Randeffekte für die spezifische Wärme und optische Absorption kleiner Kristalle hingewiesen.

O. Litzman.

Newell, G. F.: Extreme frequencies of lattice vibrations for disordered binary alloys. Phys. Chem. Solids **6**, 190—194 (1958).

Klinger, M. I.: Magnetic susceptibility of a semiconductor with an impurity band in a strong magnetic field. Soviet Phys., JETP **6**, 292—298 (1958), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. **33**, 379—386 (1957).

Die Theorie der magnetischen Suszeptibilität eines Halbleiters mit Störbandleitung wird entwickelt. Die Endgleichungen enthalten Glieder, die die de Haas-van Alphen-Oszillationen beschreiben. Da die Ergebnisse stark von den Modellvorstellungen abhängen, erscheint eine Untersuchung der Suszeptibilität zur Erforschung der Störbänder in Halbleitern besonders günstig.

O. Madelung.

Kao, L. P. and E. Katz: Phenomenological theory of anisotropic isothermal galvanomagnetic effects. Phys. Chem. Solids **6**, 223—235 (1958).

Die Komponenten des Leitfähigkeitstensors eines Festkörpers im Magnetfeld werden analysiert für beliebige Orientierung der Kristallachsen zum elektrischen und magnetischen Feld, für beliebige Orientierung der Felder zueinander und für beliebige Kristallsymmetrie.

O. Madelung.

Hue, Jean et Joseph Seiden: Transitions par irradiation indirecte. C. r. Acad. Sci., Paris **244**, 2157—2160 (1957).

Wenn ein Kristall zwei verschiedene Arten A und B von Atomkernen enthält, und wenn sich B in paramagnetischer Resonanz befindet, so wird bei einer bestimmten Amplitude des angelegten Hochfrequenzfeldes auch A in eine Resonanz geraten,

indem die Spin-Spin-Kopplung zwischen A und B Übergänge zwischen den Zeemann-Niveaus von A erzwingt, welche ihrerseits mit der Präzession von A koppeln [E. L. Hahn und D. L. Kaplan, Bull. Amer. phys. Soc. **1**, 397 (1956)]. Verf. entwickeln die Theorie dieser Erscheinung in kubisch flächenzentrierten Kristallen; Resonanzfeldstärke, Übergangswahrscheinlichkeiten und Einfluß der Orientierung des statischen Magnetfeldes gegenüber den Kristallachsen werden abgeleitet.

E. Breitenberger.

Brueckner, K. A. and K. Sawada: Magnetic susceptibility of an electron gas at high density. Phys. Review, II. Ser. **112**, 328—329 (1958).

The magnetic susceptibility of an electron gas at high density is determined using the exact theory of Gell-Mann and Brueckner. Zusammenfassg. der Autoren.

Ledinegg, E. and P. Urban: Zur Theorie der Néelschen Kette. Acta phys. Austr. **12**, 144—154 (1958).

Auf Grund der vorausgegangenen Arbeit (s. dies. Zbl. **51**, 453) wird das magnetische Moment einer linearen Atomkette bei positivem Austauschintegral berechnet. In Erweiterung der genannten Arbeit ist hier eine beliebige Anzahl f nächster Nachbarn vorausgesetzt.

Aus der Zusammenfassg. der Autoren.

Levitas, Alfred and Melvin Lax: Statistics of the Ising ferromagnet. Phys. Review, II. Ser. **110**, 1016—1027 (1958).

Synthese der Bethe-Peierls-Weißschen cluster-Methode (s. dies. Zbl. **32**, 330) und des sphärischen Modells (Berlin und Kac, s. dies. Zbl. **47**, 457) zur Behandlung der Isingschen Approximation eines Ferromagnetikums. Die Rechnung ist durchgeführt für das quadratische Flächengitter und das einfach-kubische Raumgitter.

G. Heber.

Donnert, Hermann: Zur Theorie relativistisch invarianter Spinwellengleichungen. I, II. Acta phys. Austr. **11**, 321—354; 355—376 (1957).

Verf. entwirft eine klassische Feldtheorie für Teilchen beliebigen halbganzen Spins und vergleicht sie mit den entsprechenden existierenden Theorien. *G. Heber.*

Izjumov (Iziumov), Ju. A. (Ju. A.): Extension of the spin-wave model to the case of several electrons surrounding each site. Soviet Phys., JETP **5**, 866—872 (1957), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. **32**, 1058—1064 (1957).

Die Methode der genäherten zweiten Quantisierung wird verwendet, um die tiefsten angeregten Zustände eines ferro- oder antiferromagnetischen Kristalls zu berechnen, der mehrere Elektronen pro Gitterplatz besitzt. *G. Heber.*

Kittel, C.: Excitation of spin waves in a ferromagnet by a uniform rf field. Phys. Review, II. Ser. **110**, 1295—1297 (1958).

An einfachen Modellen wird diskutiert, unter welchen Voraussetzungen ein homogenes Radiofrequenz-Feld in einem isolierenden Ferromagneten Spinwellen erzeugen kann. Als wichtigste Bedingung erscheint die, daß für die Oberflächenatome eine merklich andere Kristallenergie gelten muß als für Atome im Inneren des Kristalls. Verf. weist darauf hin, daß entsprechende Experimente zu einer experimentellen Bestimmung der Austauschenergie-Konstanten führen können.

G. Heber.

Kittel, C.: Interaction of spin waves and ultrasonic waves in ferromagnetic crystals. Phys. Review, II. Ser. **110**, 836—841 (1958).

Mit Hilfe der bekannten halbklassischen Feldtheorie der Spinwellen wird deren Wechselwirkung mit Ultraschallwellen abgeschätzt. Interessante und eventuell technisch wichtige Effekte treten auf, wenn die Frequenzen und Wellenlängen der Ferromagnonen und der Phononen übereinstimmen. *G. Heber.*

Schlömann, E.: Spin-wave analysis of ferromagnetic resonance in polycrystalline ferrites. Phys. Chem. Solids **6**, 242—256 (1958).

Stolz, Hubertus: Zum Phänomen der Entelektisierung in kleinen leitenden Körpern in einem ausgedehnten elektromagnetischen Hochfrequenzfeld. Ann. der Physik, VII. F. **1**, 334—343 (1958).

Der aus der Elektrostatik geläufige Ansatz für das Entelektrisierungsfeld wird auf den Fall eines leitenden Körpers übertragen, dessen Abmessungen sowie Eindringtiefe des Skineffektes klein sind gegen die Wellenlängen eines elektromagnetischen Hochfrequenzfeldes innerhalb und außerhalb des Körpers. Mit Hilfe der Boltzmann-Gleichung werden Stromdichte und inneres Feld in Abhängigkeit vom äußeren Feld berechnet und die auftretenden Plasmaeffekte untersucht. Autoreferat.

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

Kikuchi, Sadaemon: Über die Verteilungen der galaktozentrischen Keplerschen Bahnelemente. I. Sci. Reports Tôhoku Univ., I. Ser. 41, 236—247 (1958).

Verf. gibt eine theoretische Deutung der Schütteschen Statistik der galaktozentrischen Bahnelemente a, e und V (Bahngeschwindigkeit) [K. Schütte, Teil I—VII in Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. II a 161—164 (1952—1955)], welche rund 1000 Sterne der Sonnenumgebung umfaßt. Bei Vernachlässigung der geringen Bahnneigungen kann das Problem zweidimensional behandelt werden. Das Jeans-Charliersche Theorem $f(\dot{x}, \dot{y}) d\dot{x} d\dot{y} = f(J_1, J_2) d\dot{x} d\dot{y}$ mit $J_1 = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) (-K^2/r)$ und $J_2 = x\dot{y} - y\dot{x}$ ergibt unter Annahme einer ellipsoidischen Geschwindigkeitsverteilung

$$f(\dot{x}, \dot{y}) d\dot{x} d\dot{y} = A \exp(-\alpha J_1 - \beta J_2^2 - \gamma J_2) d\dot{x} d\dot{y}.$$

Die Transformation von \dot{x}, \dot{y} auf a, e , nämlich $f(\dot{x}, \dot{y}) d\dot{x} d\dot{y} = F(a, e) da de$ liefert z. B. für die Häufigkeit der Bahnnachsen a

$$F(a) = \frac{A k^2}{2 r^2} \exp(i/\lambda) \lambda^{-2} \int_0^{\pi/2} \exp(-j(2-\lambda^{-1})\sin^2\mu + k\sqrt{2-\lambda^{-1}}\sin\mu) d\mu$$

$$(\lambda = a/r = a/a_0)$$

Ähnliche, numerisch auszuwertende Integrale ergeben sich für $F(e)$ und $F(V) = V F(J_1)$. Aus dem empirischen Material Schüttes erhält man $i = \alpha K^2/2r = 22.38$; $j = \beta K^2 r = 23.93$; $k = \gamma K \sqrt{r} = 84.78$. Die theoretische Häufigkeit F trifft die Statistik Schüttes gut. $F(a)$ hat wie bei Schütte ein Maximum für a/a_0 zwischen 0,8 und 1,0 statt an der zu erwartenden Stelle 1. Bei $F(e)$ scheint sich allerdings die Vernachlässigung der galaktischen Neigungen auszuwirken. Wie bei Schütte zeigt $F(e)$ ein Maximum bei $0 < e < 0,3$ entgegen Bottlingers Diagramm (1933), welches das Problem der Punktdichte im (ellipsoidischen) Geschwindigkeitsraum erstmals aufgeworfen hat, das Schütte später empirisch angriff. J. Fleckenstein.

Segre, Sergio: Un modello della struttura interna di Algol A. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 24, 301—306 (1958).

Die Gleichungen des inneren Aufbaus von Sternen werden aufgestellt und für eine numerische Integration umgeformt; numerische Resultate unter Benutzung der experimentellen Daten von Algol A soll eine folgende Arbeit gleichen Titels bringen. F. Schmeidler.

Kippenhahn, R.: Untersuchungen über rotierende Sterne. II: Die Theorie erster Ordnung. Z. Astrophys. 46, 26—65 (1958).

(Teil I vgl. dies Zbl. 66, 453.) — Als Theorie erster Ordnung wird eine Theorie des Sternaufbaus bezeichnet, in der die im Verhältnis Fliehkraft zu Schwerkraft linearen Glieder berücksichtigt werden. Für die mechanischen und thermodynamischen Gleichungen des Problems wird ein Lösungsansatz durch Kugelfunktionen aufgestellt. Bei vorgegebenem Rotationsgesetz des Sterns und Annahme von Strahlungsgleichgewicht können die meridionalen Strömungen berechnet werden; einige Beispiele werden durchgerechnet. Die gefundene Lösung versagt aber für höhere Geschwindigkeiten, bei denen die Corioliskräfte das Rotationsgesetz beeinflussen; in diesem Fall werden die Bewegungsgleichungen nichtlinear und können nur einige allgemeine Aussagen abgeleitet werden. F. Schmeidler.

Fleckenstein, Joachim Otto: Il problema dei due corpi nel quadro della cosmogonia planetaria di Schmidt. Rend. Sem. mat. fis. Milano **27**, 126—152 (1958).

Auf Grund der von O. J. Schmidt stammenden kosmogonischen Theorie, die den Aufbau der Planeten durch Zusammenballung zahlreicher Kleinkörper von Meteorgröße erklärt, wird eine Erklärung für mehrere Eigentümlichkeiten des Sonnensystems gegeben, z. B. das Abstandsgesetz der großen Planeten, das Alter der Erde und das Rotationsmoment des Gesamtsystems. *F. Schmeidler.*

Takakubo, Keiya: On B. Donn's model of interstellar-gas distribution. Sci. Reports Tôhoku Univ., I. Ser. **40**, 244—250 (1957).

Eine statistische Untersuchung der Bewegungsverhältnisse des interstellaren Gases zwischen uns und der Orion-Assoziation wird durchgeführt. Die Ergebnisse geben dem Modell diskreter Wolken den Vorzug gegenüber einer mehr gleichförmigen Verteilung der Materie. *S. v. Hoerner.*

Mieghem, J. van: Énergies potentielle et interne convertibles en énergie cinétique dans l'atmosphère. Beitr. Phys. Atmos. **30**, 5—17 (1957).

Die Arbeit des Verf. ist eine Fortsetzung einer früher hier referierten Veröffentlichung (dies. Zbl. **72**, 457). Wie dort befinde sich die Atmosphäre in einer stabilen Gleichgewichtslage im Schwerfeld. Man untersucht Störungen eines solchen Zustandes. Besonders interessiert die verfügbare Energie (potentielle + innere Energie), die in kinetische Energie umgewandelt werden kann. Nach einigen Größenordnungsbetrachtungen werden verschiedene neue Darstellungen für die verfügbare Energie aus den klassischen Bilanzen für die potentielle und die innere Energie hergeleitet. Besonderer Wert wird auf die Herausstellung der physikalischen Faktoren gelegt, die die Energie in der Atmosphäre verfügbar machen. *J. Zieryep.*

Wippermann, F.: Die Transformation potentieller und innerer Energie in die Energie rotorloser und diejenige divergenzfreier Bewegungen. Beitr. Phys. Atmos. **29**, 269—275 (1957).

Verf. zerlegt die Horizontalgeschwindigkeit in einer Tangentialebene an die Erdkugel in einen rotor- und divergenzfreien Anteil (Helmholtzsche Darstellung). Es wird die kinetische Energie bestimmt und nach Mittelung über die gesamte Erdoberfläche eine Aufspaltung in einen rotor- und divergenzfreien Term durchgeführt. Etwas Ähnliches wird für die potentielle und innere Energie gemacht. Aus den aufgestellten Bilanzgleichungen wird ersichtlich, daß die potentielle und innere Energie bei Umwandlung in kinetische Energie zunächst ausschließlich in Energie der rotorfreien Bewegung überführt werden. Diese Tatsache ist bei verschiedenen Prognosenmodellen nicht immer beachtet worden. Abschließend werden einige weitere meteorologische Anwendungen gegeben. — Es ist zu beachten, daß die anfangs durchgeführte Mittelbildung über die gesamte Erdoberfläche wegen der alleinigen Gültigkeit der Helmholtzschen Zerlegung in einer Ebene nur dann richtig ist, wenn zuvor eine Transformation in die Ebene, z. B. diejenige der stereographischen Projektion durchgeführt wird. Dadurch treten dann ortsabhängige Maßstabsfaktoren in den Gleichungen auf. *J. Zieryep.*

Saunders, K. D.: A power-spectrum equation for stationary random gusts, including a sample problem. J. aeronaut. Sci. **25**, 295—300 (1958).

Verf. beschäftigt sich mit dem wichtigen und schwierigen Problem der Beeinflussung eines Flugzeugs durch Böen. Im ersten Teil der Untersuchung wird durch Idealisierung eine allgemeine „power-spectrum equation“ abgeleitet, die den mittleren meteorologischen Verhältnissen gerecht werden dürfte. Diese Gleichung beschreibt die Energieverteilung (Energiespektrum) der Böen in Abhängigkeit von der Frequenz (oder Wellenlänge), und sie wird benötigt, um den Einfluß einer solchen Störung auf ein gewisses System zu berechnen. Als ein solches System wird im zweiten Teil ein idealisiertes Flugzeug betrachtet. Für verschiedene Flugzustände werden die Beanspruchungen der einzelnen Bestandteile studiert. *J. Zieryep.*